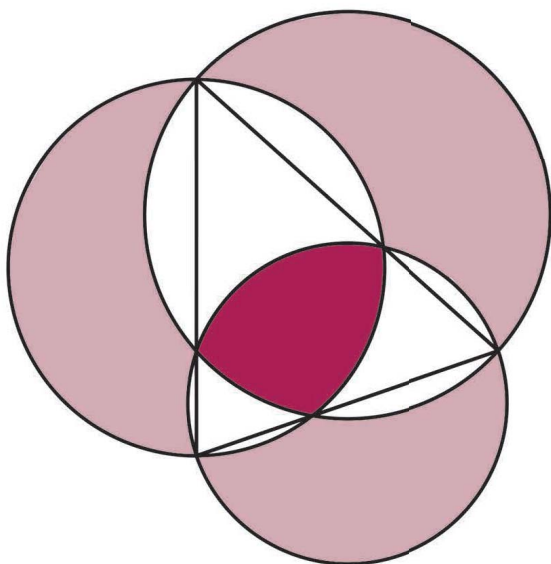


В. В. Прасолов

Задачи по планиметрии



УДК 514.112
ББК 22.151.0
П70

Прасолов В. В.
Задачи по планиметрии
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2019
637 с.
ISBN 978-5-4439-3370-2

Книга может использоваться в качестве задачника по геометрии для 7—11 классов в сочетании со всеми действующими учебниками по геометрии. В неё включены нестандартные геометрические задачи несколько повышенного по сравнению со школьными задачами уровня. Сборник содержит около 1900 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятельного решения.

Материалы данного пособия полностью покрывают тематику и сложность заданий олимпиад всех уровней и всех видов экзаменов, включая ОГЭ, ЕГЭ и вступительные экзамены в вузы.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов педагогических институтов и университетов.

Подготовлено на основе книги: *В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии.* — 7-е изд., испр. и дополн. — М.: МЦНМО, 2019. — ISBN 978-5-4439-1370-4.



Учебно-методическое издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3370-2

© Прасолов В. В., 2019.
© МЦНМО, 2019.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к седьмому изданию	9
Предисловие к четвёртому изданию	10
Глава 1. Подобные треугольники	11
§ 1. Отрезки, заключённые между параллельными прямыми (12). § 2. Отношение сторон подобных треугольников (13). § 3. Отношение площадей подобных треугольников (15). § 4. Вспомогательные равные треугольники (16). § 5. Треугольник, образованный основаниями высот (17). § 6. Подобные фигуры (18). Задачи для самостоятельного решения (18). Решения	20
Глава 2. Вписанный угол	30
§ 1. Углы, опирающиеся на равные дуги (31). § 2. Величина угла между двумя хордами (32). § 3. Угол между касательной и хордой (33). § 4. Связь величины угла с длиной дуги и хорды (34). § 5. Четыре точки, лежащие на одной окружности (35). § 6. Вписанный угол и подобные треугольники (36). § 7. Биссектриса делит дугу пополам (37). § 8. Вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями (38). § 9. Три описанные окружности пересекаются в одной точке (39). § 10. Точка Микеля (40). § 11. Разные задачи (40). Задачи для самостоятельного решения (41). Решения	42
Глава 3. Окружности	55
§ 1. Касательные к окружностям (56). § 2. Произведение длин отрезков хорд (57). § 3. Касающиеся окружности (58). § 4. Три окружности одного радиуса (59). § 5. Две касательные, проведённые из одной точки (60). § 6. Применение теоремы о высотах треугольника (60). § 7. Площади криволинейных фигур (61). § 8. Окружности, вписанные в сегмент (62). § 9. Разные задачи (63). § 10. Радиальная ось (63). § 11. Пучки окружностей (65). Задачи для самостоятельного решения (66). Решения	67

Глава 4. Площадь	82
§ 1. Медиана делит площадь пополам (82). § 2. Вычисление площадей (83). § 3. Площади треугольников, на которые разбит четырёхугольник (84). § 4. Площади частей, на которые разбит четырёхугольник (84). § 5. Разные задачи (85). § 6. Прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части (86). § 7. Формулы для площади четырёхугольника (87). § 8. Вспомогательная площадь (88). § 9. Перегруппировка площадей (89). Задачи для самостоятельного решения (90). Решения	91
Глава 5. Треугольники	102
§ 1. Вписанная и описанная окружности (103). § 2. Прямоугольные треугольники (105). § 3. Правильный треугольник (105). § 4. Треугольник с углом 60° или 120° (106). § 5. Целочисленные треугольники (107). § 6. Разные задачи (108). § 7. Теорема Менелая (110). § 8. Теорема Чебы (112). § 9. Прямая Симсона (115). § 10. Подерный треугольник (117). § 11. Прямая Эйлера и окружность девяти точек (118). § 12. Точки Брокера (119). § 13. Точка Лемуана (120). Задачи для самостоятельного решения (122). Решения	123
Глава 6. Многоугольники	153
§ 1. Вписанные и описанные четырёхугольники (153). § 2. Четырёхугольники (156). § 3. Теорема Птолемея (157). § 4. Пятиугольники (158). § 5. Шестиугольники (159). § 6. Правильные многоугольники (160). § 7. Вписанные и описанные многоугольники (162). § 8. Произвольные выпуклые многоугольники (163). § 9. Теорема Паскаля (163). Задачи для самостоятельного решения (164). Решения	165
Глава 7. Геометрические места точек	186
§ 1. ГМТ — прямая или отрезок (186). § 2. ГМТ — окружность или дуга окружности (187). § 3. Вписанный угол (188). § 4. Вспомогательные равные или подобные треугольники (189). § 5. Гомотетия (189). § 6. Метод ГМТ (189). § 7. ГМТ с ненулевой площадью (190). § 8. Теорема Карно (190). § 9. Окружность Ферма—Аполлония (191). Задачи для самостоятельного решения (192). Решения	192
Глава 8. Построения	200
§ 1. Метод геометрических мест точек (200). § 2. Вписанный угол (201). § 3. Подобные треугольники и гомотетия (201). § 4. Построение треугольников по различным элементам (202). § 5. Построение треугольников по различным точкам (202). § 6. Треугольник (203). § 7. Четырёхугольники (203). § 8. Окружности (204). § 9. Окружность Аполлония (205). § 10. Разные задачи (205). § 11. Необычные построения (205). § 12. Построения одной линейкой (206). § 13. Построения с помощью	

двусторонней линейки (207). §14. Построения с помощью прямого угла (207). Задачи для самостоятельного решения (208). Решения	208
--	-----

Глава 9. Геометрические неравенства 225

§1. Медиана треугольника (226). §2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника (226). §3. Сумма длин диагоналей четырёхугольника (227). §4. Разные задачи на неравенство треугольника (227). §5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон (228). §6. Неравенства для площадей (228). §7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой (230). §8. Ломаные внутри квадрата (231). §9. Четырёхугольник (231). §10. Многоугольники (232). §11. Разные задачи (233). Задачи для самостоятельного решения (234). Приложение. Некоторые неравенства	234
Решения	236

