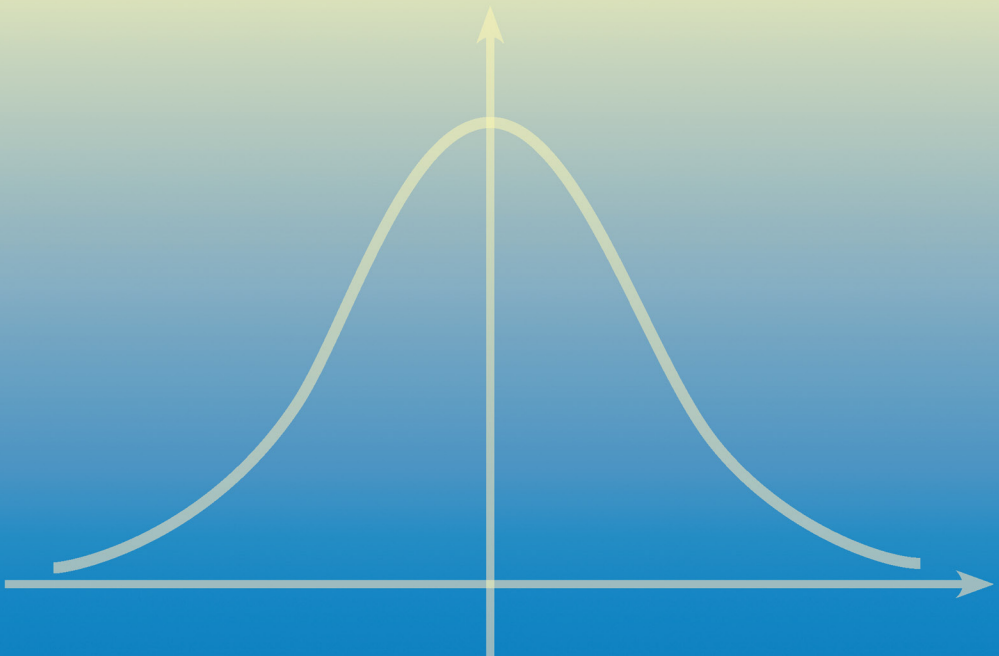
А.Ю. Иваницкий

ТЕОРИЯ РИСКА В СТРАХОВАНИИ



УДК 519.2+336.7
ББК 22.17+22.18я73
И19

Иваницкий А. Ю.
Теория риска в страховании
М.: МЦНМО, 2014
134 с.
ISBN 978-5-4439-2091-7

В книге излагаются основы моделирования рисков в страховании с минимальным использованием аппарата теории вероятностей и математической статистики. Рассмотрены основные элементы структурной модели — число страховых событий, размер индивидуальной претензии, совокупная сумма претензий. Подробно анализируются различные способы нахождения функций распределения изучаемых случайных величин — аналитические, табличные и методы, основанные на аппроксимации и имитационном моделировании. Изучаются задачи качественной и количественной оценки и оптимизации моделей страхования.

Во втором издании исправлены замеченные опечатки и добавлены примеры решения упражнений, что может облегчить усвоение материала.

Для студентов математических и экономических специальностей, а также для практических специалистов в области страхования и финансового анализа.

Подготовлено на основе книги: *А. Ю. Иваницкий.* Теория риска в страховании. — 2-е изд, испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-74-83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2091-7

© А. Ю. Иваницкий, 2007, 2013.
© МЦНМО, 2014.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **5**

Глава 1. Модели числа страховых событий **9**

§ 1. Основные числовые характеристики случайных величин 9

§ 2. Биномиальная и пуассоновская модели 15

§ 3. Смешанные распределения 20

Примеры упражнений с решениями 27

Упражнения 28

Глава 2. Модели размера страховых претензий **35**

§ 1. Составная модель совокупной суммы претензий . . 35

§ 2. Распределение величины претензий 43

§ 3. Перестрахование 53

Примеры упражнений с решениями 59

Упражнения 62

Глава 3. Моделирование функции распределения суммарного риска **71**

§ 1. Рекуррентная формула для функции распределения 71

§ 2. Аппроксимация функции распределения 76

§ 3. Моделирование распределений 78

§ 4. Имитационное моделирование составных переменных 83

Примеры упражнений с решениями 88

Упражнения 92

Глава 4. Оценка и оптимизация моделей риска **103**
§ 1. Оценка рискового капитала 103
§ 2. Оценка достоверности модели 111
§ 3. Оптимальные условия перестрахования 118
§ 4. Понятия полезности и выгоды 124
Примеры упражнений с решениями 127
Упражнения 128
Предметный указатель **131**
Список литературы **133**

