Г.П. Шалаева

Новейший справочник школьника

4-11 классы

Математика
Химия • Физика
Русский язык
Английский язык
Литература
История
География

УДК 030:373
ББК 92я721
Ш18

Печатается с разрешения издательства ООО«Филологическое общество “СЛОВО”»

Составитель
Г. П. Шалаева

Редакционная коллегия:
к.ф.н., с.н.с. В. П. Ситников
МГУ им. М. В. Ломоносова
к.ф.н., доц. В. В. Славкин
МГУ им. М. В. Ломоносова
Г. П. Шалаева
Г. М. Якушева
к.и.н., доц. С. В. Новиков
МГУ им. М. В. Ломоносова
к.х.н., доц. С. Ю. Васильев
МГУ им. М. В. Ломоносова
М. А. Кременчугская
Т. С. Майорова
Н. Г. Быкова

Шалаева, Г.П.
Ш18 Новейший справочник школьника 4-11 классы / Г. П. Шалаева и др. — М.: АСТ: СЛОВО, 2009. — 1552 с.

Новейший справочник школьника — современное и самое полное учебное пособие, составленное по действующей базовой программе, утвержденной Министерством образования и науки РФ. Книга составлена и разработана опытными учителями московских школ и преподавателями МГУ им. М. В. Ломоносова. Издание, охватывающее все аспекты школьной программы, предназначено для школьников 4–11 классов, их родителей, учителей и абитуриентов.

УДК 030:373
ББК 92я721

ISBN 978-5-17-059998-1 (АСТ)
ISBN 978-5-8123-0523-9 (СЛОВО)

© ООО«Филологическое общество “СЛОВО”», 2009
© ООО«Филологическое общество “СЛОВО”», 2009, оформление, 2009

Содержание

Математика 4
Химия 146
Физика 309
Русский язык 545
Английский язык 740
Литература 824
История. 1076
География 1233
Приложение 1497
Предметный указатель 1518

МАТЕМАТИКА

А

АБАК — счетная доска. Этим простейшим счетным устройством пользовались в Древней Греции и Риме. Доска разделялась на полоски, каждой из которых соответствовал определенный разряд чисел. С помощью камешков или бобов на этих полосках отмечалось количество единиц каждого разряда. Обыкновенные счеты являются ничем иным, как абаком. Школьники начальных классов при обучении счету используют абак, изготовленный из бумаги.

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА действительного числа, иначе модуль числа *(см. модуль числа)*.

АБСЦИССА — первая из координат точки на координатной плоскости. Абсцисса обозначается буквой x латинского алфавита *(см. координаты прямоугольные декартовы)*.

АКСИОМА или постулат — первичное, недоказуемое утверждение. Способ построения научной теории, при котором в ее основу кладутся аксиомы, из которых выводятся доказательства теорем, называется аксиоматическим методом. Сначала аксиматический метод применялся только в геометрии. Всем известны аксиомы Евклида, на которых строится Евклидова геометрия, хотя до него были написаны сочинения, в которых излагались аксиоматические системы математики. Назывались такие сочинения «Началами». Первые «Начала», о которых дошли до нас сведения, были написаны Гиппократом Хиосским. Известны «Начала» и других авторов. Но именно «Начала» Евклида обладали той логической строгостью, которая позволила им быть непревзойденными в течении двадцати с лишним веков. «Начала» Евклида до нашего времени составляют основу школьного курса геометрии. Но самой известной аксиомой Евклида был пятый постулат о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Великие математики многих поколений пытались доказать этот постулат на основе остальных аксиом Евклида. И лишь в прошлом веке было выяснено, что это невозможно. Ведущая роль в этом принадлежит великому русскому математику Н.И. Лобачевскому. Сейчас аксиоматическим методом строятся все математические дисциплины.

АЛГЕБРА — математическая наука, объектом изучения которой являются алгебраические системы. В средней школе изучается элементарная алгебра, которая включает в себя вопросы уравнений и неравенств, простейших функций, понятие числа и другие вопросы.

Алгебра произошла из арифметики. Люди замечали, что существует однотипные задачи, при решении которых используют общие правила. Постепенно проходил переход от конкретных вычислений к абстрактным понятиям. Появилась необходимость обозначать неизвестную величину определенным символом.

Наибольшего расцвета алгебра достигла в Средние века в странах Востока. Само слово «алгебра» произошло из арабского слова «альджебр», что означает «восстановление». Основополагающим сочинением по алгебре был трактат узбекского математика и астронома аль-Хорезми, жившего в девятом веке. Омар Хайям писал: «Алгебра есть научное искусство».

Дальнейшее развитие алгебры происходило в Европе, а потом и в Америке. Невозможно перечислить всех ученых, сделавших важнейшие открытия в алгебре.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня). Алгебраическими функциями являются целые, дробно-рациональные, иррациональные функции *(см. функция: линейная, дробно-линейная, квадратичная, иррациональная)*. Показательная, логарифмическая, тригонометрические функции не являются алгебраическими.

АЛГОРИТМ — точное предписание о выполнении в определенном порядке некоторой системы предписаний (операций), позволяющее решать совокупность задач определенного класса. Простейшими алгоритмами являются правила, по которым выполняются арифметические действия,

извлекается квадратный корень и т.д. *(см. квадратный корень, Евклидов алгоритм)*.

Само слово алгоритм произошло от имени известного арабского, а точнее узбекского математика аль-Хорезми. Его труды в Средние века были очень популярны в Европе. Переводчик, переводящий его книги с арабского на латинский язык, слово «аль-Хорезма» перевел как «ал-Горизми». В результате получилось: «ал-Горизми говорит». Далее получилось слово «алгоритми», а потом и слово «алгоритм».

АПОФЕМА правильного многоугольника — радиус, вписанной в него окружности.

Апофема правильной пирамиды — высота боковой грани.

Апофема правильной усеченной пирамиды — высота трапеции, являющейся боковой гранью этой усеченной правильной пирамиды *(см. пирамида, пирамида усеченная)*.

АР — единица измерения площади. Площадь квадрата со стороной 10 *м*. 1 *а* = 100 *кв. м*. Арами измеряют площади садов и огородов, поэтому ар по-другому называют соткой.

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ — десять математических знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, позволяющие записывать любое целое число в десятичной позитивной системе счисления. Арабские цифры пришли в Европу из Индии через арабов.

АРГУМЕНТ функции (независимая переменная) — произвольный элемент из области определения. Обозначается обычно буквой *x* латинского алфавита. Зависимость переменной *y* от переменной *x* называется функцией, если каждому значению *x* соответствует единственное значение *y*. При этом используют запись $y = f(x)$.

АРИФМЕТИКА — наука о числах и операциях над ними. Слово арифметика происходит от греческого слова «арифмос» — число.

Изучение арифметики начинается со свойств натуральных чисел и арифметических действий над ними. Затем переходят к изучению рациональных и действительных чисел. Еще совсем недавно учащиеся первых пяти классов начинали математическое образование с учебника «Арифметики».

В первый печатный учебник математики создал Л.Ф. Магницкий. «Арифметика» Магницкого была издана в 1703 году и стала первым доступным пособием по математике. В Европе первые печатные «Арифметики» появились гораздо раньше, например, первая немецкая печатная арифметика была создана учеником Регионтана Ульрихом Вагнером в 1482 году.

Считается, что арифметика как наука сложилась в Древней Греции. У ее истоков прежде всего стояли Пифагор и пифагорейцы *(см. пифагорейская школа)*. Составной частью арифметики у пифагорейцев было изучение фигурных чисел *(см. числа фигурные)*, учение о четных и нечетных числах, решение уравнений $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах, составление арифметических таблиц, учение о пропорциях и др.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ — такая последовательность, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом *d*, называемым разностью арифметической прогрессии. Например: натуральный ряд чисел 1, 2, 3, ... является бесконечной арифметической прогрессией с разностью $d = 1$, а последовательности нечетных и четных чисел — примеры бесконечных арифметических прогрессий, у каждой из которых $d = 2$. Обозначение: (a_n) — арифметическая прогрессия. Из определения арифметической прогрессии следует следующая формула связи соседних членов арифметической прогрессии: $a_{n+1} = a_n + d$.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член по формуле *n*-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Например: пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 2$ и $d = 5$. Найдем a_5 и a_{10}.

$$a_5 = 2 + 5 \cdot (5-1) = 22; \quad a_{10} = 2 + 5 \cdot (10-1) = 47.$$

Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии можно найти по следующим формулам:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Например: (a_n) — арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 6$ и $d = 2$. Найти сумму первых семи членов прогрессии.

$$S_7 = \frac{2\cdot 6 + 2\cdot(7-1)}{2}\cdot 7 = 84$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ — неотрицательное решение уравнения $x^n = a$, $n \in \mathbf{N}$. Другими словами, арифметическим корнем *k*-й степени из неотрицательного числа *a* называется неотрицательное число *b*, *k*-я степень которого равна *a*. $k > 1$ — натуральное число *(см. корень)*.

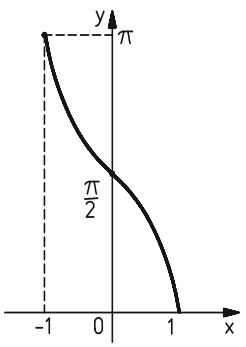
АРККОСИНУС числа *a* — это такое число α из отрезка $[0, \pi]$, что его косинус равен *a*. $y = \arccos x$ — функция, обратная по отношению к косинусу на промежутке $[0, \pi]$.