Глава 10. Неравенства для элементов треугольника 257

§1. Медианы (257). §2. Высоты (257). §3. Биссектрисы (258). §4. Длины сторон (258). §5. Радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей (258). §6. Симметричные неравенства для углов треугольника (259). §7. Неравенства для углов треугольника (259). §8. Неравенства для площади треугольника (260). §9. Против большей стороны лежит больший угол (260). §10. Отрезок внутри треугольника меньше наибольшей стороны (261). §11. Неравенства для прямоугольных треугольников (261). §12. Неравенства для остроугольных треугольников (262). §13. Неравенства в треугольниках (262). Задачи для самостоятельного решения (263). Решения	264
---	-----

Глава 11. Задачи на максимум и минимум 277

§1. Треугольник (277). §2. Экстремальные точки треугольника (278). §3. Угол (279). §4. Четырёхугольники (280). §5. Многоугольники (280). §6. Разные задачи (281). §7. Экстремальные свойства правильных многоугольников (281). Задачи для самостоятельного решения (282). Решения	282
---	-----

Глава 12. Вычисления и метрические соотношения 293

§1. Теорема синусов (293). §2. Теорема косинусов (294). §3. Вписанная, описанная и вневписанная окружности; их радиусы (295). §4. Длины сторон, высоты, биссектрисы (295). §5. Синусы и косинусы углов треугольника (296). §6. Тангенсы и котангенсы углов треугольника (296). §7. Вычисление углов (297). §8. Окружности (298). §9. Разные задачи (299). §10. Метод координат (299). Задачи для самостоятельного решения (300). Решения	301
--	-----

Глава 13. Векторы	312
§ 1. Векторы сторон многоугольников (313). § 2. Скалярное произведение. Соотношения (314). § 3. Неравенства (314). § 4. Суммы векторов (315). § 5. Вспомогательные проекции (316). § 6. Метод усреднения (316). § 7. Псевдоскалярное произведение (317). Задачи для самостоятельного решения (318).	
Решения	319
Глава 14. Центр масс	329
§ 1. Основные свойства центра масс (329). § 2. Теорема о группировке масс (330). § 3. Момент инерции (331). § 4. Разные задачи (332). § 5. Баричесentricкие координаты (332). § 6. Трилинейные координаты (335).	
Решения	336
Глава 15. Параллельный перенос	349
§ 1. Перенос помогает решить задачу (349). § 2. Построения и геометрические места точек (350). Задачи для самостоятельного решения (351).	
Решения	351
Глава 16. Центральная симметрия	357
§ 1. Симметрия помогает решить задачу (358). § 2. Свойства симметрии (358). § 3. Симметрия в задачах на построение (359). Задачи для самостоятельного решения (360).	
Решения	360
Глава 17. Осевая симметрия	365
§ 1. Симметрия помогает решить задачу (365). § 2. Построения (366). § 3. Неравенства и экстремумы (367). § 4. Композиции симметрий (367). § 5. Свойства симметрий и осей симметрии (368). § 6. Теорема Шаля (368). Задачи для самостоятельного решения (369).	
Решения	370
Глава 18. Поворот	378
§ 1. Поворот на 90° (379). § 2. Поворот на 60° (379). § 3. Повороты на произвольные углы (381). § 4. Композиции поворотов (382). Задачи для самостоятельного решения (383).	
Решения	384
Глава 19. Гомотетия и поворотная гомотетия	393
§ 1. Гомотетичные многоугольники (394). § 2. Гомотетичные окружности (394). § 3. Построения и геометрические места точек (395). § 4. Композиции гомотетий (396). § 5. Поворотная гомотетия (396). § 6. Центр поворотной гомотетии (398). § 7. Композиции поворотных гомотетий (399). § 8. Окружность подобия трёх фигур (399). Задачи для самостоятельного решения (401).	
Решения	401

Глава 20. Принцип крайнего	412
§ 1. Наименьший или наибольший угол (412). § 2. Наименьшее или наибольшее расстояние (413). § 3. Наименьшая или наибольшая площадь (414). § 4. Наибольший треугольник (414). § 5. Выпуклая оболочка и опорные прямые (414). § 6. Разные задачи (415).	
Решения	416
Глава 21. Принцип Дирихле	424
§ 1. Конечное число точек, прямых и т.д. (424). § 2. Углы и длины (425). § 3. Площадь (426).	
Решения	427
Глава 22. Выпуклые и невыпуклые многоугольники	435
§ 1. Выпуклые многоугольники (435). § 2. Изопериметрическое неравенство (436). § 3. Симметризация по Штейнеру (437). § 4. Сумма Минковского (438). § 5. Теорема Хелли (438). § 6. Невыпуклые многоугольники (439).	
Решения	440
Глава 23. Делимость, инварианты, раскраски	458
§ 1. Чёт и нечёт (458). § 2. Делимость (459). § 3. Инварианты (459). § 4. Вспомогательные раскраски в шахматном порядке (460). § 5. Другие вспомогательные раскраски (461). § 6. Задачи о раскрасках (462).	
Решения	463
Глава 24. Целочисленные решётки	474
§ 1. Многоугольники с вершинами в узлах решётки (474). § 2. Формула Пика (474). § 3. Разные задачи (475). § 4. Вокруг теоремы Минковского (475).	
Решения	476
Глава 25. Разрезания, разбиения, покрытия	484
§ 1. Равносоставленные фигуры (484). § 2. Разрезания на части, обладающие специальными свойствами (485). § 3. Свойства частей, полученных при разрезаниях (485). § 4. Разрезания на параллелограммы (486). § 5. Плоскость, разрезанная прямыми (486). § 6. Разные задачи на разрезания (487). § 7. Разбиение фигур на отрезки (488). § 8. Покрытия (488). § 9. Замощения костями домино и плитками (489). § 10. Расположение фигур на плоскости (490).	
Решения	490
Глава 26. Системы точек и отрезков. Примеры и контрпримеры	511
§ 1. Системы точек (511). § 2. Системы отрезков, прямых и окружностей (512). § 3. Примеры и контрпримеры (512).	
Решения	513