ВВЕДЕНИЕ

Страхование, как вид деятельности, возникло из потребности заменить неопределенность риска возможного ущерба некоторой фиксированной выплатой с условием передачи ответственности за покрытие этого ущерба. При этом требовалось рассчитать разумный размер этой выплаты. Актуарная математика — наука о методах расчета и прогнозирования финансовых потоков с учетом риска, имеет длительную историю. В начале XX века актуарные расчеты, т.е. принципы и методы расчета риска, активно применялись в России. Затем, при плановой экономике, теория риска не была широко востребована. С переходом к рыночной экономике и развитием страховых и банковских услуг возникла потребность теоретической разработки и практического применения методов расчета и прогнозирования риска к конкретным областям страхования, пенсионного и социального обеспечения, банковской и инвестиционной деятельности.

Страховой договор устанавливает определенные права и обязанности договаривающихся сторон. Страхователь уплачивает страховые премии, единовременно или периодически, в определенные сроки, а страховщик обязуется возместить сумму ущерба при наступлении определенного события — страхового случая, в простейшей ситуации — всю сумму возникшего ущерба.

В личном страховании принимают участие и другие стороны, например застрахованный — лицо, в пользу которого заключен договор страхования. Объектом страхования являются: в личном страховании — жизнь, здоровье, трудоспособность граждан; в имущественном страховании — здания, сооружения, транспортные средства, фрахт, коллекции, домашнее имущество, перевози-

мые грузы и другие материальные ценности; гражданская ответственность физического или юридического лица за материальный ущерб (вред), причиненный своими действиями (бездействием) третьим лицам.

Страховой случай — фактически наступившее событие, влекущее обязанность страховщика произвести выплату страхователю или застрахованному лицу или третьим лицам. В имущественном страховании такими событиями могут быть стихийное бедствие, несчастные случаи, вызвавшие повреждение имущества. В личном страховании — это достижение лицом определенного возраста, утрата им трудоспособности, здоровья в результате несчастного случая.

Посредством страховой оценки определяется сумма, на которую застрахован объект и в пределах которой страховщик обязан нести ответственность. Она служит не только оценкой риска, которому подвергается страховщик, но и для определения взносов страхователей.

При актуарных расчетах важную роль играет учет и математическая обработка статистических данных о характеристиках риска, подлежащего страхованию. В личном страховании речь идет о расчете таблиц смертности населения в разрезе различных признаков — возраст, пол, место проживания, профессиональная принадлежность и т. д. В социальном страховании дополнительно требуется исследовать статистические данные о заболеваемости и потере трудоспособности в разрезе ожидаемых причин, сроков заболевания, категорий трудящихся и т. д.

Есть два подхода к построению актуарных моделей. При первом расчет проводится на основе вероятностной модели характеристик индивидуального страхового, пенсионного или финансового контракта, при втором — разрабатывается модель портфеля контрактов, заключенных данным страховщиком, пенсионным фондом, банком или инвестиционной компанией.

Важной составляющей моделирования любого бизнеса в сфере страхования является расчет оптимальной структуры инвестиций. Необходимо добиваться максимальной прибыльности, учитывая при этом возникающие инвестиционные риски и выполняя

нормативы по сбалансированности размещения инвестиций по соотношению доходности и риска.

