

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. К. Белый

Математика не для ЕГЭ

Прогрессии

Учебное пособие для абитуриентов
и студентов первого курса

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2016

УДК 512.1

ББК 22.14

Б439

Рецензенты:

С.С. Платонов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии ПетрГУ;

Н. А. Киль, учитель первой категории СОШ № 42;

Е. С. Лоцман, кандидат педагогических наук, директор СОШ № 42

Белый, Евгений Константинович.

Б439 Прогрессии : учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. бюджет. образоват. учреждение высш. образования Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2016. – 132 с. – (Математика не для ЕГЭ).

ISBN 978-5-8021-2964-7

Учебное пособие ориентировано на широкий круг читателей: учащихся старших классов, абитуриентов, студентов, а также учителей математики средней школы.

ISBN 978-5-8021-2964-7

УДК 512.1

ББК 22.14

© Белый Е. К., 2016

© Петрозаводский государственный университет, 2016

Содержание

Предисловие	4
Глава 1. Арифметические прогрессии	7
§ 1.1. Основные понятия	7
§ 1.2. Фигурные числа	12
§ 1.3. Примеры	14
Глава 2. Геометрические прогрессии	32
§ 2.1. Основные понятия	32
§ 2.2. Примеры	36
§ 2.3. Арифметико-геометрические прогрессии . . .	55
Глава 3. Финансовые вычисления	65
§ 3.1. Простые проценты	65
§ 3.2. Сложные проценты	74
§ 3.3. Финансовые потоки	83
Задачи	95
Ответы	116
Биографические справки	125
Список литературы	128

Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади нее на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползет сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползет еще десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.

Зенон Элейский

Предисловие

⇒7 Дорогой читатель! В новой книге серии «Математика не для ЕГЭ» получили дальнейшее развитие принципы, заложенные в «Алгебраических уравнениях»: доступное изложение материала, плавный переход от программы средней школы к вузовской и развитая навигация.

Предлагаемая книга ориентирована на самостоятельную работу. В середине прошлого века эксперименты психологов-когнитологов ряда стран подтвердили тот факт, что наиболее эффективно обучение идет на границе «известного» и «неизвестного». Процесс приобретения новых знаний замедляется, если почти все непонятно или почти все понятно. Поэтому при обучении в группе в незавидном положении оказываются как те, кто безнадежно отстал, так и те, кто ушел далеко вперед. Навыки

самостоятельной работы с книгой дают человеку возможность самому выбирать маршруты в бескрайнем океане знаний, делают его менее зависимым от среды обучения.

Книга посвящена арифметическим и геометрическим прогрессиям: первые две главы собственно прогрессиям, а третья – их приложениям в финансовых вычислениях. Не каждый школьник может ответить на вопрос: зачем столько времени надо уделять прогрессиям? Тем не менее с этими замечательными последовательностями нам приходится сталкиваться довольно часто. Так, взбегаая по лестнице, вы, если, конечно, не имеете обыкновения перепрыгивать через ступеньки, поднимаетесь с каждым шагом на постоянную величину по закону арифметической прогрессии. В записи числа веса его разрядов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 10, т. е. $\{1, 10, 100, 1000 \dots\}$. Термин «прогрессия» происходит от латинского *progressio*, что значит движение, рост. Прогрессии интересовали людей с тех пор, как возникли первые цивилизации. Еще в клинописных текстах Древнего Вавилона, относящихся ко II тысячелетию до н. э., были обнаружены задачи на финансовые вычисления, решение которых предполагает умение обращаться с такими последовательностями, например: «За какое время удвоится денежная сумма, ссуженная под 20 годовых процентов?». Другая задача зафиксирована на найденном в Египте папирусе (XVII–XVIII вв. до н. э.):

«Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим составит $\frac{1}{8}$ меры». В Древней Греции III в. н. э. формула суммы первых n членов арифметической прогрессии была известна Архимеду и Диофанту, а в Индии V в. н. э. астроному и математику Ариабхате. В средневековой Европе формула впервые появилась в «Книге абака» Леонардо Фибоначчи (XII в.). И по сей день **на арифметических и геометрических прогрессиях строится вся классическая теория финансовых вычислений.** А согласитесь, трудно найти сферу деятельности, в которой знакомство с основами финансовых вычислений было бы лишним. Надеемся, нам удалось убедить сомневающихся в том, что изучение прогрессий отнюдь не праздное занятие. Тогда в путь!