Глава 27. Индукция и комбинаторика	519
§ 1. Индукция (519). § 2. Комбинаторика (520).	
Решения	520
Глава 28. Инверсия	523
§ 1. Свойства инверсии (524). § 2. Построение окружностей (524).	
§ 3. Построения одним циркулем (525). § 4. Сделаем инверсию (526).	
§ 5. Точки, лежащие на одной окружности, и окружности, проходящие через одну точку (527). § 6. Цепочки окружностей (529).	
Решения	530
Глава 29. Аффинные преобразования	541
§ 1. Аффинные преобразования (541). § 2. Решение задач при помощи аффинных преобразований (543). § 3. Комплексные числа (544). § 4. Эл- липсы Штейнера (548).	
Решения	548
Глава 30. Проективные преобразования	565
§ 1. Проективные преобразования прямой (565). § 2. Проективные пре- образования плоскости (567). § 3. Переведём данную прямую на беско- нечность (570). § 4. Применение проективных преобразований, сохраня- ющих окружность (571). § 5. Применение проективных преобразований прямой в задачах на доказательство (573). § 6. Применение проектив- ных преобразований прямой в задачах на построение (573).	
Решения	574
Глава 31. Эллипс, парабола, гипербола	589
§ 1. Классификация кривых второго порядка (589). § 2. Эллипс (590).	
§ 3. Парабола (592). § 4. Гипербола (593). § 5. Пучки коник (595).	
§ 6. Коники как геометрические места точек (596). § 7. Рациональная параметризация (597). § 8. Коники, связанные с треугольником (597).	
Решения	599
Дополнение	617
Предметный указатель	631

ГЛАВА 1

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ (обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1$;
- $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;
- $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2. Если параллельные прямые отсекают от угла с вершиной A треугольника AB_1C_1 и AB_2C_2 , то эти треугольники подобны и $AB_1 : AB_2 = AC_1 : AC_2$ (точки B_1 и B_2 лежат на одной стороне угла, C_1 и C_2 — на другой).

3. *Средней линией треугольника* называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Этот отрезок параллелен третьей стороне и равен половине её длины.

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Этот отрезок параллелен основаниям и равен полусумме их длин.

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т.е. квадрату отношения длин соответствующих сторон. Это следует, например, из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A$.

5. Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называют *подобными*, если $A_1A_2 : A_2A_3 : \dots : A_nA_1 = B_1B_2 : B_2B_3 : \dots : B_nB_1$ и углы при вершинах $A_1, \dots, A_n$ равны соответственно углам при вершинах $B_1, \dots, B_n$.

Отношение соответственных диагоналей подобных многоугольников равно коэффициенту подобия; для описанных подобных многоугольников отношение радиусов вписанных окружностей также равно коэффициенту подобия.

Вводные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Докажите, что $AC^2 = AB \cdot AH$ и $CH^2 = AH \cdot BH$.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1 ?

5. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC , а вершины R и S — на стороне BC . Выразите длину стороны квадрата через сторону a и высоту h_a .

§ 1. Отрезки, заключённые между параллельными прямыми

1.1. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны a и b ($a > b$).

а) Найдите длину отрезка, отсекаемого диагоналями на средней линии.

б) Найдите длину отрезка MN , концы которого делят стороны AB и CD в отношении $AM : MB = DN : NC = p : q$.

1.2. Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника — вершины параллелограмма. Для каких четырёхугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

1.3. а) Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1 ?

б) На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D . Пусть a_1 , b_1 , c и d — расстояния от точек A_1 , B_1 , C и D до прямой AB . Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

1.4. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

1.5. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .

1.6. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP : AD = 1 : n$; Q — точка пересечения прямых AC и BP . Докажите, что $AQ : AC = 1 : (n + 1)$.

1.7. Вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (точка A_1 лежит на стороне AB , точка B_1 — на стороне BC и т. д.). Докажите, что центры обоих параллелограммов совпадают.

1.8. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K . Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M . Докажите, что $AK^2 = LK \cdot KM$.

1.9. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника является диаметром. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

1.10. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Докажите, что если $BO = PD$, то $AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC$.

1.11. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60° . На этой дуге взята точка M . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB , перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA .

1.12. а) Точки A , B и C лежат на одной прямой, а точки A_1 , B_1 и C_1 — на другой. Докажите, что если $AB_1 \parallel BA_1$ и $AC_1 \parallel CA_1$, то $BC_1 \parallel CB_1$.

б) Точки A , B и C лежат на одной прямой, а точки A_1 , B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 \parallel BA_1$, $AC_1 \parallel CA_1$ и $BC_1 \parallel CB_1$. Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

1.13. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC .

1.14. Пусть M и N — середины сторон AD и BC прямоугольника $ABCD$. На продолжении отрезка DC за точку D взята точка P ; Q — точка пересечения прямых PM и AC . Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$.

1.15. На продолжениях оснований AD и BC трапеции $ABCD$ за точки A и C взяты точки K и L . Отрезок KL пересекает стороны AB и CD в точках M и N , а диагонали AC и BD в точках O и P . Докажите, что если $KM = NL$, то $KO = PL$.

1.16*. На сторонах AB , BC , CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки P , Q , R и S так, что $BP : AB = CR : CD = \alpha$ и $AS : AD = BQ : BC = \beta$. Докажите, что отрезки PR и QS делятся точкой их пересечения в отношениях $\beta : (1 - \beta)$ и $\alpha : (1 - \alpha)$.

§ 2. Отношение сторон подобных треугольников

1.17. а) В треугольнике ABC проведена биссектриса BD внутреннего или внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$.

б) Докажите, что центр O вписанной окружности треугольника ABC делит биссектрису AA_1 в отношении $AO : OA_1 = (b + c) : a$, где a , b , c — длины сторон треугольника.

1.18. Длины двух сторон треугольника равны a , а длина третьей стороны равна b . Вычислите радиус его описанной окружности.

1.19. Прямая, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F . Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

1.20. На высотах BB_1 и CC_1 треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

1.21. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, касающаяся боковых сторон AB и CD в точках K и L соответственно, а оснований AD и BC в точках M и N .

а) Пусть Q — точка пересечения отрезков BM и AN . Докажите, что $KQ \parallel AD$.

б) Докажите, что $AK \cdot KB = CL \cdot LD$.

1.22. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN . Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

1.23. Прямая l пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F соответственно. Пусть G — точка пересечения прямой l с диагональю AC . Докажите, что $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$.

1.24. Пусть AC — большая из диагоналей параллелограмма $ABCD$. Из точки C на продолжения сторон AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF соответственно. Докажите, что $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

1.25. Углы треугольника ABC связаны соотношением $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Докажите, что $a^2 + bc = c^2$.

1.26. Концы отрезков AB и CD перемещаются по сторонам данного угла, причём каждая из прямых AB и CD перемещается параллельно самой себе; M — точка пересечения отрезков AB и CD . Докажите, что

величина $\frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$ остаётся постоянной.

1.27. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

1.28. На биссектрисе угла взята точка P . Прямая, проходящая через точку P , высекает на сторонах угла отрезки длиной a и b .

Докажите, что величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора этой прямой.

1.29. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре внешним образом построена полуокружность, на которой взяты точки K и L , делящие полуокружность на три равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

1.30. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC . На сторонах AC и BC выбраны точки M и K соответственно так, что $BK \cdot AB = BO^2$ и $AM \cdot AB = AO^2$. Докажите, что точки M , O и K лежат на одной прямой.