Например:

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, т.к. $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ и $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$,

т.к. $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$ и $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Рассмотрим функцию $y = \arccos x$. Областью определения этой функции является отрезок $[-1, 1]$, областью значений — отрезок $[0, \pi]$. Функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Значение функции равно нулю при $x = 1$. Функция $y = \arccos x$ убывает на всей области определения, принимает наибольшее значение π при $x = -1$, принимает наименьшее значение 0 при $x = 1$.

АРККОТАНГЕНС числа *a* — такое число α из интервала $(0, \pi)$, что его котангенс равен *a*. $y = \operatorname{arcctg} x$ — функция, обратная по отношению к котангенсу на промежутке $(0, \pi)$.

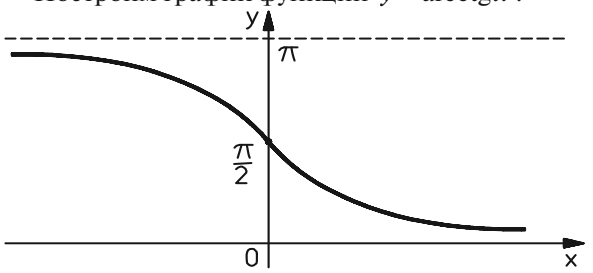
Например:

1. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, т.к. $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

2. $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, т.к. $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arcctg} x$. Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел, а областью значений — интервал $(0, \pi)$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Функция убывает на всей области определения.

Построим график функции $y = \operatorname{arcctg} x$.



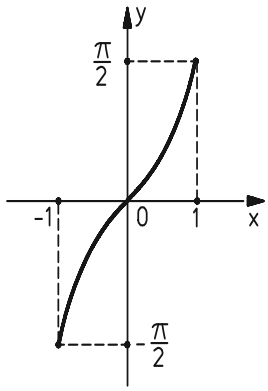
АРКСИНУС числа *a* — такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, что его синус равен *a*. $y = \arcsin x$ — функция, обратная по отношению к синусу на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Например:

1. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, т.к. $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$,

т.к. $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Область определения — отрезок $[-1, 1]$. Область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Функция является нечетной, т.е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Значение функции равно нулю при $x = 0$. Функция возрастает на всей области опре-

деления, принимает наибольшее значение $\frac{\pi}{2}$ при $x=1$, принимает наименьшее значение $-\frac{\pi}{2}$ при $x=-1$.

АРКТАНГЕНС числа a — такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, что его тангенс равен a. $y=\operatorname{arctg}x$ — функция, обратная по отношению к тангенсу на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

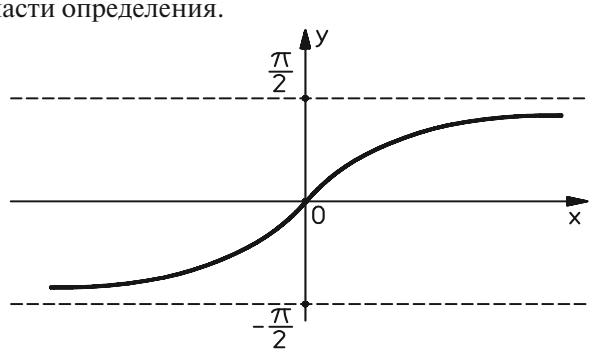
Например:

1. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, т.к. $\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$,

т.к. $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Рассмотрим функцию $y=\operatorname{arctg}x$. Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел, областью значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Функция является нечетной, т.е. $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x$. Значение функции равно нулю при $x=0$. Функция возрастает на всей области определения.



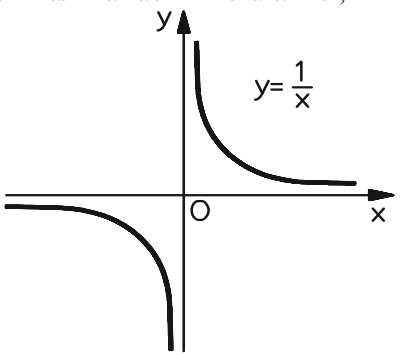
АСИМПТОТЫ графика функции. Пусть $y=f(x)$ — функция, график которой имеет бесконечную ветвь, т.е. ветвь, имеющую точки, принадлежащие графику функции и находящиеся сколь угодно далеко от начала координат.

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называют прямую, обладающую тем свойством, что расстояние от точки $(x;f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при движении этой точки вдоль ветви к бесконечности.

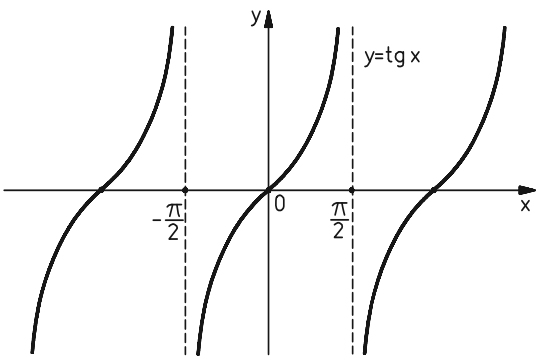
Асимптоты бывают двух видов: вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные).

Рассмотрим графики функций, имеющие вертикальные асимптоты:

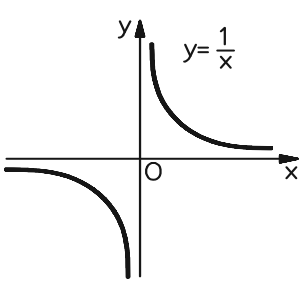
1. вертикальная асимптота $x=0$;



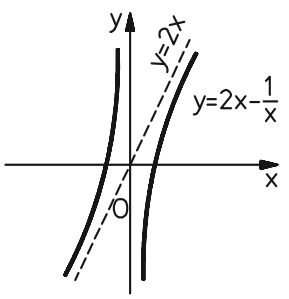
2. вертикальные асимптоты $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.



Рассмотрим графики функций, имеющие наклонные асимптоты:



Наклонная асимптота (горизонтальная) $y=0$.



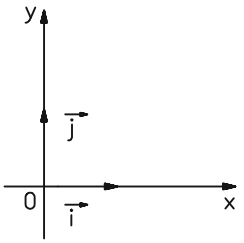
Наклонная асимптота $y=2x$.

Б

БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ (координатные векторы) прямоугольной системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные, перпендикулярные векторы.

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}$$



Для правой системы координат вектор $\vec{i}$ переходит в вектор $\vec{j}$ при повороте на 90° против часовой стрелки.

БЕСКОНЕЧНАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — одна из форм записи действительного числа $a_0, a_1a_2a_3...a_n...$. Например: 3/7=0,428571... .

Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется периодической. Например: 0,333...; 2,6777...; 4,0424242... .

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например:

$$0,(45) = \frac{45-0}{99} = \frac{5}{11};$$

$$3,1(73) = \frac{3173-31}{990} = \frac{3142}{990} = \frac{1571}{495}.$$

БИЛЛИОН — другое название миллиарда (10^9). Французский математик Шюке по созвучию с миллионом обозначил миллион миллионов (10^{12}) тоже словом «биллион», так как приставка «би» на латинском языке означает «дважды».

БИНОМ — иначе двучлен. Бином Ньютона. Под биномом Ньютона понимают формулу, дающую выражение степени $(a+b)^n$ двучлена $(a+b)$ с любым натуральным показателем n. В школьной программе рассматривают частные случаи:

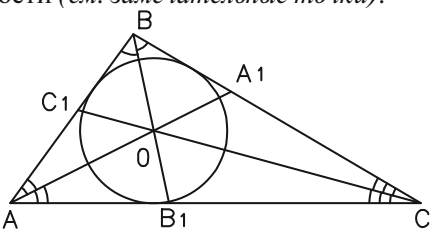
при $n=1$ $(a+b)^1 = a+b$,

при $n=2$ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,

при $n=3$ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

БИССЕКТОР — прибор, делящий плоский угол пополам.

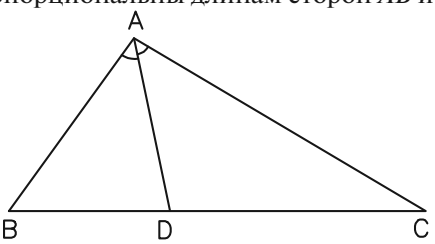
БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной в него окружности *(см. замечательные точки)*.



Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы ΔABC; O — центр вписанной окружности.

Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки BD и DC, пропорциональные сторонам AB и AC.

Биссектриса AD треугольника ABC делит его на два треугольника ABD и ACD, площади которых пропорциональны длинам сторон AB и AC.

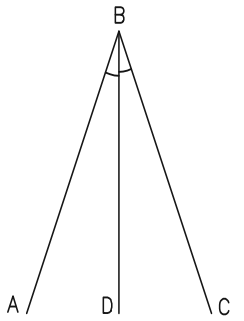


$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC};\ \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{AB}{AC}.$$

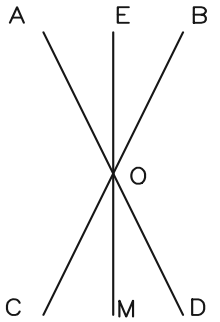
Отрезок AD — биссектриса ΔABC;

БИССЕКТРИСА УГЛА — луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла. Биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

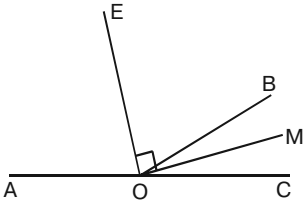
Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение одна другой. Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.