Автор благодарит всех, кого заинтересовала первая книга «Алгебраические уравнения», кто высказал свои замечания и пожелания, а также коллектив школы № 42 и директора НОУ «Орбита» Г. А. Крылову за поддержку во время работы над книгой. Как и прежде, замечания и пожелания вы можете направлять по адресу: **belyi@petsu.ru.**

Евгений Белый

Февраль 2016

Глава 1. Арифметические прогрессии

§ 1.1. Основные понятия

$4 \Leftrightarrow 12$ **Арифметическая прогрессия** – это последовательность вещественных чисел, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего путем прибавления к нему некоторой фиксированной величины d : если первый член прогрессии равен a_1 , то для натуральных $n > 1$ справедливо равенство $a_n = a_{n-1} + d$. Формулу, выражающую n -й член последовательности через один или несколько предыдущих, называют **рекуррентной** (от лат. *recurrentis* – возвращающийся). По индукции из заданной выше рекуррентной формулы получим формулу n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, и запишем прогрессию в виде

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d \dots$$

Величину d называют **разностью прогрессии**, или **шагом прогрессии**. Арифметическая прогрессия при $d > 0$ строго монотонно возрастает, при $d < 0$ строго монотонно убывает, при $d = 0$ **стационарна**. Так, ряд натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – прогрессия с первым членом и разностью, равными 1. Для любого члена арифметической прогрессии,

начиная со второго, выполняется равенство

$$\begin{aligned}a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} &\Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}. \quad \text{Действительно,} \\ \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} &= \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2} = \\ &= \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} = a_1 + (n-1)d = a_n.\end{aligned}$$

И наоборот, если z – **среднее арифметическое** x и y , т. е. $z = \frac{x+y}{2}$, то числа x , z и y образуют арифметическую прогрессию. Если нет причин поступить иначе, мы и дальше будем обозначать буквой a с индексом члены арифметической прогрессии, а сумму n первых ее членов S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Знак суммы $\sum$ ввел в XVIII веке Леонард Эйлер. В дальнейшем мы встретим знак $\prod$, которым в XIX веке Карл Гаусс стал обозначать произведение множества индексированных переменных:

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Найдем формулу для S_n . Для этого запишем сумму n первых членов прогрессии в порядке возрастания индексов, а ниже ту же сумму в порядке убывания индексов и сложим величины, попавшие в один столбец:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 S_n = & a_1 & & + & a_2 & & + & \dots & + & a_{n-1} & + & a_n \\
 S_n = & a_n & & + & a_{n-1} & & + & \dots & + & a_2 & + & a_1 \\
 \hline
 2S_n = & a_1 + a_n & & + & a_2 + a_{n-1} & & + & \dots & & & &
 \end{array}$$

В первой строке каждое слагаемое больше предыдущего на величину d . Во второй, наоборот, каждое следующее слагаемое меньше предыдущего на d . Таким образом, суммы элементов соответствующих столбцов не меняются и всегда равны $a_1 + a_n$. Поскольку у нас n столбцов, $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Из равенства $a_n = a_1 + (n - 1)d$ следует:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

Иногда под арифметической прогрессией подразумевают конечное число ее первых членов. Используют даже термин «конечная арифметическая прогрессия». Обычно такое «вольное додумство» не приводит к недоразумениям. Часто при определении арифметической прогрессии полагают $d \neq 0$, т. е. исключают случай стационарной прогрессии. Последнее непринципиально, но в некоторых случаях может вынудить нас делать лишние оговорки, например, в приведенном ниже утверждении о сумме двух арифметических прогрессий.

