Ф. А. Березин

Введение в суперанализ

МЦНМО

УДК 514.74+517.2/.3
ББК 22.151.5+22.161.1
Б48

Березин Ф. А.
Введение в суперанализ
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
432 с.
ISBN 978-5-4439-2152-5

Теория суперсимметрий — относительно новое направление в математике. Идеи суперсимметрии, появившиеся, чтобы разрешить некоторые проблемы теоретической физики, долго казавшиеся неразрешимыми по определению, быстро выросли в теорию супермногообразий — богатый сплав дифференциальной и алгебраической геометрий с собственными глубокими и недостаточно пока исследованными проблемами.

Незаконченная рукопись погибшего основоположника теории суперсимметрий — Феликса Александровича Березина — еще раз отредактирована и дополнена результатами, полученными за 30 лет, прошедших с момента ее написания, или ссылками на соответствующие результаты. Отмечены также открытые проблемы разного уровня сложности.

В Дополнении публикуются материалы трудов «Семинара по суперсимметриям».

Книга будет полезна как научным работникам, так и преподавателям и студентам, — как математикам, так и физикам.

Подготовлено на основе книги:
Березин Ф. А. Введение в суперанализ / Издание второе, исправленное и дополненное. Под ред. Д. А. Лейтеса с дополнениями Д. А. Лейтеса, В. Н. Шандера и И. М. Щепочкиной. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-74-83
http://www.mccme.ru

© Березин Ф. А., наследники, 2013
© Лейтес Д. А., 2013
© МЦНМО, 2014

ISBN 978-5-4439-2152-5

Оглавление

Предисловие редактора 5
Предисловие редактора первого издания 12
Предварительные сведения 15

Введение. Математические основы суперсимметричных теорий поля 27

1. Линейная алгебра в суперпространствах 55

2. Анализ на суперобластях 92

3. Супермногообразия в целом 113

§ 1. Супермногообразия 113
§ 2. Конструкции супермногообразий 116
§ 3. Стратификация супермногообразия 122
§ 4. Ретракция и первое препятствие 124
§ 5. Высшие препятствия 130
§ 6. Примеры неретрагируемых супермногообразий 132
§ 7. $\mathbb{Z}_+$-градуировка и условия простоты супермногообразия 133

4. Динамика частицы со спином как пример классической механики на супермногообразиях 137

§ 1. Введение 137
§ 2. Динамика нерелятивистской частицы со спином 141
§ 3. Релятивистский спин и уравнение Дирака 149
§ 4. Заключительные замечания 155
§ 5. Приложения 156
Литература 163

Дополнения. Семинар по суперсимметриям. Том $1\frac{1}{2}$

Д1. Общие сведения: сводка результатов 169

Д2. Супералгебры Ли с матрицей Картана 178

§ 1. Матрицы Картана 178
§ 2. Графы Дынкина 184
§ 3. Таблицы 193

Д3. Векторные супералгебры Ли 214

§ 1. Введение 214
§ 2. Векторные супералгебры. Стандартная реализация 235
§ 3. Производящие функции 237
§ 4. Бездивергентные подалгебры 240

§ 5. Обобщения продолжений Картана 241
§ 6. Деформации супералгебры Бюттен 244
§ 7. Простые вещественные векторные супералгебры Ли 245
§ 8. Струнные супералгебры Ли 251

Д4. Супералгебры Пуассона и Бюттен — аналоги общей линейной алгебры. Спинорные и осцилляторные представления 265

§ 1. Введение 265
§ 2. Супералгебра Пуассона $\mathfrak{po}(2n|m)$ 269
§ 3. Пространство Фока и спинорно-осцилляторные представления . . . 272
§ 4. Спинорно-осцилляторные представления 274

Д5. Автоморфизмы и вещественные формы (по В. Сергановой) 281

§ 1. Введение 281
§ 2. Автоморфизмы простых конечномерных супералгебр Ли 284
§ 3. Вещественные структуры простых конечномерных супералгебр Ли . 292
§ 4. Классификация простых супералгебр петель 299
§ 5. Автоморфизмы и вещественные формы струнных супералгебр Ли . . 304
§ 6. Внешние автоморфизмы и вещественные формы супералгебр петель 325
§ 7. Симметрические суперпространства 336

Д6. Инвариантные многочлены на супералгебрах Ли (по А. Н. Сергееву) 343

§ 1. Введение 343
§ 2. Некоторые конструкции с функтором точек 353
§ 3. Предварительные результаты 357
§ 4. Инвариантные многочлены на супералгебрах Ли 363
§ 5. Открытые задачи 381

Д7. Инвариантные функции на супермногообразиях суперматриц (В. Шандер) 385

§ 1. Введение 385
§ 2. О нормальном виде суперматриц 389
§ 3. Инвариантные функции на $\mathcal{Q}(1)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$ 394
§ 4. Инвариантные функции на $\tilde{\mathbb{C}}^{n|n}$ 397
§ 5. Описание инвариантных функций на $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ 408
§ 6. Примеры 416
§ 7. Заключение 418

Литература к Дополнениям 419
Литература, добавленная редактором 424
Предметный указатель 427

Предисловие редактора

Я не знаю никакой другой математической работы второй половины XX века, которая оказала влияние на развитие теоретической физики, сравнимое с введением интеграла по антикоммутирующим переменным. Для меня роль грассмановых переменных и их польза в вычислениях сравнима с ролью мнимых чисел.

К. Ефетов

Время неизменно реализует мои замыслы, но злоупотребляет правом использовать меня в качестве заложника.

В. Ф. Шварцман, 29.04.1972, из дневника.
За 15 лет до самоубийства

Быть честным хочется. Но меньше, чем богатым.

В. Семенов. Одностишия.

В 1986 году мне пришлось повозиться, редактируя перевод на английский язык первого издания этой книги [Бер*] и объемистых дополнений, в [Бер*] не вошедших, см. [Ber*]. Если править все как следует, то невычитанную автором рукопись надо в значительной мере переписывать и утроить объем комментариями и дополнениями. Для этого издания я сделал и то, и другое, продолжив с помощью трудов «Семинара по Суперсимметриям» [SoS*] работу, начатую А. А. Кирилловым и В. П. Паламодовым.

Книга [Бер*] заполняла вакуум: никаких учебников по «суперам» на русском языке не было. Позже можно было, правда, почитать книги [ЛПет*] и [МаКП*], но первая вышла ничтожным по тому времени тиражом 1000 экз., была распродана за месяц и до эры интернета с его пиратами-просветителями ее было не достать, а вторая сложновата, да и «суперы» в ней — важный, но не основной объект. После сделанной для этого издания переработки книг [Бер*] и [Ber*] получилось внятное введение в предмет, с полезным справочным материалом; указаны важные открытые задачи (например, связанные с недавними работами Э. Виттена).

Читатель! Отмечая многочисленные исправления, комментарии и дополнения, помните, что именно Ф. А. Березин задолго до других исследователей догадался о существовании «супематематики как науки» (а не набора отдельных суперпримеров). Поэтому именно *его* заблуждения и поиски особенно поучительны: некоторые из его заблуждений кочуют по

текстам до сих пор, а разъяснения (как артефактов типа «правых производных», так и важнейшего понятия — элемента объема), видимо, не всем доступны. Впрочем, имея эти разъяснения, надо их читать и разбирать (например, препринты [SoS*] и даже книга [QFS*] пока мало помогли)...

После доклада Ю. Весса и Б. Зумино (весна 1974 г.) не понимать важность «суперов» стало затруднительно. А ведь следы «суперов» в «обычной» математике отмечали с работ Грассмана: например, Э. Картан переформулировал теорию дифференциальных уравнений в терминах внешних форм (т. е. супералгебры Грассмана); а в 1930-х гг. было замечено, что умножение Уайтхеда в группах гомотопий наделяет прямую сумму этих групп структурой суперкольца Ли, а пространство когомологий многообразия с коэффициентами в конечных полях $\mathbb{F}_q$ — инвариант многообразия, являющийся множеством $\mathbb{F}_q$-точек некоторой супергруппы Ли.

До Ф. А. Березина никто, однако, не предполагал, что, введя «суперы», мы открываем такую картину мира, в которой привычная даже по сегодня математика составляет лишь «меньшую половину». Оказалось, что супервзгляд упрощает и проясняет многое в этой «меньшей половине».