Из взаимодействия с менеджментом страховых компаний выяснилось, что, по их мнению, основным для молодого специалиста-актуария является не заучивание конкретных формул и методик расчета, а общее понимание процессов страхования и умение самостоятельно строить модели для новых задач страхования, постоянно возникающих в бурно развивающейся экономике. Поэтому в книге не ставится задача строгого и детального изложения теории риска в страховании (см. [1]–[6], [10]–[12], [17], [18]), а упор сделан в основном на практические аспекты применения и оптимизации существующих моделей. В связи с этим многие доказательства математических утверждений вынесены в конец соответствующих глав в виде упражнений. К сожалению, в отечественной литературе практические вопросы внедрения теоретических моделей очень скудно освещены, что объяснимо, в виду краткости истории современной переходной экономики в России. В то же время, в зарубежной литературе имеется большое количество публикаций, отражающих, помимо описания точных математических моделей, общие принципы и подходы моделирования. Примеры таких исследований приведены в [16]–[18]. Автор настоящей книги в основном придерживался подхода в изложении материала, принятого в [1], [16]. Основные сведения из теории вероятностей и математической статистики опираются на работы [7]–[9], [14], [15]. Для подкрепления теоретических подходов и для овладения излагаемыми методами в конце каждой главы приведено большое количество практических упражнений, некоторые из которых снабжены решениями. Среди них есть задачи теоретического характера, простые задачи на применение формул, а также задачи, возникшие из изучения реальных ситуаций страхового бизнеса. Оригинальные задачи дополнены большим количеством упражнений и задач из [13], [16]. Продвинутые разделы теории риска (например, стохастические процессы) не включены, что делает материал более доступным. В то же время значительная часть упражнений оставлена для самостоятельного решения. При затруднении в этом читатель может

обратиться к методически тщательно проработанной книге [13], посвященной решению задач подобного рода.

В книге излагаются основы моделирования рисков в страховании с минимальным использованием аппарата теории вероятностей и математической статистики. Рассмотрены основные элементы структурной модели — число страховых событий, размер индивидуальной претензии, совокупная сумма претензий. Подробно анализируются различные способы нахождения функций распределения изучаемых случайных величин — аналитические, табличные и методы, основанные на аппроксимации и имитационном моделировании. Изучаются задачи качественной и количественной оценки и оптимизации моделей страхования.

В работе приняты следующие обозначения разделов, формул и таблиц. Главы состоят из параграфов, которые, в свою очередь, состоят из нескольких пунктов. Пункты в каждом параграфе нумеруются последовательно. Примеры ссылок: п. 3.1.2 означает пункт 2 параграфа 1 главы 3; (2.23) — формула 23 главы 2; таблица 1.1 — первая таблица главы 1. Заголовки параграфов, пунктов и таблиц, в отличие от формул, не содержат номера главы (и параграфа — для пунктов). Номера текущих главы и параграфа можно найти в колонтитулах на каждом развороте.

ГЛАВА 1

МОДЕЛИ ЧИСЛА СТРАХОВЫХ СОБЫТИЙ

§ 1. Основные числовые характеристики случайных величин

1. Если через $F(X)$ обозначить вероятность того, что $\mathbf{X}$ принимает значение, меньшее или равное X, то *распределение вероятности случайной величины* $\mathbf{X}$ можно задать ее интегральной функцией распределения F,

$$F(X) = P(\mathbf{X} \leqslant X), \quad -\infty < X < \infty, \tag{1.1}$$

где случайная величина обозначается полужирной буквой $\mathbf{X}$, в отличие от значения X, принимаемого этой величиной.

Случайная величина $\mathbf{X}$ с дискретным распределением имеет конечное или счетное число значений $X_1, X_2, \ldots$, характеризуемых вероятностями их реализации $p_1, p_2, \ldots$. Такой моделью может описываться, например, количество претензий об ущербе, заявляемых страхователями.

Функция распределения F непрерывно распределенной случайной величины обычно является непрерывной функцией и имеет производную $f(X) = F'(X)$, которая называется *плотностью*. Непрерывное распределение часто применяется для моделирования размера ущерба, если он может принимать любое значение в широком диапазоне.

Смешанная функция распределения F является комбинацией дискретного и непрерывного распределений, будучи непрерывной

и дифференцируемой всюду, кроме принадлежащих конечному или счетному множеству особых точек $X_1, X_2, \ldots$, которым соответствуют вероятности $p_1, p_2, \ldots$, вызывающие скачки функции распределения в этих точках. Функции распределения такого типа обычно возникают при моделировании договоров перестрахования риска, когда страховщик оплачивает сам сумму ущерба, не превышающую некоторого фиксированного предела, а всё превышение оплачивает другой страховщик, получивший в обмен некоторую страховую премию по договору перестрахования. Функция распределения смешанного типа также возникает, например, в контрактах социального страхования, когда страховой полис предусматривает выплату фиксированных сумм в случае смерти или постоянной нетрудоспособности и оплату фактической стоимости лечения.