Луч BD — биссектриса $\angle ABC$



Лучи OM и OE — биссектрисы вертикальных углов AOB и COD



Лучи OE и OM — биссектрисы смежных углов AOB и BOC; $\angle EOM = 90^0$.

БЛИЗНЕЦЫ — пара простых чисел, разность которых равна двум.

Например: 3 и 5 ; 5 и 7 ; 11 и 13 ; 17 и 19 и т.д.

БОКОВАЯ ГРАНЬ ПРИЗМЫ — параллелограмм. Объединение боковых граней называется боковой поверхностью призмы. Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле:

$$S_б = P_п \cdot |A_1A_2|,$$

где $P_п$ — периметр перпендикулярного сечения призмы. $|A_1A_2|$ — длина бокового ребра. Боковыми ребрами называются ребра, не принадлежащие основанию призмы.

БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА — фигура, полученная от вращения гипотенузы, если рассматривать прямой круговой конус как фигуру, полученную при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле:

$$S_б = \pi RL,$$

где R — радиус основания конуса, L — образующая конуса.

БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПРЯМОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА — фигура, полученная в результате вращения стороны прямоугольника, противоположной стороне, принадлежащей оси вращения, если рассматривать прямой круговой цилиндр как фигуру, полученную при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле:

$$S_б = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра.

БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПИРАМИДЫ — сумма площадей треугольников боковых граней. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}Ph,$$

где P — периметр основания пирамиды, h — апофема.

БОКОВОЕ РЕБРО ПИРАМИДЫ. Стороны граней пирамиды называют ребрами пирамиды. Ребра, принадлежащие основанию пирамиды, называют ребрами основания, а остальные ребра называют боковыми.

БОКОВЫЕ СТОРОНЫ ТРАПЕЦИИ — непараллельные стороны трапеции. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

В

ВЕКТОР. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется направленным отрезком или вектором. Обозначается $\overline{AB}$ ($\vec{a}$). Длина этого отрезка называется длиной вектора. Обозначается $|\overline{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым. Начало нулевого вектора совпадает с его концом. Любую точку плоскости можно считать нулевым вектором.

Противоположными векторами называются векторы, которые имеют равные длины и противоположные направления.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на

параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Коллинеарные векторы, если они одинаково направлены, называются сонаправленными, если противоположно направлены, называются противоположно направленными. Обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Векторы называются равными, если они сонаправлены и имеют равные длины. $\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Три ненулевых вектора называются компланарными, если лучи, задающие их направление, принадлежат прямым, параллельным некоторой плоскости.

Над векторами можно проводить многие операции: сложение векторов, вычитание векторов, умножение вектора на число, скалярное произведение векторов и др.

Суммой векторов $\vec{a}\{a_1;a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1;b_2\}$ называется вектор $\vec{c} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2\}$.

Законы сложения векторов:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Если необходимо построить вектор, равный сумме двух векторов, то пользуются правилом треугольника или параллелограмма *(см. сложение векторов)*.

Разностью векторов $\vec{a}\{a_1;a_2\}$ и $b\{b_1;b_2\}$ называется такой вектор $\vec{c}\{c_1;c_2\}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, причем координаты вектора $\vec{c}$ равны разности соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $c_1 = a_1 - b_1$; $c_2 = a_2 - b_2$ *(см. координаты вектора)*.

Произведением вектора $\vec{a}\{a_1;a_2\}$ на число k, называется вектор $\vec{b}\{ka_1;ka_2\}$.

Свойства умножения вектора на число:

1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);
2. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
3. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

(распределительные законы)

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон);
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон);
4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

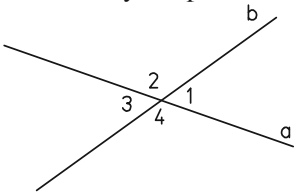
Зная координаты векторов, скалярное произведение векторов и косинус угла между векторами можно найти по формулам:

если $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 ;\ \cos(\vec{a};\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} .$$

ВЕРНАЯ ЦИФРА — понятие теории приближенных вычислений, связанное с десятичной записью приближенного значения числа. Цифра называется верной, если модуль погрешности не превосходит единицы того разряда, в котором записана эта цифра.

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого угла. Вертикальные углы равны.



$\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные углы

$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$

ВЕРШИНА УГЛА — общее начало лучей, являющихся сторонами угла.

ВЕРШИНЫ МНОГОУГОЛЬНИКА — концы отрезков, являющихся сторонами данного многоугольника.

В четырехугольнике две вершины, не являющиеся соседними, называются противоположными.

ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ЧИСЛА — такие числа, произведение которых равно единице.

Например: $\frac{1}{2}$ и 2; $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{3}$.

ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА — натуральные числа, у которых наибольший общий делитель равен единице.

Например: 8 и 13; 22 и 105.

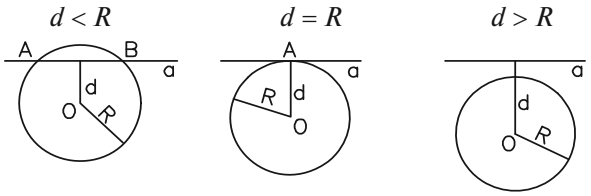
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ.

а) Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки.

б) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку, говорят прямая касается окружности.

в) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Пусть d — расстояние от центра окружности до прямой a, R — радиус окружности. Изобразим 3 варианта взаимного расположения прямой и окружности:



ВИЕТА ТЕОРЕМА. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Иначе говоря, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Из теоремы Виета следует, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для нахождения корней квадратного уравнения пользуются теоремой, обратной теореме Виета: если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, была сформулирована Виетом в 1591 году. Она звучала следующим образом: «Если $B+D$, умноженное на A минус A^2, равно BD, то A равно B и равно D». Виет гласной буквой A обозначает неизвестное, а буквы B и D использует для выражения коэффициентов при неизвестном.

ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ. Две прямые a и b пересекает третья прямая c, которая называется секущей, при этом образуются пары углов: 1 и 7, 2 и 8 — внешние накрест лежащие, 3 и 5, 4 и 6 — внутренние накрест лежащие.

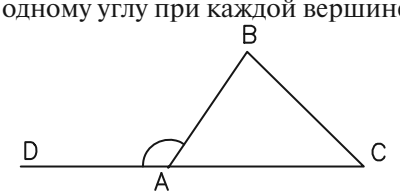


Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние или внешние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

ВНЕШНИЙ УГОЛ треугольника — угол, смежный с каким-нибудь внутренним углом треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

Аналогично определяется внешний угол выпуклого многоугольника. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника всегда равна 2π, если брать по одному углу при каждой вершине.



$\angle DAB$ — внешний угол ΔABC при вершине A.
$\angle DAB = \angle B + \angle C$

ВОЗРАСТАНИЕ ФУНКЦИИ — одна из характеристик функции *(см. монотонная функция, функция возрастающая)*.

ВОЗРАСТАЮЩАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ — такая прогрессия, у которой разность больше нуля.

Например: (a_n) — арифметическая прогрессия; $a_n = n + 4$ — формула n-го члена.

$a_1 = 5$; $a_2 = 6$; $a_3 = 7$ и т.д.; $d = 1$.

Такая арифметическая прогрессия является возрастающей.

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ — такая прогрессия, у которой знаменатель больше единицы и первый член положителен. Например: (b_n) — геометрическая прогрессия; $b_1 = 6$; $q = 2$; $b_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ — формула n-го члена.

Такая геометрическая прогрессия является возрастающей.

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность (x_n), у которой каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$.

Например: последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = n^2$ (n — натуральное число). $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$ и т.д.

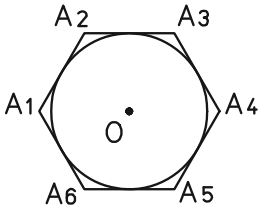
Последовательность (x_n) является возрастающей.

ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

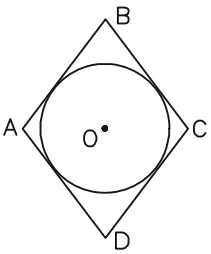
В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника. Радиус вписанной в треугольник окружности вычисляется по формуле: $r = \dfrac{S_\Delta}{p}$, где S_Δ — площадь треугольника, p — полупериметр.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах. Центр окружности, вписанной в правильный многоугольник, совпадает с центром окружности, описанной около этого многоугольника. Причем радиусы этих окружностей связаны следующей формулой: $r = R\cos\dfrac{180^0}{n}$, где n — количество сторон многоугольника.

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны. Поэтому из всех параллелограммов только в ромб можно вписать окружность.



Окружность вписана в шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



Окружность вписана в ромб $ABCD$.

ВПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК — многоугольник, все вершины которого принадлежат окружности, а сама окружность называется описанной около этого многоугольника.

Около всякого треугольника можно описать окружность и только одну. Центр описанной окружности около треугольника — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Радиус описанной около произвольного треугольника окружности вычисляется по следующим формулам:

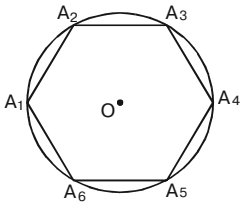
$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sin\gamma};$$

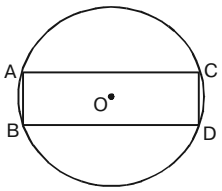
$$R = \frac{abc}{4S_\Delta}, \quad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр, S_Δ — площадь треугольника, α, β, γ — углы треугольника, лежащие соответственно против сторон a, b, c.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и только одну. Сторону правильного вписанного многоугольника можно вычислить по следующим формулам: $a_n = 2R\sin\dfrac{180^0}{n}$, где n — количество сторон правильного многоугольника. В частности: $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$.