Соглашаясь редактировать это издание, я думал, что ограничусь косметической правкой и процитирую одного из выдающихся математиков, интересно, но мутно читавшего лекции на мехмате, когда я там учился, и на просьбы *слабых* студентов пояснить рассказываемое отвечавшего: «Вы слушайте не то, **что** я говорю, а то, что я **хочу** сказать!» К сожалению (на редактуру ушло немало времени), выяснилось, что я просто не могу не исправить замеченные неточности и убрать хотя бы часть повторов и очевидные непосредственные вычисления, а также (тем более) те обозначения и утверждения, про которые Ф. А. говорил мне: «хоть и неверные, но физикам так привычнее» и «хоть и неверно, но так понятнее».

Прежде всего я имею в виду обозначение элемента объема — одной из важнейших составных частей в «интеграле Березина». По счастью, я могу опираться не только на свой вкус, но и на авторитет П. Делиня (см. [QFS*]), решительно не понимающего, как можно обозначать одним символом совершенно разные (на супермногообразиях; на многообразиях-то они совпадают) объекты (дифференциальные и интегральные формы), особенно если они могут встречаться одновременно, как, например, при вычислении супераналога характера Черна. Хотя в физических текстах до сих пор «почти все» физики обычно используют противоречивые обозначения, но все-таки это делают не все, а я предпочитаю ориентироваться на П. Делиня и Э. Виттена (тоже ведь физик, согласитесь), чем на невразумительных «почти всех», и того же желаю и вам, читатель.

Кроме того, странно было бы не прокомментировать важные вопросы, если ответы на них полностью, или хотя бы частично, получены (причем некоторые — до 1980 г., летом которого Ф. А. погиб).

В 1974 г. я заинтересовал «суперами» И. Н. Бернштейна. Он поверил в существование ТЕОРИИ супермногообразий, убедившись в мультипликативности березиниана на суперматрицах размера $1|1 \times 1|1$. В 1976 г. мы с ним начали писать книгу–учебник «про суперы». Мы написали первые три главы книги, и я передал копию рукописи Ф. А. Березину для комментариев. Комментариев, однако, не последовало, а занудное, в отличие от захватывающего процесса решения новых задач, писание нашего учебника [CoC1°] притормозили всякие обстоятельства.

В отличие от И. Н. Бернштейна и меня, мурыживших в 1976–80 гг. почти готовый текст первых трех глав книги [CoC1°], ср. [ЛПет*] и [Лусп*], а в 1986–2010 гг. — расшифровку четвертой главы книги [ЛПет*] — труды [SoS*], на Западе были оперативно изданы с десяток книг и тьма статей, посвященных изложению разных (случайных) аспектов теории супермногообразий или суперсимметрий (в основном — супералгебр Ли). Из авторов изданий, вышедших до [QFS*], только Б. ДеВитт прислал нам (Ф. А. и мне) черновик рукописи своей книги [DeW*]; он, несомненно, хотел и получить замечания, чтобы правильно расставить исторические приоритеты и не допустить ошибок (а то, что они в его книге остались, см. [CoC2*], где часть из них исправлена, — это по нашей с Ф. А. лени: мы ему не ответили).

Нецитирование работ Ф. А. и моих по суперсимметриям (или, как это иногда делают и теперь, перечисление их в длинном ряду, среди эпигонских или неверных работ) сильно задевало Ф. А., а ближе к защите моей кандидатской диссертации стало раздражать и меня. И. Н. Бернштейн сказал мне на это: «Плюнь, еще что-нибудь придумаешь» и развлек меня байкой про то, что произошло однажды в конце 1960-х гг., когда некоторые начальники решили по совокупности причин подвергнуть критике Я. Б. Зельдовича (одного из последних физиков-теоретиков «широкого профиля»). Чисто политическая критика была уже не в моде, и в газетах появились разгромные отзывы бывших ученых на учебник Я. Б. Зельдовича по математическому анализу. Но из-за разгула «брежневской демократии» были опубликованы и противоположные отзывы кого-то из известных и все еще работающих ученых. Получалось несолидно. Критика должна была иметь видимость научной. Нужна была поддержка «генеральной линии» со стороны авторитетов. И вот на какой-то конференции к гулявшему по коридору И. М. Гельфанду подошел Некто, чью фамилию я сейчас не помню, и стал агитировать покритиковать книгу Зельдовича по математике для школьников. Гельфанд энтузиазма не выказывал, и Некто стал тихонько рассказывать, что «знаете, в таком-то году Зельдович-то украл такой-то результат у NN...». К смущению Некта, быстро сменившемуся восторгом от показавшегося близким успеха миссии, Гельфанд стал громко созывать народ: «послушайте Некта: он такое интересное про Зельдовича рассказывает». И стал просить повторить на бис. А выслушав еще раз,

уже в толпе, сказал: «Очень это некрасиво со стороны Яков Борисыча по отношению к NN. Это же все равно, что отнять у нищего пятак!..»

Однако мне не верилось, что мне повезет в жизни дать определение, сравнимое по важности с определением супермногообразия [1]. Ф. А. Березину, несомненно, тоже, к тому же его никто байками не утешал, а жизнь его делалась все сложнее, см. [Восп*]. Напряжение, сходное с тем, что сломало Ф. Клейна, не выдержавшего соревнования с А. Пуанкаре, сказалось и на рукописи этой книги. Например, Ф. А. в нескольких местах пишет о задачах, не решенных и по сей день, как о сделанных, чтобы (как он мне не раз говорил) получить возможность подумать о них не торопясь.

По разным причинам, говоря о пионерах суперсимметрии, часто называют случайных людей (скажем, Дж. Мартина). Однако видно, что до доклада Ю. Весса и Б. Зумино, внятно показавших некоторые перспективы применения «суперов», никто из тех, кого сейчас обычно числят в пионерах (к примеру, в Wikipedia), не понимал степени важности даже собственных результатов по суперсимметриям; некоторые не понимают этого даже сейчас: иначе бы всё бросили и занимались бы лишь «суперами». Это непонимание особенно заметно в предисловиях Х. Миядзавы и Г. Ставраки к энциклопедии [CoEn*].

Любопытно, что в настоящее время участники дискуссий «наблюдаема ли суперсимметрия?» ни единым звуком не намекают, что речь идет только о физике высоких энергий, в то время как, например, в физике твердого тела положительный ответ известен благодаря работам К. Ефетова, см., например, [Ef*] и его работы (в arXiv'e), особенно те, где вроде бы устанавливается суперсимметричность графена, причем супералгеброй Ли суперсимметрии является одна из тех супералгебр, что возникают в струнных моделях теории поля.

Если бы не все эти результаты К. Ефетова, разговоры о фантастических перспективах приложений суперсимметрий в теоретической физике напоминали бы дискуссии биологов и математиков в 1960-х гг. В то время И. М. Гельфанд стал заниматься математическими методами в биологии и медицине, и на одной из первых советских конференций на эту тему, подводя итоги конференции, он сказал, что, как убедительно показала конференция, теперешние соблазнительные перспективы результатов применения математических методов в биологии и медицине своими успехами

[1] Сейчас я думаю, что недооценивал благосклонность фортуны. По-моему, определение неголономного аналога тензора кривизны тоже очень важно: о применении к уравнениям супергравитации см. [ГрЛе*, L*] и ссылки, а о возможных применениях к экономике упомянуто в книге [Serg*]. Без этого определения невозможно, как мне представляется, продвинуться в понимании геометрических структур не только супергравитации, но и гравитации и других фундаментальных сил. Это понимание начало брезжить в работе Г. Манделя (видимо, погибшего в конце 1930-х гг.), а В. В. Вагнер почти получил ответ, но эти пионеры несколько опередили время: всем им не хватало некоторых понятий, открытых позже.

и проблемами напоминают ему совокупление слепых в крапиве. (Под крапивой в нашем контексте я имею в виду суперколлайдер.)

Путеводитель по литературе. За 30 лет, прошедших после смерти Ф. А. Березина, кое-что прояснилось из того, что было неясно, когда он по-своему излагал то, о чем написали И. Н. Бернштейн и я. В Дополнениях приводятся некоторые из результатов, полученных участниками семинара «SoS», которым я руководил в 1976–1986 г. в Москве, в 1987–1999 г. в Стокгольме и в 2004–2006 г. в Лейпциге. Даны ссылки и на другие работы, развивающие пионерские наблюдения Ф. А. Березина, см. также часть «О науке» в книге [Восп*].