1.31*. Докажите, что если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ (рис. 1.1), то $x = y$.

1.32*. На отрезке MN построены подобные одинаково ориентированные треугольники AMN , NBM и MNC (рис. 1.2). Докажите, что треугольник ABC подобен всем этим треугольникам, а центр его описанной окружности равноудалён от точек M и N .

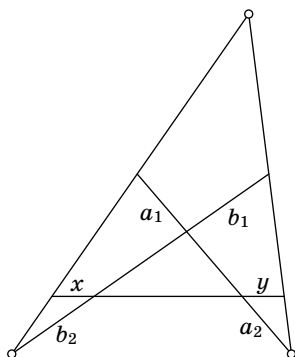


Рис. 1.1

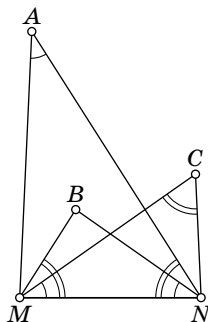


Рис. 1.2

1.33*. Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причём коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC .

См. также задачу 5.54.

§ 3. Отношение площадей подобных треугольников

1.34. На стороне AC треугольника ABC взята точка E . Через точку E проведены прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (D и F — точки на этих сторонах). Докажите, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.35. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите длину MN , если $BC = a$ и $AD = b$.

1.36. Через некоторую точку Q , взятую внутри треугольника ABC , проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1 , S_2 и S_3 . Докажите, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

1.37. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади S , равна $3S/4$.

1.38. а) Докажите, что площадь четырёхугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

б) Докажите, что если диагонали выпуклого четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1.39. Точка O , лежащая внутри выпуклого четырёхугольника площади S , отражается симметрично относительно середин его сторон.

Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в полученных точках.

§ 4. Вспомогательные равные треугольники

1.40. Катет BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C разделён точками D и E на три равные части. Докажите, что если $BC = 3AC$, то сумма углов AEC , ADC и ABC равна 90° .

1.41. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что отрезки KLD прямой.

1.42. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведены прямые l_1 и l_2 , пересекающие его стороны. Из точек B и D опущены перпендикуляры BB_1 , BB_2 , DD_1 и DD_2 на эти прямые. Докажите, что отрезки B_1B_2 и D_1D_2 равны и перпендикулярны.

1.43. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE , пересекают гипотенузу AB в точках K и L . Докажите, что $KL = LB$.

1.44*. На сторонах AB , BC , CD и DA вписанного четырёхугольника $ABCD$, длины которых равны a , b , c и d , внешним образом построены прямоугольники размером $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$ и $d \times b$. Докажите, что их центры являются вершинами прямоугольника.

1.45*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R с центром O , причём $AB = CD = EF = R$. Докажите, что точки попарного пересечения описанных окружностей треугольников BOC , DOE и FOA , отличные от точки O , являются вершинами правильного треугольника со стороной R .

* * *

1.46. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BSK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.47. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

1.48*. На сторонах произвольного треугольника ABC внешним образом построены равнобедренные треугольники с углами 2α , 2β и 2γ при вершинах A' , B' и C' , причём $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Докажите, что углы треугольника $A'B'C'$ равны α , β и γ .

1.49*. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

1.50*. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены прямоугольные треугольники ABC_1 и AB_1C , причём

$\angle C_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, $\angle ABC_1 = \angle ACB_1 = \varphi$; M — середина BC . Докажите, что $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 2\varphi$.

б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник, причём его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC .

1.51*. На неравных сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены равнобедренные треугольники AC_1B и AB_1C с углом φ при вершине.

а) M — точка медианы AA_1 (или её продолжения), равноудалённая от точек B_1 и C_1 . Докажите, что $\angle B_1MC_1 = \varphi$.

б) O — точка серединного перпендикуляра к отрезку BC , равноудалённая от точек B_1 и C_1 . Докажите, что $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - \varphi$.

1.52*. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ внешним образом построены подобные ромбы, причём их острые углы α прилегают к вершинам A и C . Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных ромбов, равны, а угол между ними равен α .

См. также задачи [1.23](#), [3.1](#), [3.25](#), [5.17](#), [5.18](#), [7.24—7.26](#), [8.47](#).

§ 5. Треугольник, образованный основаниями высот

1.53. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. Чему равен коэффициент подобия?

1.54. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.

1.55. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 .

а) Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1 .

б) Докажите, что $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности.

1.56. На сторонах остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Докажите, что $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ тогда и только тогда, когда H — точка пересечения высот треугольника ABC .

1.57. а) Докажите, что высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC делят углы треугольника $A_1B_1C_1$ пополам.

б) На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC .

1.58. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC , лежит на прямой B_1C_1 .

1.59. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что если $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$, то $A_1C_1 \parallel AC$.

1.60*. Пусть p — полупериметр остроугольного треугольника ABC , q — полупериметр треугольника, образованного основаниями его высот. Докажите, что $p : q = R : r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

§ 6. Подобные фигуры

1.61. В треугольник вписана окружность радиуса r . Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три треугольника. Пусть r_1 , r_2 , r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

1.62. Дан треугольник ABC . Постройте две прямые x и y так, чтобы для любой точки M на стороне AC сумма длин отрезков MX_M и MY_M , проведённых из точки M параллельно прямым x и y до пересечения со сторонами AB и BC треугольника, равнялась 1.

1.63. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC ; O — середина отрезка HE . Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

1.64. Докажите, что проекции основания высоты треугольника на стороны, её заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

1.65. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB , BC , CA построены полуокружности S_1 , S_2 , S_3 по одну сторону от AC . D — такая точка на S_3 , что $BD \perp AC$. Общая касательная к S_1 и S_2 , касается этих полуокружностей в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 , проведённой через точку D .

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

1.66*. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, опустили перпендикуляры MQ и MP на две его противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит диагонали прямоугольника $ABCD$.

1.67*. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Рассмотрим две прямые, каждая из которых проходит через точки касания, принадлежащие одной из окружностей. Докажите, что точка пересечения этих прямых расположена на прямой, соединяющей центры окружностей.

См. также задачу 6.28.

Задачи для самостоятельного решения

1.68. Основание равнобедренного треугольника составляет четверть его периметра. Из произвольной точки основания проведены прямые,

параллельные боковым сторонам. Во сколько раз периметр треугольника больше периметра отсечённого параллелограмма?

1.69. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.

1.70. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырёх вершин квадрата до этой прямой.

1.71. Точки A_1 , B_1 и C_1 симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1.72. Докажите, что если $\angle BAC = 2\angle ABC$, то $BC^2 = (AC + AB) \cdot AC$.

1.73. На прямой l даны точки A , B , C и D . Через точки A и B , а также через точки C и D проводятся параллельные прямые. Докажите, что диагонали полученных таким образом параллелограммов (или их продолжения) пересекают прямую l в двух фиксированных точках.