У любого четырехугольника, вписанного в окружность, суммы пар противоположных углов равны 180^0. Поэтому из всех параллелограммов только прямоугольники обладают тем свойством, что вокруг них можно описать окружность, а из всех трапеций вписанной в окружность может быть только равнобедренная трапеция.



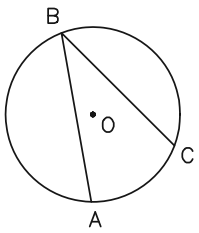


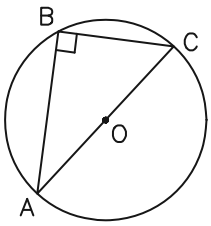
Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и прямоугольник $ABCD$ — многоугольники, вписанные в окружности.

ВПИСАННЫЙ УГОЛ. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Если вписанный угол опирается на диаметр, он является прямым.

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ $\qquad$ $\angle ABC = 90^0$

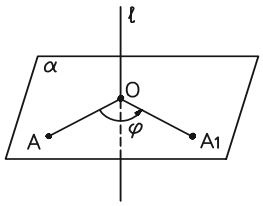




ВРАЩЕНИЕ вокруг оси l на угол φ — отображение пространства на себя, при котором:

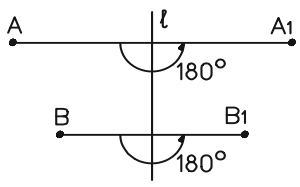
1. точки оси l остаются неподвижны;

2. точка A, не принадлежащая оси l, переходит в точку A_1 такую, что A и A_1 лежат в плоскости α, перпендикулярной оси l, а $\angle A0A_1 = \varphi$. l — ось вращения, φ — угол вращения.



Точка A при вращении вокруг оси l на угол φ переходит в точку A_1, причем A и A_1 принадлежат плоскости α, перпендикулярной оси l.

Если угол вращения равен 180 градусам, то вращение является осевой симметрией относительно оси l.



Точки A и B при вращении вокруг оси l на угол 180^0 переходят в точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно l.

Вращение вокруг оси l на угол φ является движением, так как сохраняет расстояние между точками.

ВЫДЕЛЕНИЕ КВАДРАТА ДВУЧЛЕНА — тождественное преобразование трехчлена, при котором данный трехчлен представляют в виде суммы квадрата двучлена и некоторого числового или буквенного выражения.

Например:

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$;

$x^2 - 8x + \ +18 = x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 18 = (x-4)^2 + 2.$

ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ за скобки — тождественное преобразование многочлена, при котором многочлен раскладывается на множители с помощью распределительного закона умножения относительно сложения и вычитания.

Например:

$19x^2 - 5xy = x(19x - 5y)$;

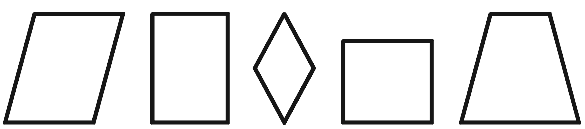
$28a^5b^6 - a^3b^2 + ab = ab(28a^4b^5 - a^2b + 1)$.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК. Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две соседние вершины.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180^0$.

ВЫПУКЛЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК — частный случай выпуклого многоугольника. Каждая диагональ выпуклого четырехугольника разделяет его на два треугольника. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 360 градусам.

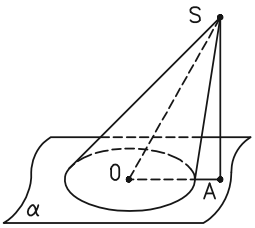
В школе изучают только выпуклые четырехугольники. Частными случаями выпуклых четырехугольников являются параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат и трапеция

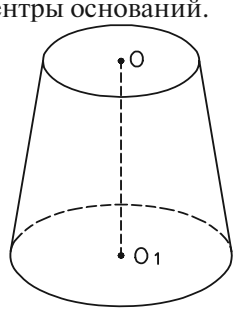


(см. четырехугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция).

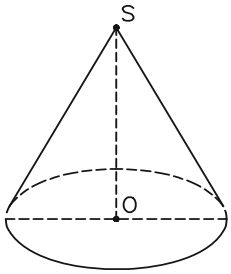
ВЫСОТА КОНУСА — перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания *(см. конус)*.

Если конус прямой круговой, то высотой этого конуса является отрезок, соединяющий вершину конуса и центр основания. Высотой усеченного конуса является отрезок, соединяющий центры оснований.





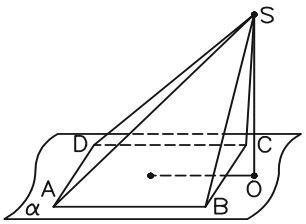
OO_1 — высота усеченного конуса.



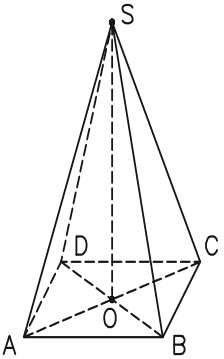
SO — высота прямого кругового конуса.

ВЫСОТА ПИРАМИДЫ — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания *(см. пирамида)*.

Высотой правильной пирамиды является отрезок, соединяющий вершину пирамиды и центр многоугольника, являющегося основанием пирамиды.



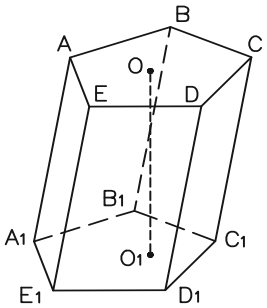
$SO \perp \alpha$; SO — высота наклонной пирамиды; α — плоскость основания.



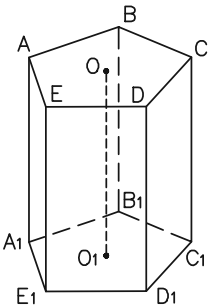
$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида SO — высота пирамиды.

ВЫСОТА ПРИЗМЫ — отрезок прямой, перпендикулярной основаниям призмы *(см. призма)*.

Высотой правильной призмы является отрезок, соединяющий центры многоугольников, являющиеся основаниями призмы.



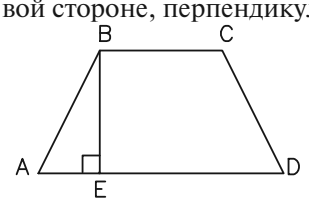
$OO_1 \perp (ABC)$;
$OO_1 \perp (A_1B_1C_1)$;
OO_1 — высота призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



OO_1 — высота правильной пятиугольной призмы.

ВЫСОТА ТРАПЕЦИИ — перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание *(см. трапеция)*.

Высота прямоугольной трапеции равна боковой стороне, перпендикулярной основаниям.

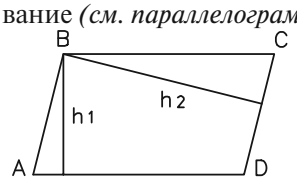


BE — высота трапеции $ABCD$.



CE — высота прямоугольной трапеции $ABCD$.

ВЫСОТА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА — перпендикуляр, проведенный из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание *(см. параллелограмм)*.



h_1 — высота параллелограмма $ABCD$ опущенная на сторону AD (основание).

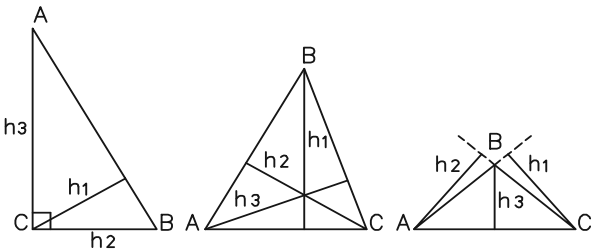
h_2 — высота параллелограмма $ABCD$, опущенная на сторону CD (основание).

ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА — перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой. А высоты равностороннего треугольника являются

медианами и биссектрисами *(см. треугольник, замечательные точки)*.

У прямоугольного треугольника две высоты совпадают с его катетами, а третья высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, лежит внутри треугольника. Эта высота делит прямоугольный треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

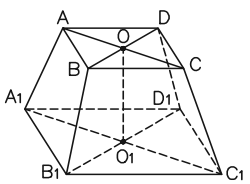
В остроугольном треугольнике высоты располагаются внутри его, а у тупоугольного треугольника высоты, проведенные из вершин острых углов, лежат вне его *(см. треугольник, прямоугольный треугольник, равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник, замечательные точки)*.



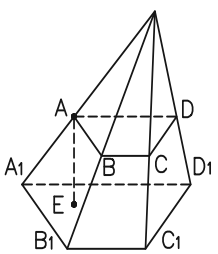
h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника.

ВЫСОТА УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ — отрезок прямой, перпендикулярной основаниям, с концами на плоскостях основания усеченной пирамиды *(см. усеченная пирамида)*.

Высотой правильной усеченной пирамиды является отрезок, соединяющий центры правильных многоугольников, являющихся основаниями пирамиды.