Значительный объем книги [Вег*] (все ссылки мы приводим по наиболее доступным изданиям) составили слегка отредактированные препринты ИТЭФ'а 1977 г., содержащие описание операторов Лапласа—Казимира и их применения к описанию неприводимых представлений простых конечномерных супералгебр Ли над $\mathbb{C}$ и их близких «родственниц», таких как $\mathfrak{gl}$ по отношению к $\mathfrak{sl}$. С помощью операторов Лапласа—Казимира на супергруппах Ли Ф. А. Березин одним из первых описал условия «типичности» конечномерных представлений (на примере унитарной супергруппы).

Однако работы В. Каца, описавшего типические представления для всех конечномерных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана, наглядно показали, что алгебраическая техника более адекватна задаче; подход В. Каца вразумительнее изложен и обобщен А. Н. Сергеевым, см. гл. Д 4, а дальнейшие улучшения см. в [SV°].

Немного раньше этих результатов Ф. А. Березина в связи с формулой Стокса, см. [БрЛ1], простеньким методом (индуцируем и ограничиваем) были описаны неприводимые непрерывные представления супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(m|n)$ полиномиальных векторных полей, рассматриваемые с естественной топологией (позднейший обзор на эту тему — [GLS2*]); тем же методом, см. [BL1°], были описаны все, включая атипические, неприводимые конечномерные представления супералгебр Ли серий $\mathfrak{gl}(1|n)$ и $\mathfrak{osp}(2|2n)$ («формула Бернштейна—Лейтеса для характеров»). В обзоре [Лобз°] перечислены ответы (описание неприводимых представлений со старшим весом), полученные к 1984 г. участниками семинара «SoS» для разных серий простых супералгебр Ли.

И. Пенков и В. Серганова, см. [Pen1°, Pen2°, PS1°, PS2°, PS3°], разобрали сложный случай атипических конечномерных неприводимых представлений разных типов простых супералгебр Ли (как с матрицей Картана, так и серий $\mathfrak{pe}$ и $\mathfrak{spe}$); их результаты (для конечномерных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана) суммированы в докладе В. Сергановой на Международном конгрессе математиков в Берлине, 1998 г.

Наилучший на сегодня метод доказательства формулы Пенкова—Сергановой для характеров атипических представлений — это, видимо, подход

Дж. Брандана; см. [Br1*, Br2*]. Другие результаты теории представлений упомянуты в подстрочных примечаниях и Дополнении.

Книга [Ber*] завершалась статьей В. И. Огиевецкого о супергравитации. Через несколько лет после смерти Виктора Исааковича его соавторы подвели итог совместной работы в книге [GIOS*], где рассмотрены N-расширенные супермногообразия Минковского с $N < 4$. В их подходе совершенно неясно, что делать, если $N \geqslant 4$. См. также [ГИФ°].

На мой взгляд, самое главное, что удалось сделать в этом направлении за время, прошедшее со смерти Ф. А. Березина, — это понять (по крайней мере одну) математическую причину затруднений при попытке выписать уравнения супергравитации и предложить подход к их написанию для любого N. А именно, если предположить, что уравнения супергравитации (чем бы она ни была) — условия на аналог тензора кривизны для суперпространства Минковского, то приходится признать, что при таком подходе мы затрудняемся выписать какое бы то ни было условие не из-за нечетных координат, а потому, что все СУПЕРпространства Минковского *неголономны* (т. е. оснащены неинтегрируемым распределением), а что такое неголономный аналог тензора Римана, никто до работ [ГрЛе*, L*] не знал [1] даже на многообразиях, см. в [Serg*] дополнение к переводу интереснейшей книги [Спр*] — написанный А. М. Вершиком обзор математических результатов, описывающих неголономные многообразия. Хотя я уверен, что существует несколько совершенно разных суперизаций уравнений Эйнштейна, определение неголономного тензора кривизны интересно множеством видимых приложений независимо от «супер» проблем. Этой теме должен быть посвящен специальный том трудов семинара «SoS»: она слишком обширна.

А вот то, что можно изложить кратко, и что тоже небезынтересно, — так это выводы из сделанного в 1996 г. наблюдения И. Н. Бернштейна о том, что многообразия и супермногообразия, которые обычно [2] изучают математики, — либо вещественные, либо комплексно-аналитические, в то время как супермногообразия, открытые физиками, принадлежат к «третьему» типу — «вещественно-комплексных» супермногообразий; см. [BGLS*]. И. Н. Бернштейн заметил, что суперпространства Минковского, введенные в пионерских работах физиков, — как раз такие объекты, а не вещественные и не комплексные. Физики ввели вещественно-ком-

[1] Как часто бывает, если поискать в литературе, то выясняется, что кое-кто знал. Вернее, думал, что знает, но привычка всегда, даже когда в этом нет нужды, записывать тензоры и связности в координатах (к которой до сих пор тяготеют многие физики и которой, имея в виду физиков, придерживался и Ф. А. Березин, в том числе и в рукописи этой книги) затруднила как поиск ошибки, так и возможность выделить правильную часть этих работ, см. [ГрЛе*, L*], где дано и определение неголономного тензора Римана, и обзор литературы.

[2] Последние лет 40 изучают также p-адические многообразия, см., например, [CaOs*].

плексные СУПЕРмногообразия; однако вещественно-комплексные многообразия тоже существуют, например, проективизации кокасательных расслоений над римановыми многообразиями (но локальные инварианты вроде тензора Римана математики пока не изучали).

Об обозначениях. Очевидно, что принятое определение («левой») частной производной по нечетной переменной можно изменить на знаковый множитель, считая ее «действующей на функцию справа», см. определение на с. 105. Вводя такие «правые производные», можно иногда не писать знаки, зависящие от четности того, что мы дифференцируем. Этот выигрыш сомнителен: если считать, что дифференцирования действуют на функции слева и являются элементами левого модуля над кольцом функций, не требуется гадать, как интерпретировать выражение fD, где f — функция, а D — дифференцирование, когда стрелочка над D потерялась, как это часто случается. Кроме того, при знакомстве с суперанализом, содержащим «правые производные», математика ошарашивает: «почему на $0|q$-мерном супермногообразии частных производных $2q$ штук, в то время как размерность касательного пространства по Зарисскому равна $0|q$?» Итак, никаких «правых производных» на самом деле нет, а есть только левые, но «правые производные» позволяют уменьшить число знаков в рукописях. Впрочем, сложный счет все равно все поручают компьютеру, а программисту не нужно возиться с фантомными сущностями.

Как правило, латинские буквы обозначают что-то четное, а греческие — что-то нечетное. Двухэлементное поле математики обозначают, как правило, символами $\mathbb{F}_2$, или $\mathbb{Z}/2$, или $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а символом $\mathbb{Z}_2$ обозначают кольцо целых 2-адических чисел. Пусть $\operatorname{diag}_k(a_1, \ldots, a_k)$ — блочно-диагональная матрица из k блоков по главной диагонали, а $\operatorname{antidiag}_k(a_1, \ldots, a_k)$ — блочно-диагональная матрица из k блоков по побочной диагонали, нумеруемых в обоих случаях сверху вниз; $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел.

Символ $\{e_i\}$ обозначает множество всех элементов e_i, а не одноэлементное множество.

Многие обозначения и понятия перечислены в предметном указателе.

Ссылка на пример 1.3 отправляет к примеру 3 пункта 1 того же параграфа или главы.

Сильно сокращает текст и облегчает понимание формул линейной алгебры в суперпространствах сформулированное в самом начале Правило Знаков, в котором переставляемые элементы **должны быть соседями**:

> Если что-то четности p движется мимо чего-то четности q,
> то появляется множитель $(-1)^{pq}$.
> При этом формулы, определенные (казалось бы) только на однородных элементах, нужно понимать автоматически продолженными на неоднородные элементы по линейности.

Спасибо Ф. А. Березину, поставившему мне в 1971 г. задачу «определить аналоги того, что после Весса и Зумино называют супергруппой, суперсхемой и супермногообразием», спасибо И. Н. Бернштейну, а также Ю. И. Манину и А. Л. Онищику, учивших математике меня и участников семинара «SoS». Я благодарю И. М. Щепочкину за огромную помощь, Е. Г. Карпель и В. П. Павлова — за моральную поддержку, а РФФИ — за грант на публикацию книги. За большую TEX-ническую помощь, а также советы при редактировании спасибо В. В. Молоткову и О. Широковой. За разнообразную помощь спасибо Ю. Н. Торхову — главному редактору издательства МЦНМО. А еще большое спасибо П. Я. Грозману и А. Лебедеву.