Определим **сумму двух последовательностей** $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ как последовательность $\{a_n\}$, для членов которой

имеет место равенство $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$. **Произведение последовательности $\{a_n^{(1)}\}$ на число** определим как последовательность произведений соответствующих ее членов на это число. **Линейной комбинацией двух последовательностей $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$** назовем последовательность $\{a_n\} = \alpha\{a_n^{(1)}\} + \beta\{a_n^{(2)}\}$, для членов которой имеет место равенство $a_n = \alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)}$, где α и β – константы. Тогда:
1) сумма двух арифметических прогрессий $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ – арифметическая прогрессия

$$\{a_n\} = \{a_n^{(1)}\} + \{a_n^{(2)}\} = \{a_n^{(1)} + a_n^{(2)}\}, \text{ где } n = 1, 2, \dots,$$

у которой $a_1 = a_1^{(1)} + a_1^{(2)}$, а $d = d^{(1)} + d^{(2)}$;

2) произведение арифметической прогрессии $\{a_n^{(1)}\}$ на число α – арифметическая прогрессия

$$\{a_n\} = \alpha \cdot \{a_n^{(1)}\} = \{\alpha \cdot a_n^{(1)}\}, \text{ где } n = 1, 2, \dots,$$

у которой $a_1 = \alpha a_1^{(1)}$, а $d = \alpha d^{(1)}$;

3) любая линейная комбинация двух арифметических прогрессий $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ – арифметическая прогрессия

$$\{a_n\} = \{\alpha \cdot a_n^{(1)} + \beta \cdot a_n^{(2)}\}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots, \alpha \text{ и } \beta - \text{константы.}$$

Заметим, сумма n первых членов линейной комбинации двух арифметических прогрессий будет линейной комбинацией

сумм прогрессий:

$$a_k = \alpha \cdot a_k^{(1)} + \beta \cdot a_k^{(2)} \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k^{(1)} + \beta \sum_{k=1}^n a_k^{(2)}.$$

Определим две прогрессии $\{\epsilon_n\}$ и $\{\zeta_n\}$:

$$\begin{cases} \{\epsilon_n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \\ \{\zeta_n\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Первая прогрессия стационарная, вторая – последовательность неотрицательных целых чисел. Тогда арифметическую прогрессию $\{a_n\}$ с первым членом a_1 и разностью d можно представить как $\{a_n\} = a_1\{\epsilon_n\} + d\{\zeta_n\}$.

Рассматривают также **арифметические прогрессии второго порядка** – последовательности чисел, разности которых образуют обычную арифметическую прогрессию (прогрессию первого порядка); **арифметические прогрессии третьего порядка** – последовательности чисел, разности которых образуют арифметическую прогрессию второго порядка и т. д. **Арифметической прогрессией n -го порядка**, где $n > 1$, называют последовательность чисел, разности которых образуют прогрессию порядка $n - 1$. Такие прогрессии иногда называют **арифметическими рядами**. Их рассматривали еще в школе Пифагора. Чтобы получить k -й член прогрессии порядка $n + 1$, достаточно найти сумму k первых членов прогрессии порядка n .

Ниже в таблице представлены прогрессии, порожденные натуральным рядом чисел:

Арифметическая прогрессия									Порядок
1	2	3	4	5	6	7	8	...	1-й
1	3	6	10	15	21	28	36	...	2-й
1	4	10	20	35	56	84	120	...	3-й
1	5	15	35	70	126	210	330	...	4-й
1	6	21	56	126	252	462	792	...	5-й
1	7	28	84	210	462	924	1716	...	6-й

Любой прогрессии порядка n соответствует многочлен $P_n(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$, такой, что k -й член прогрессии равен $P_n(k)$. В частности, для прогрессии первого порядка многочлен имеет вид

$$P_1(x) = dx + (a_1 - d) \Rightarrow P_1(1) = a_1, P_1(2) = a_1 + d, \dots;$$

второго порядка –

$$P_2(x) = \frac{d}{2}x^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)x \Rightarrow P_2(1) = a_1, P_2(2) = 2a_1 + d, \dots$$

§ 1.2. Фигурные числа

7 $\Leftrightarrow$ 14 С незапамятных времен люди, оперируя с числами, выстраивали на земле замысловатые фигуры из камешков. С какой целью? Ответить на этот вопрос непросто. Наблюдали ли вы, как ласково раскладывает кошка на пороге хозяйского дома свои ночные трофеи? Она не только аккуратно уложит мышек в ряд, но и отсортирует их

по размеру. А как паук плетет такие идеально симметричные узоры? Снова загадка. Однако вернемся к числам. Пифагорийцы считали, что фигурные числа скрывают тайны мироздания. К ним проявляли интерес Эратосфен, Гипсикл, Диофант Александрийский и другие математики античности. В средние века фигурные числа занимали Пачоли, Кардано, Фибоначчи и др., а в Новое время – Ферма, Коши и Эйлера. Мы же ограничимся только одним классом фигурных чисел – **многоугольными** (рис. 1).