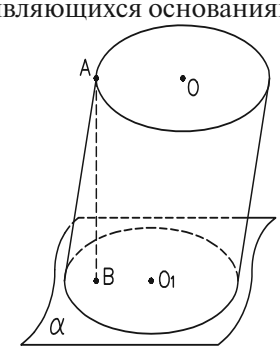
OO_1 — высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



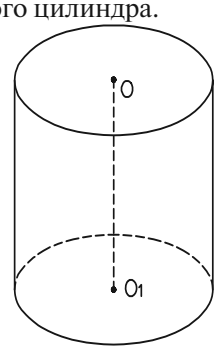
$AE \perp (A_1B_1C_1)$
AE — высота усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

ВЫСОТА ЦИЛИНДРА — отрезок прямой перпендикулярной основаниям, с концами на плоскостях основания цилиндра *(см. цилиндр)*.

Высотой прямого кругового цилиндра является отрезок, соединяющий центры окружностей, являющихся основаниями этого цилиндра.

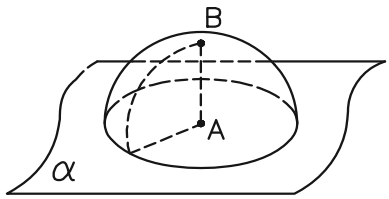


$AB \perp \alpha$;
AB — высота наклонного цилиндра;
α — плоскость основания.



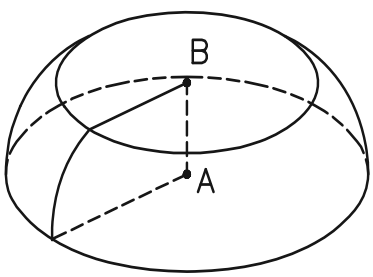
O и O_1 — центры оснований прямого кругового цилиндра;
OO_1 — высота.

ВЫСОТА ШАРОВОГО СЕГМЕНТА, полученного при вращении кругового сегмента вокруг радиуса, перпендикулярного его хорде, — отрезок радиуса, принадлежащий одновременно оси вращения и круговому сегменту *(см. шаровой сегмент)*.



α — плоскость основания шарового сегмента; $AB \perp \alpha$, A — центр основания; AB — высота шарового сегмента

ВЫСОТА ШАРОВОГО СЛОЯ — расстояние между основаниями шарового слоя *(см. шаровой слой)*.



A и B — центры оснований шарового слоя. AB — высота шарового слоя.

ВЫЧИТАНИЕ. Вычесть из числа a число b — значит найти такое число x, которое в сумме с числом b дает a, т.е. $x+b=a$. Число x называется разностью чисел a и b и обозначается $a-b$; число a называется уменьшаемым, число b — вычитаемым.

ВЫЧИТАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель.

Например: $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

При вычитании дробей с разными знаменателями нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем вычесть полученные дроби, используя правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Например: $\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}-\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$.

При вычитании чисел, состоящих из целой и дробной части (смешанных), из целой части уменьшаемого вычитают целую часть вычитаемого, а из дробной части уменьшаемого вычитают дробную часть вычитаемого.

Например:

$5\frac{2}{7}-4\frac{1}{7}=1\frac{1}{7}$; $8\frac{6}{7}-5\frac{1}{5}=8\frac{30}{35}-5\frac{7}{35}=3\frac{23}{35}$.

Если дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, то необходимо занять единицу из целой части уменьшаемого и дробную часть уменьшаемого представить в виде неправильной дроби.

Например: $5\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=4\frac{6}{5}-\frac{4}{5}=4\frac{2}{5}$.

При вычитании десятичных дробей необходимо записать числа так, чтобы соответствующие разряды были записаны друг под другом, запятая под запятой.

Например:
$$\begin{array}{r} 34{,}560 \\ -\ 0{,}225 \\ \hline 34{,}335 \end{array}$$

При вычитании рациональных чисел необходимо учесть следующее: чтобы вычесть из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например:

$a-b=a+(-b)$;
$1{,}8-5=1{,}8+(-5)=-3{,}2$;
$9-(-15)=9+15=24$;
$-13-7=-13+(-7)=-20$.

Г

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. Движение точки, описываемое уравнением $y=b\sin(at+\alpha)$, $a>0$, $0\le\alpha<2\pi$, носит название гармонического колебания. Величина, совершающая гармонические колебания, периодически отклоняется в обе стороны от нуля на величину $|b|$, которая называется амплитудой колебания. Наименьший период равен, очевидно, $\frac{2\pi}{a}$. Обратная величина $\frac{a}{2\pi}$ называется частотой колебания. Это число показывает, сколько полных периодов колебаний происходит в единицу времени.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД — числовой ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}+\cdots$, члены которого являются числами, обратными числам натурального ряда.

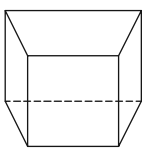
ГЕКСАЭДР — шестигранник. Примерами гексаэдра являются пятиугольная пирамида, параллелепипед, усеченная четырехугольная пирамида, любая четырехугольная призма, правильным гексаэдром можно считать куб *(см. куб)*.

В некоторых учебных пособиях гексаэдр называют эксаэдром *(см. параллелепипед, куб)*.

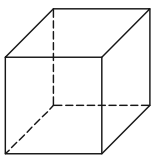
Примеры гексаэдров:



пятиугольная пирамида



четырехугольная призма



куб — правильный гексаэдр

ГЕКТАР — единица измерения площади, применяемая в сельском хозяйстве. Один гектар — это площадь квадрата со стороной 100 *м*.

1 *га* = 10 000 *кв.м*, 1 *га* = 100 *а*.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией. Это число, на которое умножается каждый последующий член, называется знаменателем геометрической прогрессии. Обозначения: (b_n) — геометрическая прогрессия, b_1 — первый член, q — знаменатель геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия задается первым членом b_1 и знаменателем геометрической прогрессии q или формулой n-го члена $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Если $q > 0$ $(q \neq 1)$, то прогрессия является монотонной последовательностью.

Например: $b_1 = -2$, $q = 3$, то $-2, -6, -18, \ldots$ — монотонно убывающая последовательность.

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае прогрессия является постоянной последовательностью.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии, если $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \text{ или } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Если $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

Если число членов прогрессии конечно, то она называется конечной геометрической прогрессией; в противном случае она называется бесконечной геометрической прогрессией.

Общий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ при $|q| < 1$.

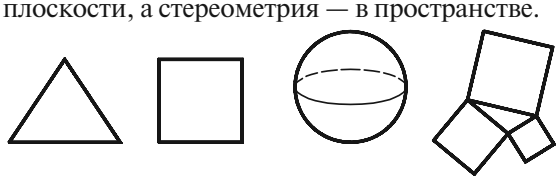
Каждый член знакоположительной геометрической прогрессии представляет собой среднее геометрическое его соседних членов. Исключение представляет первый член, а у конечной прогрессии и последний член, так как они имеют только по одному соседнему члену.

У конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны равны между собой и равны произведению крайних членов.

Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q| < 1$ и $b_1 \neq 0$. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q| < 1$, называется предел суммы n первых ее членов при $n \to \infty$. Формула суммы данной прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

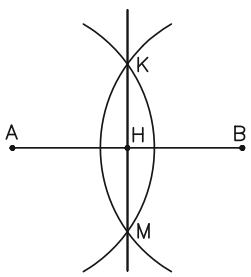
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА. В старых учебниках употребляется термин «геометрическое тело». Под геометрической фигурой понимают всякое множество точек, конечное или бесконечное. Планиметрия изучает геометрические фигуры на плоскости, а стереометрия — в пространстве.



Геометрические фигуры бывают самых разнообразных форм. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть также геометрическая фигура.

Например, на рисунке показаны фигуры: треугольник, квадрат, шар, фигура, состоящая из объединения треугольника и трех четырехугольников.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ — раздел геометрии, изучающий вопросы построения геометрических фигур. Классическими инструментами при построении являются циркуль и линейка. Задачи на построения опираются на аксиомы конструктивной геометрии, которыми являются простейшие задачи на построения. Другими словами, с помощью элементарных задач решаются более сложные.



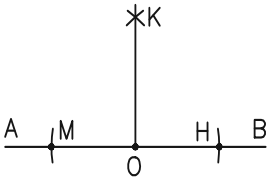
Рассмотрим несколько задач на построение.

Задача 1. Разделить отрезок *AB* пополам.

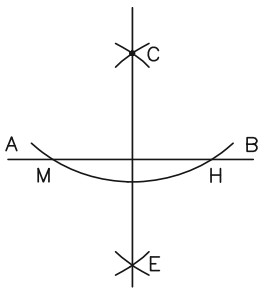
Построение: радиусом, большим половины отрезка AB, проведем из точек *A* и *B* как из центров пересекаю-

щиеся дуги. Через точки пересечения этих дуг проведем прямую *KM*. Прямая и отрезок пересекаются в точке *H*, которая и является серединой отрезка *AB*.

Задача 2. Провести перпендикуляр к данной прямой *AB* через точку *O*, находящуюся на этой прямой.



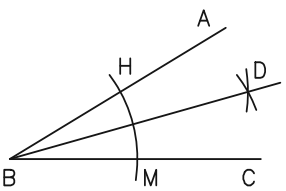
Построение: отложим от точки *O* с помощью циркуля два равных отрезка *OM* и *OH*. Из точек *M* и *H* опишем две пересекающиеся дуги. Точка *K* — точка пересечения дуг. Соединим точки *O* и *K*. *OK* является искомым перпендикуляром.



Задача 3. Провести перпендикуляр к данной прямой *AB* через точку *C*, не принадлежащую этой прямой.

Построение: из точки *C* опишем дугу, пересекающую прямую *AB*. Точки *M* и *H* — точки пересечения дуги и прямой. Затем из точек *M* и *H* провести дуги радиуса *CM*. Соединить точки пересечения *C* и *E*. *CE* — искомый перпендикуляр.