Сноски (и комментарии, внесенные в текст) редакторов первого и второго изданий помечены соответствующими инициалами.

Предисловие редактора первого издания

Феликс Александрович Березин трагически погиб 13 июля 1980 года во время водного путешествия [1)].

В последние годы своей жизни он интенсивно работал над различными математическими проблемами, связанными с идеей суперсимметрии. Формальное исчисление в алгебре Грассмана, которое было развито Ф. А. Березиным в его первой книге «Метод вторичного квантования», привело его к убеждению, что

существует нетривиальный аналог анализа,
в котором на равных правах с обычными переменными
выступают антикоммутирующие переменные.

Эту идею он настойчиво пропагандировал и тщательно подбирал подтверждающие примеры и конструкции. Важнейшие из них — интеграл Березина по антикоммутирующим переменным и так называемый «березиниан» — аналог якобиана при замене антикоммутирующих переменных.

К середине 70-х годов пионерские идеи Ф. А. Березина стали распространяться, и понятия суперпространства, супермногообразия, супергруппы и супералгебры Ли были приняты на вооружение физиками. Появилась надежда, что на языке суперанализа может быть построена единая теория поля.

Ф. А. Березин начал работать над книгой по суперанализу. Эта работа продолжалась несколько лет и осталась незаконченной. Из рукописей и статей Ф. А. Березина, дополненных его друзьями и коллегами, составлена эта книга.

Вошедший в книгу материал в силу сложившихся обстоятельств носит разнородный характер. Часть глав автор успел написать «начисто» и опробовать их на семинарах по математической физике и по теории представлений в МГУ. Другие главы остались в черновиках. Некоторые важные разделы (например, теоретико-полевые приложения) остались ненаписанными.

Опишем более подробно содержание книги. В качестве введения использован текст статьи Ф. А. Березина в журнале «Ядерная физика», которая является записью его обзорного доклада, сделанного в мае 1978 г. на конференции по калибровочной теории поля в Москве.

Первые три главы книги были подготовлены автором для печати и подверглись лишь небольшой правке. В них даются первоначальные сведения

[1)] Вообще-то и дата, и обстоятельства его смерти неясны, см. [Восп*]. — *Прим. Д. Л.*

об алгебрах Грассмана, дифференцировании и интегрировании функций от антикоммутирующих переменных, развивается аппарат линейной алгебры в $\mathbb{Z}/2$-градуированных пространствах. Весь этот материал изложен подробно, с расчетом на читателя, который впервые знакомится с предметом [1)].

Далее должна была по замыслу автора излагаться глобальная теория супермногообразий, теория супералгебр и супергрупп Ли и их представлений.

Вторая часть книги должна была быть посвящена приложениям.

Из всего этого материала в готовом виде в рукописях Ф. А. Березина была обнаружена лишь глава, посвященная супералгебрам Ли, и черновая версия главы, посвященной супермногообразиям. Кроме того, несколько лет тому назад Ф. А. Березин изложил часть будущей книги в виде серии из пяти препринтов ИТЭФ.

Для настоящего издания глава [2)] 3 была заново написана В. П. Паламодовым. Содержание ее выходит за рамки, намеченные Ф. А. Березиным, в ней есть и новые результаты. В частности, построен пример неретрагируемого [3)] комплексного супермногообразия размерности $4|2$. Хотя требования к математической подготовке читателя в этой главе несколько выше, чем в предыдущих, надеюсь, что весь изложенный здесь материал понятен и интересен для физиков-теоретиков.

Авторский текст подвергся лишь небольшой редакционной обработке.

А. А. Кириллов

[1)] **Путеводитель по литературе: продолжение**. Читателю, ознакомившемуся с введением в предмет в изложении основоположника (т. е. по этой книге), я советую продолжить изучение комплексно-аналитических проблем, включая определения, по книгам Ю. И. Манина [МаКП*, МаАГ*] и статье А. Вайнтроба [Вай*], а дальнейшие подробности можно узнать из работ А. Л. Онищика. Сам А. Л. Онищик говорил мне, что понял разницу между расщепимыми и нерасщепимыми супермногообразиями, ознакомившись со статьями [Gre*, Вай*]: они помогли ему дать некоторую классификацию деформаций супермногообразий с заданным ретрактом, использующую неабелев аналог теоремы Дольбо, см. [On2*]; приложения этих идей к классификации однородных супермногообразий см. в работах [On1*, On3*].

Подробности алгебры и анализа на супермногообразиях изложены в трудах семинара «SoS»: [CoC1°, CoC2*, LJ*], см. также дополнения к английской версии [БШ*].

Развитие специфического подхода Ф. А. Березина к квантованию и применение «квантования по Березину» к разным задачам см. в ярких работах Ю. Неретина.

Недавние работы В. Овсиенко с соавторами обобщают супергеометрию на пространства, окольцованные, например, алгебрами Клиффорда, что позволит, в частности, дать «классическое описание частицы со спином», см. гл. 4, непосредственно на квантовом уровне.

Памяти Ф. А. Березина посвящены сборники [DM1*, DM2*, LMP*, JNMP*], а также [FelB*] и [Восп*]. Недавно найденные и потому не вошедшие в [Восп*] фотографии семинара Ф. А. Березина и Р. А. Минлоса см. на с. 14. — *Прим. Д. Л.*

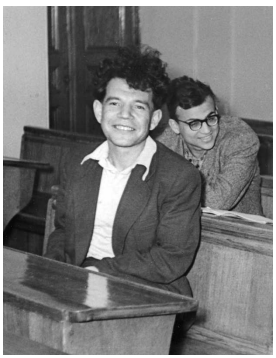
[2)] После того как замеченные повторы были убраны, а содержание линейно упорядочено, нумерация глав изменилась по сравнению с первым изданием; здесь это учтено. — *Прим. Д. Л.*

[3)] Сейчас говорят *нерасщепимого*. Первая работа об этом — статья [Gre*]. — *Прим. Д. Л.*

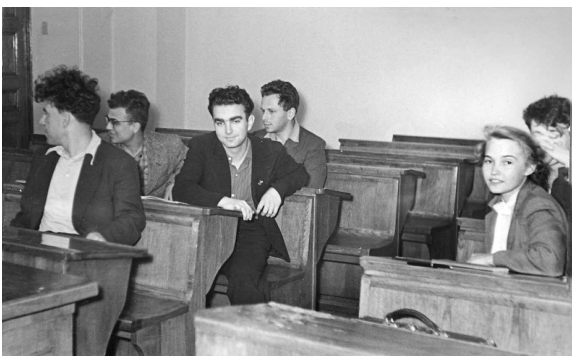
Спецсеминар Ф. А. Березина и Р. А. Минлоса по функциональному анализу (1959 г., мехмат МГУ)



Феликс Березин, Раис Исмагилов, Роберт Минлос, Леня Балашов, Исаак Корнфельд, Эдик Белага



Роберт Минлос, Леня Балашов



Роберт Минлос, Леня Балашов, Исаак Корнфельд, Феликс Березин, Лера Боднева, Эдик Белага

Фотографии сделаны Леной Ермаковой, участницей семинара. Подписи Сусанны Каменомостской.

Предварительные сведения

1. Кольца и алгебры. *Кольцом* называется абелева группа A (групповая операция записывается аддитивно, т. е. с помощью символов $+$, $-$) с еще одной операцией — умножением $A \times A \to A$ (записываемым обычно как $(a, b) \mapsto ab$), дистрибутивным относительно сложения (правило раскрытия скобок) и образующим *полугруппу* [1]. Всякому элементу $a \in A$ отвечают гомоморфизмы группы A в себя, действующие либо по формуле $c \mapsto ac$ (левое умножение), либо по формуле $c \mapsto ca$ (правое умножение). Кольцо A называется *ассоциативным* (соответственно *лиевым* или *кольцом Ли* [2]), если для любых его элементов $a, b, c \in A$ выполняются следующие условия (второе из условий в лиевом случае называется *тождеством Якоби*):

$$\begin{aligned} &a(bc) = (ab)c, && \text{если } A \text{ ассоциативно,}\\ &\left.\begin{aligned} &[a, b] = -[b, a],\\ &[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]], \end{aligned}\right\} && \text{если } A \text{ лиево.} \end{aligned}$$

Гомоморфизмом колец $\varphi\colon A \to B$ называется гомоморфизм соответствующих аддитивных групп $\varphi\colon A \to B$, такой что $\varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a')$.