1.74. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и средняя линия A_1C_1 . Прямые AD и A_1C_1 пересекаются в точке K . Докажите, что $2A_1K = |b - c|$.

1.75. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Докажите, что $S_{ABM} = S_{CBN}$.

1.76. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $AP = CQ$. Точка M такова, что $PM \parallel AD$ и $QM \parallel AB$. Докажите, что точка M лежит на диагонали BD .

1.77. Продолжения боковых сторон трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Концы отрезка EF , параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, лежат соответственно на сторонах AB и CD . Докажите, что $AE : CF = AO : CO$.

1.78. Три прямые, параллельные сторонам данного треугольника, отсекают от него три треугольника, причём остаётся равносторонний шестиугольник. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a , b и c .

1.79. Три прямые, параллельные сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, причём стороны треугольника высекают на этих прямых отрезки длиной x . Найдите x , если длины сторон треугольника равны a , b и c .

1.80. Точка P лежит внутри треугольника ABC , причём $\angle ABP = \angle ACP$. На прямых AB и AC взяты такие точки C_1 и B_1 , что $BC_1 : CB_1 = CP : BP$. Докажите, что одна из диагоналей параллелограмма, две стороны которого лежат на прямых BP и CP , а две другие стороны (или их продолжения) проходят через B_1 и C_1 , параллельна BC .

Решения

1.1. а) Пусть P и Q — середины сторон AB и CD , K и L — точки пересечения прямой PQ с диагоналями AC и BD . Тогда $PL = a/2$ и $PK = b/2$, поэтому $KL = PL - PK = (a - b)/2$.

б) Возьмём на стороне AD точку F так, что $BF \parallel CD$. Пусть E — точка пересечения отрезков MN и BF . Тогда $MN = ME + EN = \frac{qAF}{p+q} + b = \frac{q(a-b) + (p+q)b}{p+q} = \frac{qa+pb}{p+q}$.

1.2. Пусть K , L , M и N — середины сторон AB , BC , CD и DA соответственно четырёхугольника $ABCD$. Тогда $KL = MN = AC/2$ и отрезок KL параллелен MN , т.е. $KLMN$ — параллелограмм. Теперь ясно, что $KLMN$ — прямоугольник, если диагонали AC и BD перпендикулярны; ромб, если $AC = BD$; квадрат, если диагонали AC и BD равны по длине и перпендикулярны.

1.3. а) Обозначим точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 через O . Проведём в треугольнике B_1BC отрезок $A_1A_2 \parallel BB_1$. Тогда $B_1C/B_1A_2 = 1 + p$, поэтому $AO : OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = B_1C : qB_1A_2 = (1 + p) : q$.

б) Пусть $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. Тогда $AD : DA_1 = (1 + p) : q$ и $BD : DB_1 = (1 + q) : p$. Поэтому $a_1 = \frac{1+p+q}{1+p}d$, $b_1 = \frac{1+p+q}{1+q}d$ и $c = (1 + p + q)d$.

1.4. Пусть A_2 — середина отрезка A_1B . Тогда $CA_1 : A_1A_2 = CP : PC_1$ и $A_1A_2 : A_1B = 1 : 2$, поэтому $CA_1 : A_1B = CP : 2PC_1$. Аналогично $CB_1 : B_1A = CP : 2PC_1 = CA_1 : A_1B$.

1.5. Точка P лежит на медиане QM треугольника AQD (или на её продолжении). Легко проверить, что решение задачи **1.4** остаётся верным и в случае, когда точка P лежит на продолжении медианы. Следовательно, $BC \parallel AD$.

1.6. Так как $\triangle AQP \sim \triangle CQB$, то $AQ : QC = AP : BC = 1 : n$. Поэтому $AC = AQ + QC = (n + 1)AQ$.

1.7. Центр параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, будучи серединой отрезка B_1D_1 , принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD . Аналогично он принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон BC и AD . Точка пересечения этих отрезков — центр параллелограмма $ABCD$.

1.8. Ясно, что $AK : KM = BK : KD = LK : AK$, т.е. $AK^2 = LK \cdot KM$.

1.9. Пусть AC — диаметр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Опустим перпендикуляры AA_1 и CC_1 на BD (рис. 1.3). Нужно доказать, что $BA_1 = DC_1$. Опустим перпендикуляр OP из центра O описанной окружности на BD . Ясно, что P — середина отрезка BD . Прямые AA_1 , OP , CC_1 параллельны и $AO = OC$, поэтому $A_1P = PC_1$. Так как P — середина BD , то $BA_1 = DC_1$.

1.10. Так как $BO = PD$, то $BO : OD = DP : PB = k$. Пусть $BC = 1$. Тогда $AD = k$ и $ED = 1/k$. Поэтому $k = AD = AE + ED = 1 + (1/k)$, т.е. $k^2 = 1 + k$. Остаётся заметить, что $k^2 = AD^2$ и $1 + k = BC^2 + BC \cdot AD$.

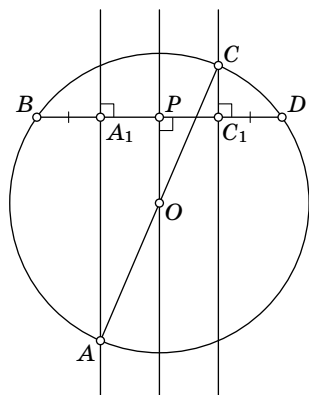


Рис. 1.3

б) Учитывая, что $BA_1 : A_1C = BA : AC$ и $BA_1 + A_1C = BC$, получаем $BA_1 = ac/(b+c)$. Так как BO — биссектриса треугольника ABA_1 , то $AO : OA_1 = AB : BA_1 = (b+c) : a$.