Любая арифметическая прогрессия с $a_n = 1 + (n - 1)d$,

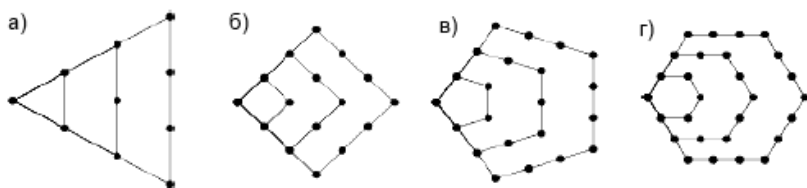


Рис. 1. Фигурные числа: а) треугольные, б) квадратные, в) пятиугольные, г) шестиугольные

где $n = 1, 2, \dots$, а d – целое число, порождает прогрессию второго порядка – последовательность $(d + 2)$ -угольных чисел. Если количество углов многоугольника обозначить m , то исходную прогрессию можно задать формулой $a_n = 1 + (n - 1)(m - 2)$, а соответствующую прогрессию 2-го порядка – $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{[2 + (n - 1)(m - 2)]n}{2}$. Ниже в таблице представлены числа, соответствующие $m = 3, 4, 5, 6$.

Фигура	Числа	S_n
Треугольник	1, 3, 6, 10, 15, ...	$\frac{n(n+1)}{2}$
Четырехугольник	1, 4, 9, 16, 25, ...	n^2
Пятиугольник	1, 5, 12, 22, 35, ...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
Шестиугольник	1, 6, 15, 28, 48, ...	$n(2n-1)$

§ 1.3. Примеры

$12 \Leftrightarrow 32$ Арифметическую прогрессию однозначно определяют значения a_1 и d .

$\Omega 95$ **Пример 1.** Дана прогрессия 1.2, 1.5, 1.8... . Найти a_5 .

Решение. Разность прогрессии $d = 1.5 - 1.2 = 0.3$. Пятый член $a_5 = a_1 + 4d = 1.2 + 4 \cdot 0.3 = 2.4$.

Ответ: 2.4.

Зная любые два члена прогрессии, можно найти a_1 и d .

$\Omega 95$ **Пример 2.** Пусть $a_{10} = 10$, $a_{14} = 2$. Найти a_1 и d .

Решение:

$$\begin{cases} a_{10} = 10 \\ a_{14} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9d = 10 \\ a_1 + 13d = 2 \end{cases} \Rightarrow 4d = -8 \Rightarrow d = -2.$$

Тогда $a_1 - 18 = 10 \Rightarrow a_1 = 28$.

Ответ: $a_1 = 28$, $d = -2$.

Пример 3. Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен $a_4 - a_2$. Найти a_1 и d .

 $\Omega 95$

Решение:

$$\begin{cases} a_7 = 1 \\ a_7 = a_4 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 1 \\ a_1 + 3d - (a_1 + d) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 1 \\ 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2}, a_1 = -2.$$

Ответ: $d = \frac{1}{2}$, $a_1 = -2$.

Пример 4. Последовательность задана формулой $a_n = -2 + 3n$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

 $\Omega 95$

Решение. Для любого $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется условие $a_{n+1} = -2 + 3(n+1) = -2 + 3n + 3 = a_n + 3$, т. е. $a_{n+1} = a_n + 3$.

Ответ: последовательность является арифметической прогрессией с разностью $d = 3$.

Пример 5. Последовательность задана формулой $a_n = -2 + 3n^2$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

 $\Omega 95$

Решение. Для любого $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется условие $a_{n+1} = -2 + 3(n+1)^2 = -2 + 3n^2 + 6n + 3 = a_n + 6n + 3$, т. е.