Левым идеалом в A называется всякая подгруппа I, инвариантная относительно левого умножения на любой элемент $a \in A$. *Правый идеал* определяется аналогично. Идеал, одновременно и левый, и правый, называется *двусторонним*. Если I — двусторонний идеал в A, то в факторгруппе A/I можно корректно ввести умножение. Кольцо A/I называется *факторкольцом*. Если I — двусторонний идеал кольца A, то гомоморфизм колец $A \to A/I$, действующий по правилу $a \mapsto a + I$, называется *каноническим*.

---

[1] *Полугруппа* отличается от группы (определение которой предполагается известным) тем, что наличие обратного элемента (противоположного, если запись аддитивна) не предполагается. — *Прим. Д. Л.*

[2] Умножение элементов a и b в кольцах (и алгебрах) Ли часто записывают не ab, а $\{a, b\}$, или как коммутатор двух операторов $[a, b]$, даже если лиево кольцо (или алгебра) абстрактное. Это обозначение — дань главному примеру: обозначим пространство операторов в пространстве V над полем $\mathbb{K}$ символом $\mathrm{End}(V)$; это пространство — ассоциативная алгебра относительно последовательного применения операторов ab, которое и принимается за их произведение; положив $[a, b] := ab - ba$, мы снабжаем $\mathrm{End}(V)$ структурой алгебры Ли, которую для ясности обозначают $\mathfrak{gl}(V)$ и называют *общей линейной алгеброй Ли*. Фиксировав базис в пространстве V, можно отождествить операторы с матрицами, и соответствующее пространство матриц обозначают $\mathrm{Mat}(V)$ или $\mathrm{Mat}(n)$, где $n = \dim V$. Соответственно пишут $\mathfrak{gl}(n)$.

Модулем над кольцом A называется множество M вместе с биаддитивным отображением (которое называют *действием*)

$$\mathrm{act}\colon A \otimes M \longrightarrow M, \quad \mathrm{act}(a, m) := am,$$

таким что для любых $a, b \in A$ и $m \in M$ имеем

$$\begin{aligned} (ab)m &= a(bm), && \text{если кольцо } A \text{ ассоциативно,} \\ [a, b]m &= a(bm) - b(am), && \text{если кольцо } A \text{ лиево.} \end{aligned}$$

Нам встретятся также коммутативные и антикоммутативные кольца, в которых для любых двух элементов выполняется соотношение

$$\begin{aligned} ab &= ba && \text{для коммутативных колец,} \\ ab &= -ba && \text{для антикоммутативных колец.} \end{aligned}$$

Коммутативное и ассоциативное кольцо C, все ненулевые элементы c которого обратимы, т. е. существуют элементы c^{-1}, называется *полем*. Модуль над полем называется *векторным пространством*. Над любым коммутативным и над любым антикоммутативным кольцом A любой односторонний модуль M можно сделать двусторонним, положив

$$am = ma \quad \text{для любых } a \in A,\ m \in M.$$

Коммутативное (и ассоциативное) кольцо A называется *локальным*, если в нем имеется единственный максимальный идеал, который обычно обозначается $\mathfrak{m}$. Факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ является полем.

Кольцо A называется *алгеброй* над полем $\mathbb{K}$ или $\mathbb{K}$-*алгеброй*, если A — одновременно и кольцо, и $\mathbb{K}$-модуль, причем умножение $\mathbb{K} \times A \to A$ дистрибутивно слева и справа относительно сложения в A и

$$k(a_1 a_2) = (ka_1)a_2 \quad \text{для любых } k \in \mathbb{K} \text{ и } a_1,\ a_2 \in A.$$

Гомоморфизмом $\mathbb{K}$-*алгебр* $A \to B$ называется гомоморфизм колец, который является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-модулей.

В этой книге поле $\mathbb{K}$ по умолчанию является множеством $\mathbb{R}$ вещественных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Соответственно, алгебра $\mathfrak{A}$ называется *вещественной* или *комплексной*.

Задать действие $\mathrm{act}\colon \mathfrak{g} \times M \to M$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в модуле M, где $\mathfrak{g}$ и M могут быть определены над разными полями, — это то же самое, что задать гомоморфизм алгебр Ли (т. е. аддитивное, а если $\mathfrak{g}$ и M заданы над одним полем $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ — линейное отображение, переводящее лиево произведение двух элементов в коммутатор их образов) $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$, который называют *представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве M. Часто говорят не «$\mathfrak{g}$-модуль M», а «представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве M» и пишут не $\rho(g)m$, а gm для любых $g \in \mathfrak{g}$ и $m \in M$.

Примеры алгебр. 1) Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с операциями сложения и умножения является, очевидно, вещественной алгеброй. Аналогично множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является комплексной (а также и вещественной) алгеброй.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ и M — произвольные множества. Через $\mathfrak{A}^M$ обозначается совокупность всех (как правило, из заранее оговоренного класса: полиномиальных, гладких, непрерывных, и т. д.) функций на M со значениями в $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ является алгеброй над $\mathbb{K}$, то множество $\mathfrak{A}^M$ тоже является алгеброй над $\mathbb{K}$ с естественными операциями сложения, умножения и умножения на скаляр из $\mathbb{K}$: при любых $f, g \in \mathfrak{A}^M$, $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$ полагаем

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Очевидно, что если алгебра $\mathfrak{A}$ ассоциативна или коммутативна, то тем же свойством обладает алгебра $\mathfrak{A}^M$. Физики называют такие алгебры *алгебрами токов* на M со значениями в $\mathfrak{A}$.

3) Пусть U — область в $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим подалгебру алгебры $\mathbb{K}^U$, состоящую из бесконечно дифференцируемых (синоним: гладких) функций. Эту алгебру обозначим $\mathcal{A}(U)$. Физикам она очень важна, см. [KST*].

4) Всевозможные полиномиальные функции на U образуют подалгебру алгебры $\mathcal{A}(U)$, которую мы обозначим символом $\mathcal{P}(U)$.

5) Рассмотрим $\mathbb{K}^p$ как линейное пространство и обозначим символом $\mathrm{End}(\mathbb{K}^p)$ алгебру (относительно умножения и сумм операторов с коэффициентами из $\mathbb{K}$) всевозможных линейных операторов в $\mathbb{K}^p$. Если в $\mathbb{K}^p$ зафиксирован базис, то алгебру $\mathrm{End}(\mathbb{K}^p)$ можно реализовать матрицами, и эту реализацию мы обозначим $\mathrm{Mat}(\mathbb{K}^p)$ или $\mathrm{Mat}(p; \mathbb{K})$, или кратко $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(p)$ или $\mathrm{Mat}(p)$.

Алгебры из примеров 1), 3), 4) ассоциативны и коммутативны, алгебры из примера 5) ассоциативны; они коммутативны при $p = 1$ и некоммутативны при $p > 1$.

Если в алгебре $\mathfrak{A}$ имеется элемент e, такой что

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{для любого } a \in \mathfrak{A},$$

то такая алгебра называется *алгеброй с единицей*, а элемент e называется *единицей* алгебры. Алгебры в примерах 1), 3), 4), 5) являются алгебрами с единицами. Алгебра $\mathfrak{A}^M$ (пример 2) обладает единицей, если этим свойством обладает алгебра $\mathfrak{A}$: единицей алгебры $\mathfrak{A}^M$ служит функция $e(x) \equiv e$, где e — единица в $\mathfrak{A}$.

Существуют также важные для приложений алгебры без единицы. В частности, алгебры Ли никогда не содержат единицу. (Алгебры Ли не ассоциативны. Существуют, разумеется, и ассоциативные алгебры без единицы, например алгебры треугольных матриц с нулевой диагональю.)