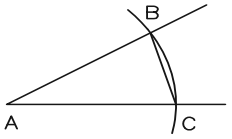
Задача 4. Построить биссектрису угла.

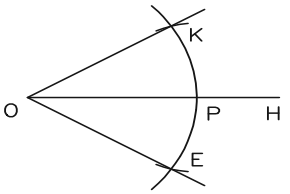


Построение: из вершины угла провести дугу произвольного радиуса, пересекающую стороны угла. Из точек пересечения дуги со сторонами угла провести дуги того же радиуса и соединить полученную точку пересечения дуг с вершиной угла. Полученный луч будет искомой биссектрисой.

Задача 5. Построить угол, равный данному углу *A*.

Построение: проведем произвольный луч *OH*. Из вершины данного угла проведем дугу произвольного радиуса, пересекающую стороны угла в точках *B* и *C*. Из точки *O* проведем дугу того же радиуса, пересекающую луч в точке *P*. Из точки *P* проведем окружность радиуса *BC*, которая пересечет уже построенную дугу в двух точках *K* и *E*. Соединим точки *K* и *E* с точкой *O*. Получили угол *KOH* и угол *EOH*, каждый из которых равен углу *BAC*.





Приведем примеры трех классических задач на построение, над решением которых бились математики многих поколений, пока не было доказано, что эти задачи не могут быть решены с помощью линейки и циркуля.

1. Удвоение куба. Если данный куб имеет ребро, равное единице длины, то его объем будет равен кубической единице. Построить ребро куба, объем которого вдвое больше.

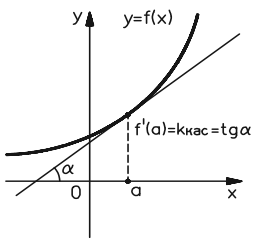
2. Трисекция угла. Разделить произвольный угол на три равных угла.

3. Квадратура круга. Построить квадрат (сторону квадрата), площадь которого равна площади круга, радиус которого принимается за единицу длины.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

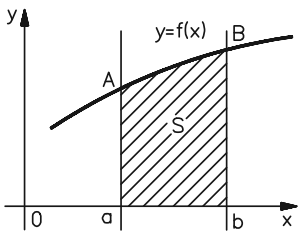
При решении геометрических задач используются геометрические преобразования: параллельный перенос, симметрия, подобие. Каждое отношение эквивалентности понимается в геометрии как существование соответствующего преобразования, устанавливающего соответствие между эквивалентными фигурами. Поэтому преобразования составляют основу каждой геометрической теории. Понятие преобразования стоит в одном ряду с понятием функции, поэтому имеет общематематический характер.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ состоит в том, что значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ *(см. производная)*.

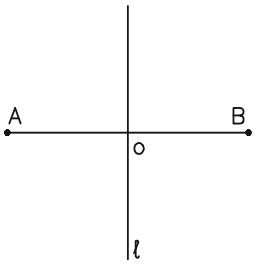


$$f'(a) = k_{кас} = \operatorname{tg}\alpha$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и внутри этого отрезка всюду неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой в декартовой системе координат площадь криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной графиком подинтегральной функции $y = f(x)$, осью *Ox* и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$: $S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$ *(см. интеграл).*



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК. Под этим термином понимается всякое множество или совокупность точек, обладающих каким-то общим для них свойством, но неприсущим остальным точкам, не принадлежащих данному множеству или совокупности. В последнее время этот термин стал реже употребляться.



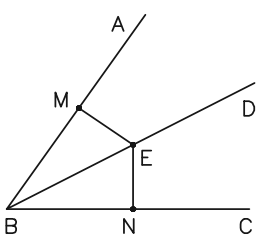
Примеры.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек *A* и *B*, является прямая, перпендикулярная отрезку *AB* и проходящая через его середину.

Даны точки *A* и *B*, прямая *l* перпендикулярна отрезку *AB*, причем $AO = OB$. Прямая *l* — геометрическое место точек, равноудаленных от точек *A* и *B* на плоскости.

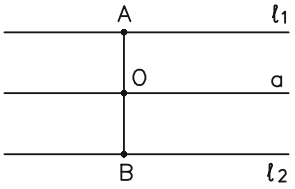
Если рассматривать точки *A* и *B* в пространстве, то геометрическим местом точек, равноудаленных от точек *A* и *B*, будет плоскость, проходящая через середину отрезка *AB* и перпендикулярно прямой *AB*.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, является биссектриса этого угла.



Дан угол *ABC*, *BD* — биссектриса $\angle ACB$. Луч *BD* — геометрическое место точек, равноудаленных от лучей *BA* и *BC*, т.е. $EM \perp BA$; $EN \perp BC$ и $EM = EN$.

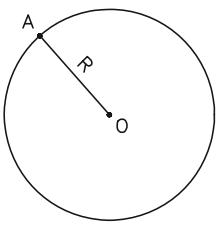
Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние *d*, представляет собой пару прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на расстояние *d*.



Дана прямая *a*, прямые l_1 и l_2 параллельны прямой *a* и находятся на расстоянии *d* от прямой *a*, т.е. $l_1 \| l_2$ и $OA \perp l_1$; $OB \perp l_2$ и $OA = OB = d$. Прямые l_1 и l_2 являются геометрическим местом точек, равноудаленных от прямой *a* на плоскости.

Если рассматривать прямую *a* в пространстве, то геометрическим местом точек, равноудаленных от прямой *a*, является круговая цилиндрическая поверхность.

Геометрическим местом точек, удаленных от данной точки *O* на расстояние *R*, является окружность с центром в точке *O* и радиусом *R*.



Окружность является геометрическим местом точек, равноудаленных от точки на данное расстояние, на плоскости.



Если рассматривать точку *O* в пространстве, то геометрическим местом точек, равноудаленных от точки *O* на расстояние *R*, является сфера с центром в точке *O* и радиусом *R*: $OA = OB = R$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ *n* положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ есть арифметический корень *n* степени из произведения этих чисел:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

ГЕОМЕТРИЯ — одна из древнейших частей математики, изучающая пространственные отношения и формы тел. Из геометрии зародилась математика как наука. В школьном курсе изучается планиметрия и стереометрия. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости, а в стереометрии изучаются свойства фигур в про-

странстве. Широко известны термины начертательная геометрия, аналитическая геометрия, геометрия Лобачевского и другие. Два тысячелетия изучалась и не вызывала сомнений классическая евклидова геометрия. Наш русский ученый Лобачевский совершил революцию в математике. Именно с его научных открытий начинается эра неевклидовой геометрии.

Но вернемся к истокам геометрии. Люди с незапамятных времен использовали геометрические знания в быту. Отличными геометрами были древние египтяне и древние вавилоняне. Египетские пирамиды много веков поражают человеческое воображение. Но как наука геометрия сложилась в Древней Греции. Античная традиция единодушно называет Фалеса отцом геометрии. Он много путешествовал, был в Египте, Лидии и, возможно, Вавилоне. В своих трудах использовал все те знания, которые получил во время путешествий. Его дело продолжил Пифагор, который считал Фалеса своим духовным наставником в науке. Пифагор и его ученики систематизировали геометрические знания в теоретическое учение о свойствах абстрактных геометрических.

ГЕРОНА ФОРМУЛА.

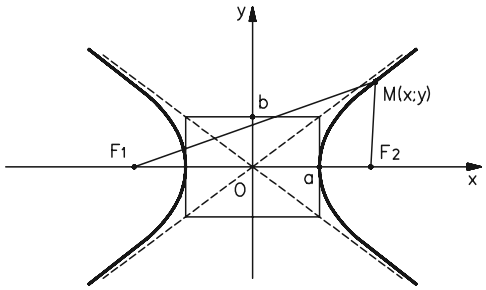
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр, S — площадь треугольника.

ГИПЕРБОЛА — график обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$. Такое определение рассматривается в школьной программе. А вообще, гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная. Иначе, гипербола — кривая, являющаяся пересечением кругового конуса плоскостью, параллельной двум образующим конуса.

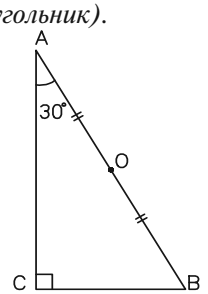
Если за ось Ox принять прямую F_1F_2, а за ось Oy принять прямую, ей перпендикулярную и проходящую через середину отрезка F_1F_2, получим каноническое, или простейшее, уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1.$$



F_1 и F_2 — фокусы гиперболы
a и b — полуоси гиперболы
$|MF_1-MF_2|=2a$
Ox и Oy — оси симметрии гиперболы

ГИПОТЕНУЗА. Гипотенузой называется сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, а две другие называются катетами. Любой из катетов меньше гипотенузы. Длину гипотенузы можно найти по теореме Пифагора, зная длины катетов. В прямоугольном треугольнике с углом в 30^0 катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы. На середине гипотенузы прямоугольного треугольника лежит центр описанной около этого треугольника окружности *(см. прямоугольный треугольник)*.



ΔABC — прямоугольный треугольник
$\angle C$ — прямой, $\angle A=30^0$
AB — гипотенуза
$AB=2CB$
$AO=OB$, O — центр описанной окружности

ГОМОТЕТИЯ — один из видов преобразования плоскости и пространства. Пусть O некоторая точка пространства и $k\neq 0$ — действительное число. Гомотетией с центром O и коэффициентом k называется отображение, переводящее каждую точку M в такую точку M', что $\overline{OM'}=k\overline{OM}$.