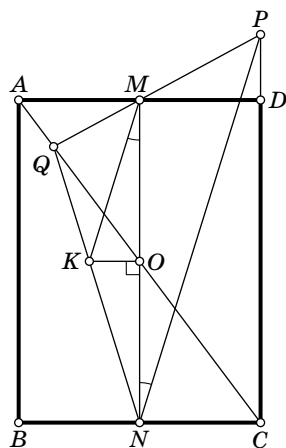


Рис. 1.4

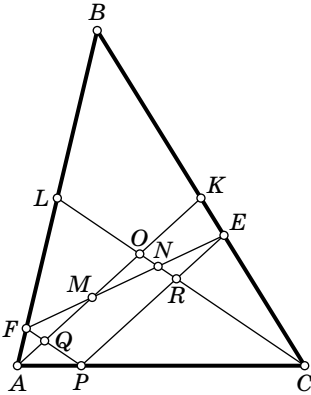


Рис. 1.6

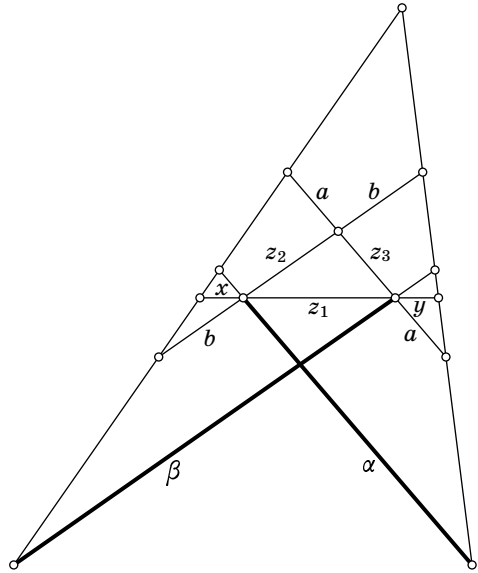


Рис. 1.7

1.29. Обозначим середину стороны BC через O , а точки пересечения AK и AL со стороной BC — через P и Q . Можно считать, что $BP < BQ$. Треугольник LCO равнобедренный и $LC \parallel AB$. Поэтому $\triangle ABQ \sim \triangle LCQ$, т.е. $BQ : QC = AB : LC = 2 : 1$. Следовательно, $BC = BQ + QC = 3QC$. Аналогично $BC = 3BP$.

1.30. Так как $BK : BO = BO : AB$ и $\angle KBO = \angle ABO$, то $\triangle KOB \sim \triangle OAB$. Поэтому $\angle KOB = \angle OAB$. Аналогично $\angle AOM = \angle ABO$. Следовательно, $\angle KOM = \angle KOB + \angle BOA + \angle AOM = \angle OAB + \angle BOA + \angle ABO = 180^\circ$, т.е. точки K , O и M лежат на одной прямой.

1.31. Проведём дополнительно прямые, параллельные прямым, на которых лежат отрезки длиной $a_1 = a_2 = a$ и $b_1 = b_2 = b$ (рис. 1.7). Из подобия треугольников следуют равенства $\frac{x}{b} = \frac{x+z_1}{\beta}$, $\frac{a+z_3}{a} = \frac{\beta}{b+z_2}$, $\frac{y+z_1}{\alpha} = \frac{y}{a}$, $\frac{\alpha}{a+z_3} = \frac{b+z_2}{b}$.

Перемножив эти равенства, получим $x(y+z_1) = y(x+z_1)$, а значит, $x = y$.

1.32. Так как $\angle AMN = \angle MNC$ и $\angle BMN = \angle MNA$, то $\angle AMB = \angle ANC$. Кроме того, $AM : AN = NB : NM = BM : CN$. Поэтому $\triangle AMB \sim \triangle ANC$, а значит, $\angle MAB = \angle NAC$. Следовательно, $\angle BAC = \angle MAN$. Для других углов доказательство аналогично.

Пусть точки B_1 и C_1 симметричны B и C относительно серединного перпендикуляра к отрезку MN . Так как $AM : NB = MN : BM = MC : NC$, то $MA \cdot MC_1 = AM \cdot NC = NB \cdot MC = MB_1 \cdot MC$. При этом точки M , A , C_1 лежат на одной прямой и точки M , B_1 , C лежат на одной прямой. Следовательно, точка A лежит на окружности, описанной вокруг трапеции BB_1CC_1 .

1.33. Так как $\angle AEB + \angle BEC = 180^\circ$, то эти углы не могут быть разными углами подобных треугольников ABE и BEC , т.е. они равны и BE — перпендикуляр.

Возможны два варианта: $\angle ABE = \angle CBE$ или $\angle ABE = \angle BCE$. Первый вариант отпадает, так как в этом случае $\triangle ABE = \triangle CBE$. Остаётся второй вариант. В этом случае $\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике ABC катеты относятся, как $1 : \sqrt{3}$, поэтому его углы равны $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

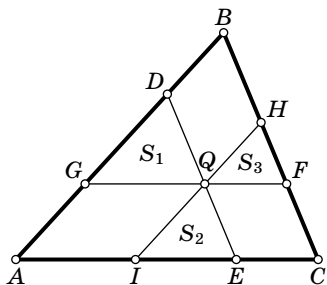


Рис. 1.8

1.34. Ясно, что $S_{BDEF}/2S_{ADE} = S_{BDE}/S_{ADE} = DB/AD = EF/AD = \sqrt{S_{EFC}/S_{ADE}}$. Поэтому $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.35. Пусть $MN = x$; E — точка пересечения прямых AB и CD . Треугольники EBC , EMN и EAD подобны, поэтому $S_{EBC} : S_{EMN} : S_{EAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{EMN} - S_{EBC} = S_{MBCN} = S_{MADN} = S_{EAD} - S_{EMN}$, то $x^2 - a^2 = b^2 - x^2$, т.е. $x^2 = (a^2 + b^2)/2$.

1.36. Проведём через точку Q прямые DE , FG и HI параллельно BC , CA и AB соответственно так, чтобы точки F и H лежали на стороне BC , точки E и I — на стороне AC , точки D и G — на стороне AB (рис. 1.8). Введём обозначения: $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{GDQ}$, $S_2 = S_{IEQ}$, $S_3 = S_{HFQ}$. Тогда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{GQ}{AC} + \frac{IE}{AC} + \frac{FQ}{AC} = \frac{AI + IE + EC}{AC} = 1,$$

т.е. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

1.37. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC ; точка A_1 симметрична M относительно середины отрезка BC . Длины сторон треугольника $СМА_1$ относятся к медианам треугольника ABC , как $2 : 3$. Поэтому искомая площадь равна $9S_{СМА_1}/4$. Ясно, что $S_{СМА_1} = S/3$ (см. решение задачи 4.1).

1.38. Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA .

а) Ясно, что $S_{AEH} + S_{CFG} = \frac{S_{ABD}}{4} + \frac{S_{CBD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4}$. Аналогично $S_{BEF} + S_{DGH} = \frac{S_{ABCD}}{4}$. Поэтому $S_{EFGH} = S_{ABCD} - \frac{S_{ABCD}}{4} - \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

б) Так как $AC = BD$, то $EFGH$ — ромб (задача 1.2). Согласно задаче а) $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG \cdot FH$.

1.39. Пусть E, F, G и H — середины сторон четырёхугольника $ABCD$; точки E_1, F_1, G_1 и H_1 симметричны точке O относительно этих точек. Так как EF — средняя линия треугольника E_1OF_1 , то $S_{E_1OF_1} = 4S_{EOF}$. Аналогично $S_{F_1OG_1} = 4S_{FOG}$, $S_{G_1OH_1} = 4S_{GOH}$ и $S_{H_1OE_1} = 4S_{HOE}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1} = 4S_{EFGH}$. Согласно задаче 1.38 а) $S_{ABCD} = 2S_{EFGH}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1} = 2S_{ABCD} = 2S$.