2. Образующие. (Здесь $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — *прим. Д.Л.*) Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра и $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ — некоторое множество ее элементов. Символом $\mathfrak{A}(\Sigma)$ обозначим совокупность всех «многочленов» f от элементов множества Σ:

$$f = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1} \ldots a_{i_k}, \quad a_i \in \Sigma, \quad f_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{K} \tag{1}$$

(сумма конечная, поскольку f — многочлен). Очевидно, что $\mathfrak{A}(\Sigma)$ является подалгеброй в $\mathfrak{A}$. Она называется *подалгеброй, порожденной множеством* Σ. Если $\mathfrak{A}(\Sigma) = \mathfrak{A}$, множество Σ называется (*алгебраической*) *системой образующих* алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра со сходимостью. Множество $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ называется *топологической системой образующих* алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ является замыканием алгебры $\mathfrak{A}(\Sigma)$, т. е. если любой элемент $f \in \mathfrak{A}$ является пределом последовательности элементов алгебры $\mathfrak{A}(\Sigma)$ в некоторой топологии.

В конечномерную алгебру можно ввести сходимость обычным покоординатным образом [1]. Таким образом, конечномерную алгебру всегда можно рассматривать как алгебру со сходимостью.

Отметим следующее важное свойство топологических образующих конечномерной алгебры. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра с покоординатной сходимостью, $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ — система ее топологических образующих. Тогда Σ содержит конечное подмножество, являющееся системой алгебраических образующих алгебры $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ — система топологических образующих алгебры $\mathfrak{A}$ и $f_1, \ldots, f_N$ — базис $\mathfrak{A}$ как линейного пространства. По определению $f_\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f_{\alpha,n}$, где $f_{\alpha,n} \in \mathfrak{A}(\Sigma)$ имеет вид (1). Разложим $f_{\alpha,n}$ по базису из элементов f_α, т. е. $f_{\alpha,n} = \sum\limits_\beta c_{\alpha,\beta}(n) f_\beta$. Соотношение $f_\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f_{\alpha,n}$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_{\alpha,\beta}(n) = \delta_{\alpha,\beta}$. Следовательно, $\det(c_{\alpha\beta}(n_0)) \neq 0$ при достаточно большом n_0. В свою очередь, это означает, что элементы f_{α,n_0}, подобно элементам f_α, образуют базис алгебры $\mathfrak{A}$ как линейного пространства. Запишем элемент f_{α,n_0} в виде (1) и отметим элементы $a_i^{(\alpha)} \in \Sigma$, через которые он выражается. Их число конечно при любом α. Объединение элементов $a_i^{(\alpha)}$ при всех i и α обозначим Σ_1. Множество $\Sigma_1 \subset \Sigma$ конечно и служит, очевидно, системой алгебраических образующих алгебры $\mathfrak{A}$: каждый элемент $f \in \mathfrak{A}$ является линейной комбинацией элементов f_{α,n_0} и, тем самым, полиномом от $a_i^{(\alpha)}$.

---

[1] Пусть L — конечномерное линейное пространство, $\{e_i\}$ — базис в L. Последовательность векторов $f_n = \sum a_i(n) e_i$ называется *сходящейся покоординатно* к вектору $f = \sum a_i e_i$, если $a_i = \lim\limits_{n\to\infty} a_i(n)$ при всех i. Несмотря на то что в определении сходимости фигурирует базис e_i, фактически от выбора базиса она не зависит: если $e_i = \sum\limits_k c_{ik} \varepsilon_k$, где ε_k — элементы другого базиса, то $f_n = \sum\limits_i b_i(n) \varepsilon_i$, $f = \sum\limits_i b_i \varepsilon_i$, где $b_i(n) = \sum\limits_k a_k(n) c_{ki}$, $b_i = \sum\limits_k a_k c_{ki}$ и $b_i = \lim\limits_{n\to\infty} b_i(n)$.

Пример, иллюстрирующий разницу между топологическими и алгебраическими образующими для бесконечномерной алгебры. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}(U)$ гладких функций на $U \subset \mathbb{R}^p$. Определим в ней сходимость, считая, что $f_n \to f$, если функции f_n сходятся к f равномерно на любом компакте $V \subset U$ и все частные производные функции f_n тоже равномерно на любом компакте $V \subset U$ сходятся к соответствующим частным производным функции f. Алгебра многочленов $\mathcal{P}(U)$ является алгеброй с p алгебраическими образующими, в качестве которых можно взять декартовы координаты x_i в области U. Алгебра $\mathcal{P}(U)$ плотна в $\mathcal{A}(U)$ в смысле этой сходимости; тем самым, координаты x_i служат топологическими образующими алгебры $\mathcal{A}(U)$.

Можно показать, что в $\mathcal{A}(U)$ не существует конечной системы алгебраических образующих.

3. Пучки[1]**.** Мы предполагаем у читателя знакомство с определениями (только с определениями!) категории и функтора, включая следующие примеры категорий:

1) категория открытых подмножеств данного топологического пространства, где морфизмами являются включения $U \subset V$;

2) категория множеств и их отображений;

3) категория абелевых (т. е. коммутативных) групп;

4) категория векторных пространств над полем $\mathbb{K}$;

5) категория колец и категория алгебр над полем $\mathbb{K}$.

Имеется два определения пучка: пучок как предпучок, удовлетворяющий дополнительным аксиомам, и пучок как расслоенное пространство.

Определение предпучка. Пусть задано топологическое пространство X и некоторая категория C (можно считать, что это одна из категорий 3), 4) или 5)). *Предпучок* на X со значениями в C есть *контравариантный функтор F, действующий из категории открытых подмножеств пространства X в категорию C*. (Научные слова, которые я выделил наклонным шрифтом, означают, говоря по-просту, следующее. — *Прим. Д. Л.*) Предпучок задан, если

I) задан объект $F(U)$ категории C для всякого открытого $U \subset X$;

II) задан морфизм $\rho_V^U \colon F(U) \to F(V)$ для всякой пары $V \subset U$ открытых подмножеств в X; при этом должны выполняться следующие «естественные» условия:

IIa) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{F(U)}$ (тождественный морфизм);

[1] Для первого знакомства с пучками лучше книги [МаАГ*] ничего нет. Дальнейшие подробности можно найти в книгах Р. Годемана «Алгебраическая топология и теория пучков» (М.: ИЛ, 1961) или М. Касивара, П. Шапира «Пучки на многообразиях» (пер. с англ. и фр. М.: Мир, 1997) и в книге С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина «Методы гомологической алгебры. Введение в когомологии и производные категории. Т. 1» (М.: Наука, 1988). — *Прим. Д. Л.*

IIб) $\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$ для любых открытых множеств $W \subset V \subset U \subset X$.

Если на одном пространстве X заданы предпучки F и G со значениями в C, то *морфизмом предпучков* $m\colon F \to G$ называется совокупность морфизмов $m(U)\colon F(U) \to G(U)$, такая что $\rho^U_V \circ m(U) = m(V) \circ \rho^U_V$ для всякой пары $V \subset U$.

Аксиомы пучка [1]**.** Предпучок называется *пучком*, если он удовлетворяет следующим дополнительным требованиям: пусть $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α — открытые подмножества в X (мощность множества индексов I произвольна). Тогда

IIIа) если $\rho^U_{U_\alpha} f = \rho^U_{U_\alpha} g$ для всякого индекса $\alpha \in I$, то элементы $f,\ g \in F(U)$ совпадают;

IIIб) если для всякого α задан элемент $f_\alpha \in F(U_\alpha)$, так что выполнено условие «согласованности»

$$\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta} f_\alpha = \rho^{U_\beta}_{U_\beta \cap U_\alpha} f_\beta \quad \text{для любых } \alpha, \beta \in A,$$

то существует элемент $f \in F(U)$, такой что $\rho^U_{U_\alpha} f = f_\alpha$ при всех α.

На интуитивном уровне эти аксиомы означают, что элементы $f \in F(U)$ определяются своими «ограничениями» на областях сколь угодно мелкого покрытия области U. Это ощущение приобретает точный смысл при обращении ко второму (эквивалентному) определению пучка.

Пучок как расслоение. Под *расслоением с базой* X мы понимаем тройку $p\colon E \to X$, где E и X — топологические пространства, а p — непрерывное отображение.

А) *Конструкция расслоения по предпучку* F. Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим несвязное объединение $\coprod\limits_{U \ni x} F(U)$ объектов категории C по всем открытым множествам $U \ni x$. Введем в нем отношение эквивалентности $\sim$, полагая, что $a \sim b$, где $a \in F(U)$, $b \in F(V)$, если существует окрестность $W \subset U \cap V$ точки x, такая что $\rho^U_W a = \rho^V_W b$. Указанное объединение разбивается на классы эквивалентности. Совокупность этих классов (т. е. фактормножество) обозначим символом E_x. Положим $E = \bigcup E_x$, где $p(E_x) = x$. Тем самым, отображение p определено, причем E_x есть его слой над точкой x. Множество E_x называется *слоем пучка* F и может обозначаться также символом F_x.