Гомотетия обладает следующими свойствами:

1. При гомотетии с центром O и коэффициентом k все расстояния умножаются на $|k|$, т.е. если A, B — произвольные точки, A',B' — их образы, то $|A'B'|=|k|\cdot|AB|$.

2. Если g — гомотетия с центром O и коэффициентом k, то для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $g(\vec{a})=k\vec{a}$.

3. При гомотетии любая прямая переходит в параллельную ей прямую.

4. При гомотетии любая плоскость переходит в параллельную ей плоскость.

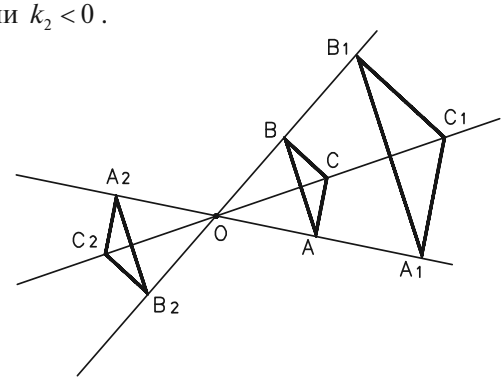
5. При гомотетии сохраняются углы между векторами, углы между прямыми, угол между прямой и плоскостью, двугранные углы.

6. Гомотетия с центром O и коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$.

7. Всякое подобие h можно представить в виде композиции гомотетии g и движения f, т.е. $h = f \circ g$.

Треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно O с коэффициентом гомотетии $k_1 > 0$.

Треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_2B_2C_2$ относительно O с коэффициентом гомотетии $k_2 < 0$.



Если имеем гомотетию с центром O и коэффициентом $k = -1$, то такая гомотетия является центральной симметрией с центром O.

Всякая гомотетия является подобием, но не всякое подобие является гомотетией *(см. подобие)*.

ГРАДУС. Градусом называют такую единицу измерения плоских углов, которая равна $\frac{1}{90}$ величины прямого угла или $\frac{1}{180}$ величины развернутого угла. Обозначается 1^0.

ГРАДУСНАЯ МЕРА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ — градусная мера соответствующего центрального угла. Градусная мера дуги AB обозначается $\cup AB$.

ГРАДУСНАЯ МЕРА УГЛА. Углы измеряются с помощью транспортира. В соответствии с градусной мерой угла существует классификация углов:

от 0^0 до 90^0 — острые углы,

90^0 — прямой угол,

от 90^0 до 180^0 — тупые углы,

180^0 — развернутый угол,

360^0 — полный угол.

ГРАНИЦА КРУГА — окружность с тем же центром и радиусом, что и у круга.

ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА данной фигуры — точка пространства, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Граничные точки области образуют границу области. Область вместе с ее границей называется телом. Граница тела называется поверхностью тела.

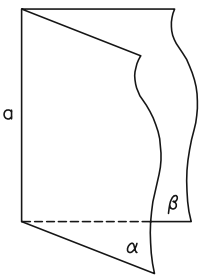
Например, сфера состоит из граничных точек соответствующего шара, следовательно, сферу можно определить как границу шара.

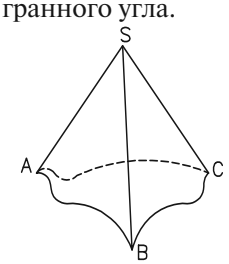
Если мы рассмотрим интервал (2, 5), то его граничными точками являются точки, соответствующие числам 2 и 5.

Граничные точки множества могут как принадлежать множеству, так и не принадлежать.

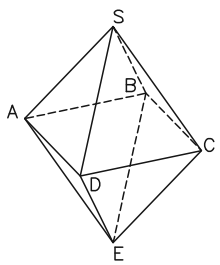
ГРАНЬ.

Грань двугранного угла. Пара полуплоскостей с общей границей образуют двугранный угол, сами полуплоскости называются гранями двугранного угла *(см. двугранный угол)*. На рисунке плоскости α и β — грани двугранного угла.



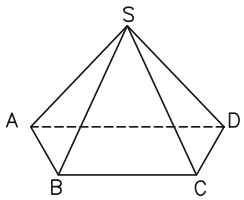


Грань трехгранного угла. Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac). Эти углы называются гранями трехгранного угла. Аналогично определяется понятие граней многогранного угла. На рисунке плоские углы ASB, BSC и ASC — грани трехгранного угла.



Грань многогранника. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются гранями многогранника *(см. многогранник)*. На рисунке треугольники SAB; SBC; SCD; SDA; EAB; EBC; ECD; EDA — грани октаэдра.

Грани пирамиды. Боковые грани — треугольники, основание — произвольный многоугольник *(см. пирамида)*. На рисунке треугольники *SAB*; *SBC*; *SCD* и *SDA* — боковые грани пирамиды *SABCD,* четырехугольник *ABCD* — грань, являющаяся основанием.



Грани призмы. Боковые грани — параллелограммы, основания — равные многоугольники *(см. двугранный угол, трехгранный угол, многогранник, пирамида, призма)*.

ГРАФИК ФУНКЦИИ. Линия, определяемая уравнением вида $y = f(x)$, называется графиком функции $f(x)$. Другими словами, графиком функции относительно данной системы координат называется множество точек плоскости, абсциссами которых являются значения аргумента *x*, а ординатами — соответствующие им значения функции $y = f(x)$. График функции дает наглядное представление о свойствах функции. График также является одним из способов задания функции.

График квадратичной функции — парабола *(см. квадратичная функция)*.

Графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая линия, пересекающая ось *Oy* в точке с ординатой *b* и наклоненная к оси *Ox* под углом, тангенс которого равен *a (см. линейная функция)*.

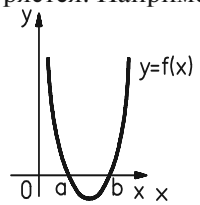
График обратной пропорциональной зависимости называется гиперболой. Иногда его называют равнобочной гиперболой *(см. обратная пропорциональность)*.

График функции $y = \sin x$ называется синусоидой. Графиком функции $y = \cos x$ тоже служит синусоида, но сдвинутая по оси *Ox* влево на $\frac{\pi}{2}$ *(см. синус)*.

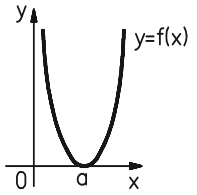
График функции $y = \operatorname{tg} x$ называется тангенсоидой *(см. тангенс)*.

С помощью некоторых преобразований функции можно построить графики более сложных функций. Для этого используется параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия и т.п.

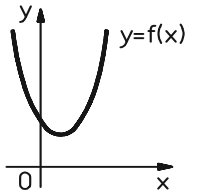
ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ. Чтобы решить графически неравенство вида $f(x) > 0$, необходимо построить график функции $y = f(x)$ и по графику определить те значения *x*, для которых неравенство удовлетворяется. Например:



$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$

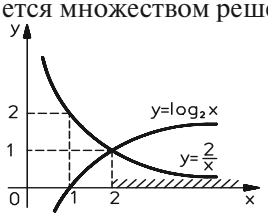


$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; a) \cup (a; +\infty)$



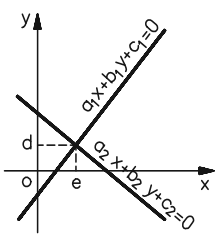
$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

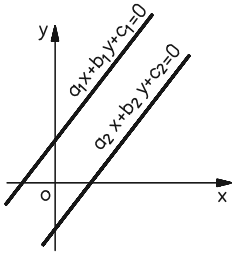
Если неравенство задано в виде $f(x) > g(x)$, то можно построить графики двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и по чертежу определить, для каких значений *x* первый график располагается выше второго. Множество значений таких *x* является множеством решений неравенства.



Например:
Решить графически неравенство $\log_2 x > \frac{2}{x}$.
Ответ: $(2; +\infty)$.

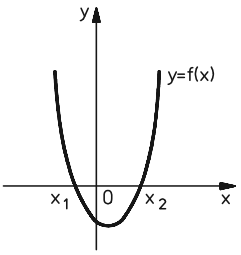
ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ. Для этого необходимо в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков. Например: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$.





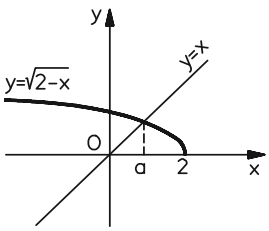
В первом случае решением системы уравнений будет пара чисел $(e; d)$, во втором случае — решений нет.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ.

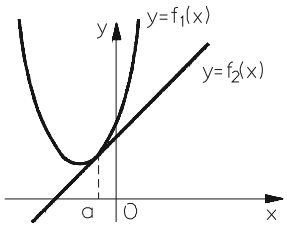


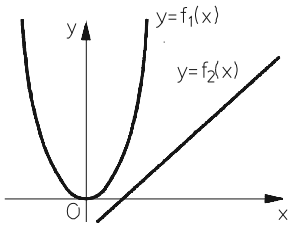
Графическое решение уравнений с одной переменной вида $f(x)=0$. Необходимо построить график функции $y=f(x)$, абсциссы точек пересечения графика функции с осью *Ox* будут являться корнями данного уравнения. Например: $f(x)=0$ — уравнение, x_1, x_2 — корни уравнения

Иногда удобнее разбить функцию на две функции, графики которых проще графика функции $y=f(x)$. Другими словами, представить уравнение вида $f(x)=0$ в виде $f_1(x)=f_2(x)$. Построить графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, найти точки пересечения графиков. Абсциссы точек пересечения и будут являться корнями данного уравнения. Например: $\sqrt{2-x}=x$. $x=a$ — корень уравнения.