Выражение для смешанной функции распределения от X записывается как

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(X)\, dX + \sum_{X_i \leqslant X} p_i \tag{1.2}$$

В случае непрерывной функции, второе слагаемое равно нулю, в случае дискретной функции первое слагаемое отсутствует, а в случае смешанной функции используются оба слагаемых.

Применение интеграла Стилтьеса дает единообразную запись этого соотношения

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} dF(X) \tag{1.3}$$

применимую во всех трех случаях.

Среднюю величину или *математическое ожидание* $M(\mathbf{X})$ переменной $\mathbf{X}$ можно определить по формуле:

$$M(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} X dF(X). \tag{1.4}$$

Аналогичная формула для среднего значения $M(g(\mathbf{X}))$, где g — любая вещественнозначная функция, имеет вид

$$M(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)dF(X). \tag{1.5}$$

Дисперсия $D(\mathbf{X})$ переменной $\mathbf{X}$ определяется формулой:

$$D(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - M(g(\mathbf{X})))^2 dF(X). \tag{1.6}$$

2. *Начальные моменты* α_j случайной величины $\mathbf{X}$ определяются формулой

$$\alpha_j = M(\mathbf{X}^j) = \int_{-\infty}^{\infty} X^j dF(X), j = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Производящей функцией моментов M случайной величины $\mathbf{X}$ называется функция параметра s

$$M(s) = M\left(e^{s\mathbf{X}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sX} dF(X). \tag{1.8}$$

Производящая функция моментов имеет следующие важные свойства.

Начальный момент α_j равен j-ой производной от $M(s)$, вычисленной в начале координат $s = 0$, т. е.

$$\alpha_j = M^{(j)}(0). \tag{1.9}$$

Когда необходимо указать, какая из случайных величин имеется в виду, используется обозначение $\alpha_j(\mathbf{X})$.

Моменты также можно найти, как коэффициенты в разложении в ряд Тейлора производящей функции моментов

$$M(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \frac{s^j}{j!}. \tag{1.10}$$

Распределение вероятности случайной величины однозначно определяется производящей функцией моментов $M(s)$.

Если M_1 и M_2 являются производящими функциями моментов независимых случайных величин $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$, то производящая функция моментов M суммы $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ равна произведению M_1 и M_2

$$M(s) = M_1(s) \cdot M_2(s). \tag{1.11}$$

Линейное преобразование $\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$ случайной величины X приводит к следующему преобразованию производящей функции моментов

$$M_{\mathbf{Y}}(s) = e^{bs} M_{\mathbf{X}}(as), \tag{1.12}$$

где нижние индексы описывают случайные величины $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ соответственно.

Случайные величины можно также характеризовать с помощью *центральных моментов* $\mu_j = M((\mathbf{X} - M(\mathbf{X}))^j)$, которые менее удобны в вычислениях.

3. Другой важной характеристикой случайных величин является *производящая функция семиинвариантов* ψ от $\mathbf{X}$, определяемая как натуральный логарифм производящей функции моментов $M_{\mathbf{X}}$.

$$\psi(s) = \ln M_{\mathbf{X}}(s). \tag{1.13}$$

Семиинвариант k_j от $\mathbf{X}$ равен j-ой производной от ψ, вычисленной в начале координат,

$$k_j = k_j(\mathbf{X}) = \psi^{(j)}(0), j = 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

Если ψ_1 и ψ_2 являются производящими функциями семиинвариантов независимых случайных величин $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$, то производящая функция семиинвариантов ψ суммы $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ получается логарифмированием в соотношении (1.11)

$$\psi(s) = \psi_1(s) + \psi_2(s), \tag{1.15}$$

что означает аддитивность семиинвариантов для независимых величин, т. е. если $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ независимы, то

$$k_j(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = k_j(\mathbf{X}_1) + k_j(\mathbf{X}_2), \tag{1.16}$$

как непосредственно следует из (1.14) и (1.15).

Распределение вероятности случайной величины также однозначно определяется по производящей функции семиинвариантов.

Семиинварианты k_j могут быть выражены через моменты α_j и наоборот. Например,

$$\begin{aligned} &k_1 = \alpha_1, && k_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2{\alpha_1}^3, \\ &k_2 = \alpha_2 - {\alpha_1}^2, && k_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3{\alpha_2}^2 + 12{\alpha_1}^2\alpha_2 - 6{\alpha_1}^6. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Основные характеристики случайной величины $\mathbf{X}$ могут быть легко получены в виде семиинвариантов

$$\begin{aligned} M(\mathbf{X}) &= k_1, \\ D(\mathbf{X}) &= \sigma^2 = k_2, \\ \gamma_1 &= k_3/\sigma^3, \\ \gamma_2 &= k_4/\sigma^4. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь σ — *стандартное отклонение*, γ_1 — *коэффициент асимметрии*, γ_2 — *коэффициент эксцесса*.