Введем топологию в E. Выберем произвольно $x \in X$ и элемент $e \in E_x$ и зададим некоторую совокупность множеств, содержащих e, которая будет служить базой окрестностей точки e в искомой топологии. Выберем некоторого представителя $a \in F(U)$ класса смежности, состоящего из элементов множеств $F(U)$, где $U \ni x$. Класс элемента a называется *ростком*

[1] Здесь и далее мы предполагаем, что C есть подкатегория категории множеств.

в точке x. Объединение этих ростков, содержащее исходный элемент e, есть по определению множество из указанной базы окрестностей. Легко проверить, что p является локальным гомеоморфизмом.

Заметим, что если F — предпучок со значениями в категориях 3), 4) или 5), то множество E_x имеет структуру группы, соответственно векторного пространства или кольца (называемую *индуктивным пределом* групп, пространств или колец $F(U)$ *по фильтру окрестностей* точки x).

Б) *Конструкция пучка по расслоению. Сечением* расслоения $p\colon E \to X$ над открытым подмножеством $U \subset X$ называется любое отображение $s\colon U \to E$, такое что $ps = \mathrm{id}_U$. Символом $\Gamma(U, E)$ обозначим множество всех непрерывных сечений над U. Всякое сечение при ограничении на открытое подмножество $V \subset U$ остается, очевидно, непрерывным сечением. Поэтому определено отображение множеств $\rho_V^U\colon \Gamma(U, E) \to \Gamma(V, E)$. Легко видеть, что совокупность множеств $\Gamma(U, E)$ и отображений ρ_V^U является предпучком и удовлетворяет аксиомам III, поскольку «локальность» элементов из $\Gamma(U, E)$ задана с самого начала. Таким образом, мы получаем пучок $U \mapsto \Gamma(U, E)$ со значениями в категории множеств. Он называется *пучком* (*ростков*) *сечений* расслоения (E, p).

Если каждый слой E_x заданного расслоения имеет структуру группы и групповые операции непрерывны в топологии пространства E, т. е. переводят непрерывные сечения в непрерывные, то пучок называется *пучком групп*. Аналогично определяют *пучки векторных пространств*, *пучки колец и пучки модулей над пучками колец*.

В) *Конструкция пучка по предпучку F.* Применим к F конструкцию А, а к полученному пространству (E, p) — конструкцию Б. В результате мы получим пучок $\tilde{F}$. Он называется *пучком*, *построенным по предпучку F*. Для всякого открытого множества $U \subset X$ имеется каноническое отображение множеств $\varphi(U)\colon F(U) \to \tilde{F}(U)$, преобразующее элемент $a \in F(U)$ в сечение над U, значение которого в точке x равно ростку элемента a в этой точке. Непрерывность такого сечения следует из определения топологии в E. Указанные отображения складываются в отображение предпучков, поскольку для всякой пары $V \subset U$ имеем $\tilde{\rho}_V^U \circ \varphi(U) = \varphi(V) \circ \rho_V^U$, где $\tilde{\rho}_V^U$ — отображение ограничения сечений. Конструкцию В можно описать так: для всякого $U \subset X$ множество $F(U)$ сначала расширим так, чтобы удовлетворить аксиоме IIIб), а затем в расширенном множестве проведем факторизацию, с тем чтобы добиться выполнения аксиомы IIIа). Если F — пучок, то отображения $\varphi(U)$ суть изоморфизмы, следовательно, предпучки F и $\tilde{F}$ изоморфны. Это и означает эквивалентность двух определений пучка.

Если F — произвольный предпучок со значениями в категориях 3), 4) или 5), то согласно приведенным выше замечаниям $\tilde{F}$ также принимает

значения в этих категориях, а $\varphi(U)$ — морфизмы соответственно групп, векторных пространств и колец.

Пусть F и G — пучки на X. Под *морфизмом* $m\colon F \to G$ понимается морфизм соответствующих предпучков. Если в слоях этих пространств имеется дополнительная структура, то m должно быть послойным гомоморфизмом этих структур.

Если F — пучок на X со значениями в категории коммутативных групп, а G — подпучок пучка F, т. е. $G(U)$ есть подгруппа группы $F(U)$ для всякого $U \subset X$, причем $\rho_V^U(G(U)) \subset G(V)$ для всякой пары $V \subset U$, то факторгруппы $F(U)/G(U)$ образуют предпучок, поскольку отображения ρ_V^U порождают гомоморфизмы факторгрупп $F(U)/G(U) \to F(V)/G(V)$. Этот предпучок, вообще говоря, не является пучком. Построенный по нему пучок $\widetilde{F/G}$ называется *факторпучком*; ниже мы часто пишем просто F/G.

Пусть $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение топологических пространств, а F — пучок на X. Образуем расслоенное пространство $p\colon E \to X$ с помощью конструкции А. Рассмотрим расслоенное произведение с топологией, индуцированной топологией прямого произведения:

$$Y \times_X E := \{(y,\, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\}.$$

Пусть $q\colon Y \times_X E \to Y$ есть ограничение проекции пространства $Y \times E$ на первый сомножитель. Легко видеть, что q есть локальный гомеоморфизм, т. е. задает пучок на Y. Он называется *обратным образом пучка* F при отображении f и обозначается $f^*(F)$. Если Y — открытое подмножество в X, а $f\colon Y \to X$ — тождественное вложение, то пучок $f^*(F)$ называется *ограничением пучка* F на Y и обозначается $F|_Y$. Слой пучка $F|_Y$ в точке $x \in Y$ можно отождествить со слоем пучка F в той же точке. Обратный образ сохраняет структуры пучка групп, векторных пространств или колец.

4. Окольцованные пространства. *Окольцованное пространство* есть пара — топологическое пространство X вместе с пучком колец $\mathcal{O}_X$ на X. Пространство X называется *подстилающим*, а пучок $\mathcal{O}_X$ — *структурным пучком* окольцованного пространства $(X, \mathcal{O}_X)$. *Морфизмом окольцованных пространств* $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ объявляется пара (f, φ), состоящая из непрерывного отображения подстилающих пространств $f\colon X \to Y$ и отображения пучков колец $\varphi\colon f^*(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$. (Заметим, что отображение пучков направлено в противоположную сторону, т. е. от Y к X, что есть проявление общей двойственности между пространствами и соответствующими пучками.) По определению слой пучка $f^*(\mathcal{O}_Y)$ над точкой x изоморфен слою пучка $\mathcal{O}_Y$ над $f(x)$. Таким образом, для всякого $x \in X$ имеется гомоморфизм колец

$$\varphi_x\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}. \tag{2}$$

Обратно, если вместе с f задана совокупность гомоморфизмов (2), то определено отображение окольцованных пространств при условии, что семейство (2) непрерывно в следующем смысле. Пусть E_X и E_Y — расслоенные пространства, отвечающие пучкам $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$, и $\Phi\colon E_Y \times_Y X \to E_X$ — отображение, которое в слоях над точкой $x \in X$ действует по формуле (2). Это отображение должно быть непрерывно ($E_Y \times_Y X$ наделено топологией, наведенной из $E_Y \times X$). Это условие можно выразить иначе: для всякого открытого множества $V \subset Y$ и сечения $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ совокупность гомоморфизмов (2) преобразует s в сечение $\mathcal{O}_X$ над $f^{-1}(V)$.

Открытым подпространством окольцованного пространства $(X, \mathcal{O})$ называется любое открытое подмножество $Y \subset X$, снабженное пучком $\mathcal{O}|_Y$. С таким подпространством связано отображение $(f, \varphi)\colon (Y, \mathcal{O}|_Y) \to (X, \mathcal{O})$, где f есть вложение, а $\varphi\colon f^*(\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}_Y$ — тождественный изоморфизм.

Пучком идеалов $\mathcal{I}$ в структурном пучке $\mathcal{O}$ окольцованного пространства называется подпучок пучка $\mathcal{O}$, такой что для всякого открытого подмножества $U \subset X$ множество $\mathcal{I}(U)$ есть идеал в кольце $\mathcal{O}(U)$. Иначе говоря, для всякой точки $x \in X$ слой $\mathcal{I}_x$ пучка $\mathcal{I}$ есть идеал в слое $\mathcal{O}_x$ структурного пучка и подмножество $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ открыто. *Множеством корней* пучка идеалов $\mathcal{I}$ назовем совокупность $Z(\mathcal{I})$ точек $x \in X$, таких что $\mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_x$. Таким образом, $Z(\mathcal{I})$ есть множество точек, в которых слой факторпучка $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ есть ненулевое кольцо.