1.40. Первое решение. Рассмотрим квадрат $BCMN$ и разделим его сторону MN точками P и Q на три равные части (рис. 1.9). Тогда $\triangle ABC = \triangle PDQ$ и $\triangle ACD = \triangle PMA$. Поэтому треугольник PAD — равнобедренный прямоугольный и $\angle ABC + \angle ADC = \angle PDQ + \angle ADC = 45^\circ$.

Второе решение. Так как $DE = 1$, $EA = \sqrt{2}$, $EB = 2$, $AD = \sqrt{5}$ и $BA = \sqrt{10}$, то $DE : AE = EA : EB = AD : BA$ и $\triangle DEA \sim \triangle AEB$. Следовательно, $\angle ABC = \angle EAD$. Кроме того, $\angle AEC = \angle CAE = 45^\circ$. Поэтому $\angle ABC + \angle ADC + \angle AEC = (\angle EAD + \angle CAE) + \angle ADC = \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ$.

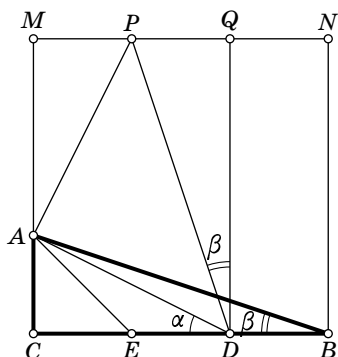


Рис. 1.9

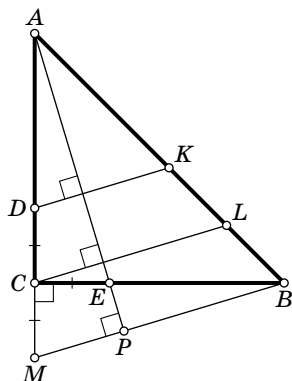


Рис. 1.10

1.41. Опустим из точки L перпендикуляры LM на AB и LN на AD . Тогда $KM = MB = ND$ и $KL = LB = DL$, поэтому прямоугольные треугольники KML и DNL равны. Следовательно, $\angle DLK = \angle NLM = 90^\circ$.

1.42. Так как $D_1A = B_1B$, $AD_2 = BB_2$ и $\angle D_1AD_2 = \angle B_1BB_2$, то $\triangle D_1AD_2 = \triangle B_1BB_2$. Стороны AD_1 и BB_1 (а также AD_2 и BB_2) этих треугольников перпендикулярны, поэтому $B_1B_2 \perp D_1D_2$.

1.43. На продолжении отрезка AC за точку C возьмём точку M так, что $CM = CE$ (рис. 1.10). Тогда треугольник ACE при повороте с центром C на 90° переходит в треугольник BCM . Поэтому прямая MB перпендикулярна прямой AE , а значит, параллельна прямой CL . Так как $MC = CE = DC$ и прямые DK , CL и MB параллельны, то $KL = LB$.

1.44. Пусть на сторонах AB и BC построены прямоугольники ABC_1D_1 и A_2BCD_2 ; P , Q , R и S — центры прямоугольников, построенных на сторонах AB , BC , CD и DA . Так как $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то $\triangle ADC = \triangle A_2BC_1$. Рассматривая прямоугольники, построенные на сторонах этих равных треугольников, получаем, что $\triangle RDS = \triangle PBQ$ и $RS = PQ$. Аналогично $QR = PS$. Следовательно, $PQRS$ — параллелограмм, причём один из треугольников RDS и PBQ построен на его сторонах внешним образом, а другой внутренним; аналогичное утверждение справедливо и для треугольников QCR и SAP . Поэтому $\angle PQR + \angle RSP = \angle BQC + \angle DSA = 180^\circ$, так как $\angle PQB = \angle RSD$ и $\angle RQC = \angle PSA$. Следовательно, $PQRS$ — прямоугольник.

1.45. Пусть K , L , M — точки пересечения описанных окружностей треугольников FOA и BOC , BOC и DOE , DOE и FOA ; 2α , 2β и 2γ — углы при вершинах равнобедренных треугольников BOC , DOE и FOA (рис. 1.11). Точка K лежит на дуге OB описанной окружности равнобедренного треуголь-

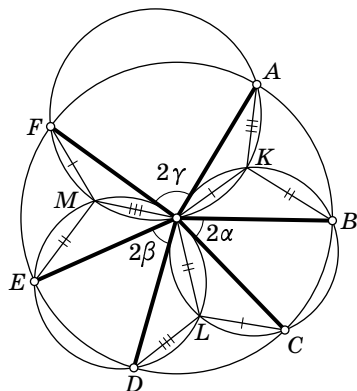


Рис. 1.11

ника BOC , поэтому $\angle OKB = 90^\circ + \alpha$. Аналогично $\angle OKA = 90^\circ + \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, то $\angle AKB = 90^\circ + \beta$. Внутри правильного треугольника AOB существует единственная точка K , из которой его стороны видны под данными углами. Аналогичные рассуждения для точки L , лежащей внутри треугольника COD , показывают, что $\triangle OKB = \triangle CLO$. Докажем теперь, что $\triangle KOL = \triangle OKB$. В самом деле, $\angle COL = \angle KBO$, поэтому $\angle KOB + \angle COL = 180^\circ - \angle OKB = 90^\circ - \alpha$, а значит, $\angle KOL = 2\alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle OKB$. Следовательно, $KL = OB = R$. Аналогично $LM = MK = R$.

1.46. Пусть $\angle A = \alpha$. Легко проверить, что оба угла KCL и ADL равны $240^\circ - \alpha$ (или $120^\circ + \alpha$). А так как $KC = BC = AD$ и $CL = DL$, то $\triangle KCL = \triangle ADL$, а значит, $KL = AL$. Аналогично $KL = AK$.

1.47. Пусть P , Q и R — центры квадратов, построенных на сторонах DA , AB и BC параллелограмма с острым углом α при вершине A . Легко проверить, что $\angle PAQ = 90^\circ + \alpha = \angle RBQ$, а значит, $\triangle PAQ = \triangle RBQ$. Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$.

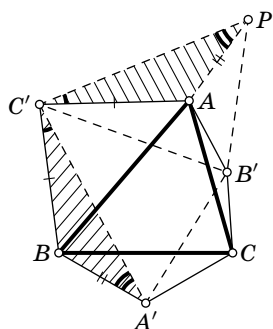


Рис. 1.12

1.48. Заметим сначала, что сумма углов при вершинах A , B и C шестиугольника $AB'SA'BC'$ равна 360° , так как по условию сумма его углов при остальных вершинах равна 360° . Построим на стороне AC' внешним образом треугольник $AC'P$, равный треугольнику $BC'A'$ (рис. 1.12). Тогда $\triangle AB'P = \triangle CB'A'$, так как $AB' = CB'$, $AP = CA'$ и $\angle PAB' = 360^\circ - \angle PAC' - \angle CAB' = 360^\circ - \angle A'BC' - \angle CAB' = \angle A'CB'$. Следовательно, $\triangle C'B'A' = \triangle C'B'P$, а значит, $2\angle A'B'C' = \angle PB'A' = \angle AB'C$, так как $\angle PB'A' = \angle A'B'C$, а угол $AB'A'$ общий.