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ независимы, то асимметрия суммы $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ может быть вычислена по формуле

$$\gamma_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = \frac{\sigma^3_{\mathbf{X}}\gamma_{\mathbf{X}} + \sigma^3_{\mathbf{Y}}\gamma_{\mathbf{Y}}}{\sigma^3_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}}. \tag{1.19}$$

4. Если $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ — две независимые случайные величины с функциями распределения F_1 и F_2, то распределение их суммы $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ определяется по *формуле свертки*

$$F(X) = F_1 * F_2(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(X - X_2)dF_2(X_2). \tag{1.20}$$

В частном случае, где по крайней мере одно слагаемое, например $\mathbf{X}_2$, имеет непрерывное распределение с плотностью f_2, получим

$$F(X) = F_1 * F_2(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(X - X_2) f_2(X_2) dX_2. \qquad (1.21)$$

Обычно наиболее удобным способом нахождения распределения суммы независимых случайных величин является применение производящих функций, поскольку производящая функция моментов суммы равна произведению производящих функций моментов слагаемых.

5. Распределение системы двух случайных величин $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ определяет *условные распределения* величины $\mathbf{X}_1$ при условии, что $\mathbf{X}_2 = X_2$, и величины $\mathbf{X}_2$ при условии, что $\mathbf{X}_1 = X_1$. В случае дискретного совместного распределения эти условные распределения также являются дискретными и описываются условными вероятностями

$$\begin{aligned} p(X_1 \mid X_2) &= P(\mathbf{X}_1 = X_1 \mid \mathbf{X}_2 = X_2) = \frac{p(X_1, X_2)}{p_2(X_2)}, \\ p(X_2 \mid X_1) &= P(\mathbf{X}_2 = X_2 \mid \mathbf{X}_1 = X_1) = \frac{p(X_1, X_2)}{p_1(X_1)}, \end{aligned} \qquad (1.22)$$

где $p(X_1, X_2)$ — *функция совместного распределения* набора случайных величин $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, а функции

$$p_1(X_1) = \sum_{X_2} p(X_1, X_2), \quad p_2(X_2) = \sum_{X_1} p(X_1, X_2)$$

описывают распределения случайных величин $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ по отдельности.

Аналогично, в случае непрерывного совместного распределения условные распределения величин $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ также являются

непрерывными и описываются условными плотностями распределений

$$f(X_1 \mid X_2) = \frac{f(X_1, X_2)}{f_2(X_2)}, \quad f(X_2 \mid X_1) = \frac{f(X_1, X_2)}{f_1(X_1)}. \tag{1.23}$$

Условное математическое ожидание функции $g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ двух дискретных случайных величин $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$, при условии, что $\mathbf{X}_1 = X_1$, определяется по формуле

$$M(g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \mid X_1) = \sum_{X_2} g(X_1, X_2) p(X_2 \mid X_1). \tag{1.24}$$

В непрерывном случае, при том же условии, эта формула принимает вид

$$M(g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \mid X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2) f(X_2 \mid X_1) dX_2. \tag{1.25}$$

Условные дисперсии величин $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ равны соответственно

$$\begin{aligned} D(\mathbf{X}_1 \mid X_2) &= M((\mathbf{X}_1 - M(\mathbf{X}_1 \mid X_2))^2 \mid X_2), \\ D(\mathbf{X}_2 \mid X_1) &= M((\mathbf{X}_2 - M(\mathbf{X}_2 \mid X_1))^2 \mid X_1). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Ковариация двух случайных величин $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ обозначается $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ и определяется соотношением

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = M((\mathbf{X}_1 - M(\mathbf{X}_1)) \cdot (\mathbf{X}_2 - M(\mathbf{X}_2))). \tag{1.27}$$

§ 2. Биномиальная и пуассоновская модели

1. Простейшая из вероятностных моделей числа страховых событий по портфелю — биномиальная, основана на следующих предположениях:

1) размер портфеля N фиксирован и не является случайной величиной;