Предположим, что пучок $\mathcal{O}$ коммутативных колец *унитальный*, т. е. для всякого открытого $U \subset X$ кольцо $\mathcal{O}(U)$ содержит единицу. Нетрудно показать, что в этом случае множество $Z(\mathcal{I})$ замкнуто. Множество $Z(\mathcal{I})$, наделенное топологией, наведенной из X, и снабженное пучком колец $\mathcal{O}/\mathcal{I}$, называется *замкнутым подпространством* окольцованного пространства $(X, \mathcal{O})$. С $Z(\mathcal{I})$ канонически связано отображение окольцованных пространств $(Z(\mathcal{I}), \mathcal{O}/\mathcal{I}) \to (X, \mathcal{O})$, состоящее из вложения $Z(\mathcal{I}) \subset X$ и отображения, порожденного естественными гомоморфизмами колец

$$\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathcal{I}_x \cong (\mathcal{O}/\mathcal{I})_x, \quad x \in Z(\mathcal{I}). \tag{3}$$

Вообще же *подпространством окольцованного пространства* назовем всякое замкнутое подпространство его открытого подпространства.

Окольцованные пространства, включая и супермногообразия, изучаемые в различных геометрических теориях, относятся к классу локальных пространств, определение которых мы сейчас дадим. Пусть фиксировано поле $\mathbb{K}$ (в этой книге это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Топологическое пространство X, снабженное пучком $\mathbb{K}$-алгебр $\mathcal{O}$, назовем $\mathbb{K}$-*окольцованным пространством*. Таким образом, для всякого открытого множества $U \subset X$ множество $\mathcal{O}(U)$ есть $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, а для любой пары $V \subset U$ открытых множеств морфизм ограничения $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ есть гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр. Предположим, что для всякой точки $x \in X$ фиксирован гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр

$r_x\colon \mathcal{O}_x \to \mathbb{K}$ (*значение в точке*). Его ядро есть максимальный идеал в $\mathcal{O}_x$, он обозначается $\mathfrak{m}_x$. Данное окольцованное пространство называется *локальным*, если каждая алгебра $\mathcal{O}_x$ локальна, т. е. $\mathfrak{m}_x$ есть единственный максимальный идеал в $\mathcal{O}_x$.

Морфизмом $\mathbb{K}$-окольцованных пространств называется отображение окольцованных пространств (f, φ), подчиненное дополнительному условию: для всякой точки x отображение (2) есть гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр. Отсюда легко вывести, что $\varphi_x^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.

Как мы увидим ниже, элементы кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ нельзя отождествить, вообще говоря, с ростками функций, так как это кольцо может иметь нильпотенты. В таких случаях отображение φ не определяется однозначно по подстилающему отображению.

Опишем ряд конкретных категорий окольцованных пространств, начиная с хорошо известной категории гладких многообразий и кончая категориями супермногообразий. Пусть фиксирована некоторая категория $\mathbb{K}$-окольцованных пространств, подчиненная единственному условию: вместе с пространством она содержит любое его открытое подпространство. Объекты и морфизмы этой категории будем называть *модельными*.

Если фиксирована категория $\mathcal{M}$ модельных пространств, то *категорией $\mathbb{K}$-окольцованных пространств типа $\mathcal{M}$* называется совокупность $\mathbb{K}$-окольцованных пространств $(X, \mathcal{O})$ и их морфизмов, удовлетворяющих следующим условиям.

I. Всякая точка $x \in X$ обладает окрестностью U, такой что имеется изоморфизм $\mathbb{K}$-окольцованных пространств

$$(f, \varphi)\colon (U, \mathcal{O}|_U) \xrightarrow{\sim} (M, \mathcal{O}_M),$$

где $(M, \mathcal{O}_M)$ — некоторое модельное пространство. Этот изоморфизм называется *картой* на X.

II. Пусть имеется еще одна карта $(g, \psi)\colon (V, \mathcal{O}|_V) \to (N, \mathcal{O}_N)$, причем ее область задания V пересекается с U. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & (U \cap V,\ \mathcal{O}|_{U\cup V}) & \\ {\scriptstyle\sim}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\sim} \\ (M',\ \mathcal{O}_M|_{M'}) & \xrightarrow{(h,\chi)} & (N',\ \mathcal{O}_N|_{N'}) \end{array}$$

где $M' = f(U \cap V)$, $N' = g(U \cap V)$, косые стрелки суть ограничения карт, а морфизм (h, χ) находится однозначно из условия коммутативности. Требуется, чтобы этот морфизм был модельным, т. е. принадлежал категории $\mathcal{M}$. Он называется *склейкой карт*.

Отображение $(F, \Phi)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ окольцованных пространств типа $\mathcal{M}$ назовем *морфизмом типа* $\mathcal{M}$, если любое его изображение с по-

мощью карт на X и Y является модельным. Пусть (f, φ) — карта на $U \subset X$, а (g, ψ) — карта с областью задания $V \subset Y$. Под изображением отображения (F, Φ) в этих картах мы понимаем морфизм (a, α) в следующей диаграмме, который определяется из условия ее коммутативности:

$$\begin{array}{ccc} (U,\ \mathcal{O}_X|_U) & \xrightarrow{(F,\Phi)|_U} & (V,\ \mathcal{O}_Y|_V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f,\varphi)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (g,\psi)} \\ (M,\ \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{(a,\alpha)} & (N,\ \mathcal{O}_N) \end{array}$$

Мы предполагаем, что $F(U) \subset V$; в противном случае следует ограничить карту (f, φ) на $U' = U \cap F^{-1}(V)$.

Легко понять, что пространства и морфизмы типа $\mathcal{M}$ образуют категорию, т. е. при композиции тип сохраняется. Очевидно также, что любое открытое подпространство пространства типа $\mathcal{M}$ имеет тот же тип. Для замкнутых подпространств это не так.

Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Скажем, что пучок $\mathcal{L}$ на X *имеет структуру* $\mathcal{O}_X$*-модуля*, если для всякой точки $x \in X$ слой $\mathcal{L}_x$ этого пучка имеет структуру $\mathcal{O}_{X,x}$-модуля (левого или правого). При этом требуется, чтобы действие колец $\mathcal{O}_{X,x}$ на $\mathcal{L}_x$ было непрерывным.

Естественным образом вводится понятие *отображения* $\mathcal{O}_X$*-модулей*, *изоморфизма*, *прямой суммы* и т. д. Напомним, что $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{L}$ называется *локально свободным*, если для любой точки $x \in X$ имеются окрестность W и целое неотрицательное число k, такие что существует изоморфизм $\mathcal{O}_X|_W$-модулей $\mathcal{L}|_W \cong \mathcal{O}_X^k|_W$. Число k называется *рангом* модуля $\mathcal{L}$ в точке x.

5. Примеры, приводящие к известным геометрическим теориям.

1) На $\mathbb{R}^n$ рассмотрим пучок $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$, значение которого на открытом подмножестве U есть $\mathbb{R}$-алгебра всех $\mathbb{R}$-значных гладких функций в U. Отображения ограничения действуют очевидным образом. Элементы слоя $\mathcal{E}_x$ называются *ростками* гладких функций в точке x. Пара $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n)$ есть локальное $\mathbb{R}$-пространство, причем «вычет» $r_x\colon \mathcal{E}_x \to \mathbb{R}$ переводит росток гладкой функции в ее значение в точке x. Рассмотрим категорию $\mathcal{M}_1$, объектами которой являются открытые подпространства $\mathbb{R}$-окольцованных пространств $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а морфизмами — пары (f, φ): $(U, \mathcal{E}_n|_U) \to (V, \mathcal{E}_m|_V)$, в которых подстилающее отображение $f\colon U \to V$ бесконечно дифференцируемо как отображение подмножеств координатных пространств. Отображение $\varphi\colon f^*(\mathcal{E}_m) \to \mathcal{E}_n|_U$ находится однозначно, это *подстановка*:

$$\varphi\colon b \mapsto a = b(f(\cdot)). \tag{4}$$