Если графики функций будут касаться, то уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки касания. Если графики функций не пересекаются, то уравнение не имеет корней.





Д

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА. Определение движения одинаково в плоскости и в пространстве. Движением (перемещением) пространства называется отображение пространства на себя, сохраняющее расстояние между точками. Иначе говоря, если движение *f* переводит точки *A*, *B* в точки A_1, B_1 (это записывается так: $A \xrightarrow{f} A_1$, $B \xrightarrow{f} B_1$), то $AB = A_1B_1$.

Примеры движений пространства.

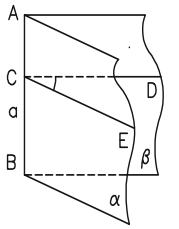
1. Тождественное преобразование пространства.
2. Центральная симметрия относительно точки *O* является движением.
3. Параллельный перенос является движением.
4. Осевая симметрия является движением.
5. Симметрия относительно плоскости также относится к числу движений.
6. Поворот пространства вокруг оси *l* является также движением.

Свойства движения пространства включают в себя свойства движения плоскости.

Движение переводит отрезок в равный ему отрезок, угол — в равный ему угол. При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения. Движение пространства переводит плоскость в плоскость, параллельные плоскости в параллельные плоскости, прямую переводит в прямую, параллельные прямые переходят в параллельные прямые, полуплоскость — в полуплоскость, двугранный угол — в двугранный угол, ему равный. При движении взаимно-перпендикулярные прямые переходят во взаимно-перпендикулярные прямые. Любое движение сохраняет векторные операции.

Движения разбивают на два рода. Движение первого рода — такие движения, которые не меняют ориентацию пространства. Движения, изменяющие ориентацию на противоположную, называются движениями второго рода.

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. Две различные полуплоскости, имеющие общую прямую, называются двугранным углом. Общая прямая называется ребром двугранного угла, а сами полуплоскости — его гранями. Если полуплоскости обозначены α и β, прямая, являющаяся ребром, *a*, то двугранный угол обозначается $\angle\alpha a\beta$. Иногда обозначают $\angle a$, $\angle AB$, бывают и другие обозначения.



$CD \perp AB$
$CE \perp AB$
$\angle DCE$ — линейный угол двугранного угла $\angle\alpha a\beta$.

При пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру, получается угол, который называется линейным углом двугранного угла. За меру двугранного угла принимают меру соответствующего ему линейного угла. Иногда линейный угол называют плоским. Градусная мера двугранного угла изменяется от 0^0 до 180^0, в отличие от угла между плоскостями, градусная мера которого изменяется от 0^0 до 90^0.

Двугранные углы равны, если их линейные углы равны.

ДВУЧЛЕН — многочлен, состоящий из двух членов. Членом многочлена является одночлен. Например: $a+b$; x^2+y^2.

ДВУЧЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ. Двучленным уравнением называется уравнение вида $ax^n+b=0$. В области действительных чисел при четных *n* уравнение $y^n-1=0$ имеет два действительных корня, а уравнение $y^n+1=0$ ни одного. При нечетных *n* уравнения $y^n-1=0$ и $y^n+1=0$ имеют по одному действительному корню.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. Множеством действительных чисел является объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел. Существуют три группы аксиом действительных чисел. Любое действительное число можно изобразить на координатной прямой так, что каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой и каждой точке координатной прямой соответствует действительное число. Действительные числа иначе называют вещественными числами.

ДЕЙСТВИЯ С НЕРАВЕНСТВАМИ.

1. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого производится вычитание. Например:

если $a>b$, $c>d$, то $a+c>b+d$;

если $a>b$, $c>d$, то $a-d>b-c$.

2. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать. Неравенства противоположного смысла можно почленно делить, оставляя знак того неравенства, которое является делимым. Например: если $a>b>0$; $c>d>0$, то $ac>bd$; $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

3. Обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень. Например: если $a>b>0$, $k\in\mathbf{N}$, то $a^k>b^k$.

4. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же произвольное число, то неравенство сохранит свой знак. Например: если $a>b$, то $a+p>b+p$; $a-p>b-p$ (p — произвольное число).

5. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то неравенство останется справедливым. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то неравенство поменяет смысл на противоположный. Например:

если $a>b$, $p>0$, то $ap>bp$, $\frac{a}{p}>\frac{b}{p}$;

если $a>b$, $p<0$, то $ap<bp$, $\frac{a}{p}<\frac{b}{p}$.

ДЕЛЕНИЕ. Разделить число *a* на число *b* — значит найти такое число *x*, при умножении которого на число *b* получается число *a*, т.е. $a:b=x$, $x\cdot b=a$.

Деление — действие, обратное действию умножения.

Деление обыкновенных дробей. Чтобы разделить одну дробь на другую, необходимо дробь, являющуюся делимым, умножить на дробь, обратную делителю.

Например:

$$\frac{5}{7}:\frac{2}{21}=\frac{5}{7}\cdot\frac{21}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2};$$

$$2\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}.$$

Деление на десятичную дробь. Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько знаков, сколько их после запятой в делителе, а затем выполнить деление получившихся чисел.

Например:

4,5 : 1,25=450 : 125=3,6;

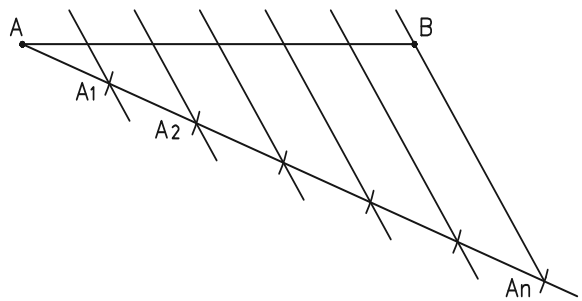
12,831 : 2,73=1283,1 : 273=4,7.

Деление отрицательных чисел. Если $a<0$, $b<0$, то $a:b>0$. Если $a<0$, $b>0$, то $a:b<0$. Если $a>0$, $b<0$, то $a:b<0$.

Деление окружности. Задача деления окружности на равные части сводится к тому, что в эту

окружность необходимо вписать правильный многоугольник. Самыми простыми являются: деление окружности на четыре равные части — провести два взаимно перпендикулярных диаметра; деление окружности на шесть равных частей — построить шесть последовательных хорд, равных радиусу. Древнегреческие математики умели делить окружность циркулем и линейкой на 3, 4, 5, 15 частей, при этом неограниченно удваивать число делений. Любимой задачей Гаусса была задача по делению круга на 17 равных частей. На его могиле изображен правильный 17-угольник.

Деление отрезка на *n* равных частей. Дан отрезок *AB*, необходимо его разделить на *n* равных частей. Для этого из конца отрезка, допустим *A*, проведем луч, лучше под острым углом. Отложим на луче равные отрезки AA_1, A_1A_2, … $A_{n-1}A_n$. Соединим A_n с *B* и через остальные точки деления проведем прямые, параллельные A_nB. Эти прямые рассекут отрезок на *n* равных частей.



Деление с остатком. Чтобы найти делимое при делении с остатком, надо умножить неполное частное на делитель и к полученному произведению прибавить остаток. Например:

23 : 4=5 (остаток 3),

где 23 — делимое, 4 — делитель, 5 — неполное частное, 3 — остаток,

$23=4 \cdot 5+3$.

ДЕЛИТЕЛЬ ЧИСЛА — всякое число *b*, на которое *a* делится без остатка, называется делителем числа *a*. Общим делителем нескольких натуральных чисел называется натуральное число, на которое делится каждое из этих чисел. 1 является общим делителем для всех натуральных чисел. Наибольшее число из общих делителей называется наибольшим общим делителем. Если наибольший общий делитель двух чисел равен 1, то такие числа называются взаимно простыми *(см. взаимно простые числа)*.

ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — форма записи действительного числа в десятичной позитивной системе счисления. В средней школе дается упрощенное понятие десятичной дроби. Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде десятичной дроби. Или десятичная дробь — частный случай обыкновенной дроби, если знаменатель есть целая степень числа 10. Например: $\frac{7}{10}=0,7$; $\frac{15}{1000}=0,015$; $\frac{44}{10}=4,4$.

Если к десятичной дроби справа приписать один или несколько нулей, то значение дроби не изменится. Если десятичная дробь оканчивается нулями, то эти нули можно отбросить, при этом значение дроби не изменится. Например: 4,2=4,200; 0,120=0,12.

Если перенести запятую вправо (влево) на *n* знаков, то десятичная дробь увеличится (уменьшится) в 10^n раз.

Чтобы обыкновенную дробь обратить в десятичную, необходимо числитель разделить на знаменатель. Если процесс деления имеет конец, то десятичная дробь будет конечной, если процесс деления бесконечен, то дробь будет бесконечной. Бесконечная десятичная дробь, которая, начиная с некоторого разряда, образуется последовательным приписыванием справа одного и того же числа, называется периодической, а повторяющееся число будет ее периодом. Если период начинается сразу после запятой, то десятичная дробь называется чистой периодической, если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то десятичная дробь называется смешанной периодической.

Например:

$\frac{1}{3}=0,3333\ldots=0,(3)$ — чистая периодическая дробь.

$\frac{19}{90}=0,21111\ldots=0,2(1)$ — смешанная периодическая дробь.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ — позиционная система счисления, в основе которой лежит число 10. Числа записываются с помо-