1.49. Так как $BA:BC = BC_1:BA_1$ и $\angle ABC = \angle C_1BA_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle C_1BA_1$. Аналогично $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C$. А так как $BA_1 = A_1C$, то $\triangle C_1BA_1 = \triangle B_1A_1C$. Следовательно, $AC_1 = C_1B = B_1A_1$ и $AB_1 = B_1C = C_1A_1$. Ясно

также, что четырёхугольник $AB_1A_1C_1$ выпуклый.

1.50. а) Пусть P и Q — середины сторон AB и AC . Тогда $MP = AC/2 = QB_1$, $MQ = AB/2 = PC_1$ и $\angle C_1PM = \angle C_1PB + \angle BPM = \angle B_1QC + \angle CQM = \angle B_1QM$. Следовательно, $\triangle MQB_1 = \triangle C_1PM$, а значит, $MC_1 = MB_1$. Кроме того, $\angle PMC_1 + \angle QMB_1 = \angle QB_1M + \angle QMB_1 = 180^\circ - \angle MQB_1$, а $\angle MQB_1 = \angle A + \angle CQB_1 = \angle A + (180^\circ - 2\varphi)$. Следовательно, $\angle B_1MC_1 = \angle PMQ + 2\varphi - \angle A = 2\varphi$. (Случай, когда $\angle C_1PB + \angle BPM > 180^\circ$, разбирается аналогично.)

б) Возьмём на сторонах AB и AC такие точки B' и C' , что $AB':AB = AC':AC = 2:3$. Середина M отрезка $B'C'$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC . Построим на сторонах AB' и AC' внешним образом прямоугольные треугольники $AB'C_1$ и AB_1C' с углами 60° при вершинах B' и C' . Тогда B_1 и C_1 — центры правильных треугольников, построенных на сторонах AB и AC ; с другой стороны, согласно задаче а) $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 120^\circ$.

З а м е ч а н и е. Утверждения задач а) и б) остаются верными и для треугольников, построенных внутренним образом.

1.51. а) Пусть B' — точка пересечения прямой AC и перпендикуляра к прямой AB_1 , восстановленного из точки B_1 ; точка C' определяется аналогично. Так как $AB':AC' = AC_1:AB_1 = AB:AC$, то $B'C' \parallel BC$. Если N — середина

отрезка $B'C'$, то, как следует из задачи 1.50 а), $NC_1 = NB_1$ (т.е. $N = M$) и $\angle B_1NC_1 = 2\angle AB'B_1 = 180^\circ - 2\angle CAB_1 = \varphi$.

б) Построим на стороне BC внешним образом равнобедренный треугольник BA_1C с углом $360^\circ - 2\varphi$ при вершине A_1 (если $\varphi < 90^\circ$, строим внутренним образом треугольник с углом 2φ). Так как сумма углов при вершинах трёх построенных равнобедренных треугольников равна 360° , треугольник $A_1B_1C_1$ имеет углы $180^\circ - \varphi$, $\varphi/2$ и $\varphi/2$ (см. задачу 1.48). В частности, этот треугольник равнобедренный, а значит, $A_1 = O$.

1.52. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры ромбов, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA ; M — середина диагонали AC . Тогда $MO_1 = MO_2$ и $\angle O_1MO_2 = \alpha$ (см. задачу 1.50 а). Аналогично $MO_3 = MO_4$ и $\angle O_3MO_4 = \alpha$. Следовательно, при повороте на угол α относительно точки M треугольник O_1MO_3 переходит в O_2MO_4 .

1.53. Так как $A_1C = AC|\cos C|$, $B_1C = BC|\cos C|$ и угол C у треугольников ABC и A_1B_1C общий, то эти треугольники подобны, причём коэффициент подобия равен $|\cos C|$.

1.54. Так как точки M и N лежат на окружности с диаметром CH , то $\angle CMN = \angle CHN$, а так как $AC \perp HN$, то $\angle CHN = \angle A$. Аналогично $\angle CNM = \angle B$.

1.55. а) Пусть l — касательная в точке A к описанной окружности. Тогда для ориентированных углов получаем $\angle(l, AB) = \angle(AC, CB) = \angle(C_1B_1, AC_1)$, а значит, $l \parallel B_1C_1$.

б) Так как $OA \perp l$ и $l \parallel B_1C_1$, то $OA \perp B_1C_1$.

1.56. Если AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты, то $\triangle A_1BH \sim \triangle B_1AH$, а значит, $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$. Аналогично $BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$. (Предполагается известным, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.)

Если $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$, то $\triangle A_1BH \sim \triangle B_1AH$, а значит, $\angle BA_1H = \angle AB_1H = \varphi$. Поэтому $\angle CA_1H = \angle CB_1H = 180^\circ - \varphi$. Аналогично $\angle AC_1H = \angle CA_1H = 180^\circ - \varphi$ и $\angle AC_1H = \angle AB_1H = \varphi$, поэтому $\varphi = 90^\circ$ т.е. AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты.

1.57. а) Согласно задаче 1.53 $\angle C_1A_1B = \angle CA_1B_1 = \angle A$. Так как $AA_1 \perp BC$, то $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$. Аналогично доказывается, что лучи B_1B и C_1C — биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$.

б) Прямые AB, BC и CA являются биссектрисами внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому A_1A — биссектриса угла $B_1A_1C_1$, а значит, $AA_1 \perp BC$. Для прямых BB_1 и CC_1 доказательство аналогично.

1.58. Из результата задачи 1.57 а) следует, что прямая B_1A_1 при симметрии относительно прямой AC переходит в прямую B_1C_1 .

1.59. Согласно задаче 1.53 $\angle B_1A_1C = \angle BAC$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle B_1A_1C = \angle ABC$. Поэтому $\angle BAC = \angle ABC$. Аналогично из того, что $B_1C_1 \parallel BC$, следует равенство $\angle ABC = \angle BCA$. Поэтому треугольник ABC равносторонний и $A_1C_1 \parallel AC$.

1.60. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Так как $OA \perp B_1C_1$ (см. задачу 1.55 б), то $S_{AOC_1} + S_{AOB_1} = R \cdot B_1C_1/2$. Аналогичные рассуждения для вершин B и C показывают, что $S_{ABC} = qR$. С другой стороны, $S_{ABC} = pr$.

1.61. Периметр треугольника, отсекаемого прямой, параллельной стороне BC , равен сумме расстояний от точки A до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC , поэтому сумма периметров отсечённых треугольников равна периметру треугольника ABC : $P_1 + P_2 + P_3 = P$. Из подо-