$a_{n+1} = a_n + 6n + 3$. Таким образом, $a_2 = a_1 + 9$, $a_3 = a_2 + 15$.

Ответ: поскольку $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, последовательность не является арифметической прогрессией.

Ω96

Пример 6. Даны величины $a_1 = \lg 2$, $a_2 = \lg(3^x - 3)$, $a_3 = \lg(3^x + 9)$. При каких x числа a_1, a_2, a_3 , взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию?

Решение. Воспользуемся известным отношением между тремя соседними членами арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned} 2a_2 = a_1 + a_3 &\Rightarrow 2 \cdot \lg(3^x - 3) = \lg 2 + \lg(3^x + 9) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lg(3^x - 3)^2 &= \lg[2(3^x + 9)] \Rightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 9 = 2 \cdot 3^x + 18 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0. \quad \text{Пусть } 3^x = t. \end{aligned}$$

Уравнение $t^2 - 8t - 9 = 0$ имеет решения: $t_1 = -1$ и $t_2 = 9$.

1) Уравнение $3^x = -1$ не имеет решения;

2) $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: при $x = 2$.

Ω96

Пример 7. $a_1 = 2$, $a_{10} = 20$. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

Решение: $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2 + 20}{2} \cdot 10 = 110$.

Ответ: 110.

Справка о чинах в казачьих войсках. Приказной соответствует ефрейтору в современной армии, урядник – сержанту, вахмистр – ротному старшине, подхорунжий – прапорщику, хорунжий – лейтенанту, а сотенный есаул

– капитану, командиру роты. Еще одно замечание: сейчас вознаграждение в 1 руб. может показаться смехотворным, но когда-то за 1 руб. можно было купить корову, а за 2 руб. вполне приличную избу.

Пример 8. Казачья сотня отличилась в бою, и атаман решил наградить одного рядового казака, одного приказного, одного урядника, вахмистра, одного подхорунжия, одного хорунжия и сотенного есаула. Рядовому дал 1 руб., и далее каждому следующему чину – на 2 руб. больше предыдущего. Какова общая сумма вознаграждения?

Ω96

Решение. Всего перечислено 7 чинов. Вознаграждение рядового казака $a_1 = 1$, далее от чина к чину оно увеличивается на величину $d = 2$, т. е. по закону арифметической прогрессии. Таким образом,

$$S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = \frac{2 + 6 \cdot 2}{2} \cdot 7 = 49.$$

Ответ: 49 руб.

Пример 9. Изменим условия примера № 8. Атаман решил наградить всю сотню и выдать рядовым казакам по 1 руб., приказным по 3, урядникам по 5, вахмистру 7, подхорунжиям по 9, хорунжиям по 11 и сотенному есаулу 13 рублей. Всего в сотне было 90 рядовых казаков, 20 приказных, 12 урядников, 1 вахмистр, 3 подхорунжия, 2 хорунжия и 1 есаул. Найти общую сумму вознаграждения.

Ω96

Решение. Награды по-прежнему образуют арифметическую прогрессию $\{a_k\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Но теперь формула суммы n членов прогрессии нам не поможет. Каждый чин представлен группой казаков. Численность группы в статистике называют **весом группы**. Вес k -й группы обозначим m_k . Тогда веса групп в порядке возрастания чинов образуют последовательность $\{m_k\} = \{90, 20, 12, 1, 3, 2, 1\}$. Осталось найти **взвешенную сумму** членов прогрессии:

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_7 a_7 = \sum_{k=1}^7 m_k a_k = \\ = 90 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 = 279.$$

Ответ: 279 руб.

□297

Пример 10. Пусть $a_1 = 4$, $a_n = -20$, $d = -2$. Найти сумму n первых членов прогрессии.

Решение: $a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = 13$.

$$S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{4 - 20}{2} \cdot 13 = -104.$$

Ответ: -104 .

Следующий пример связан с проектированием лестницы. *Плоскость ступени лестницы называют **проступью**, а длину проступи в направлении подъема **шагом лестницы**. Обозначим **высоту ступени**, т. е. расстояние по вертикали между двумя соседними проступями, буквой d , а шаг лестницы – s (рис. 2). Архитекторы XVII века уста-*

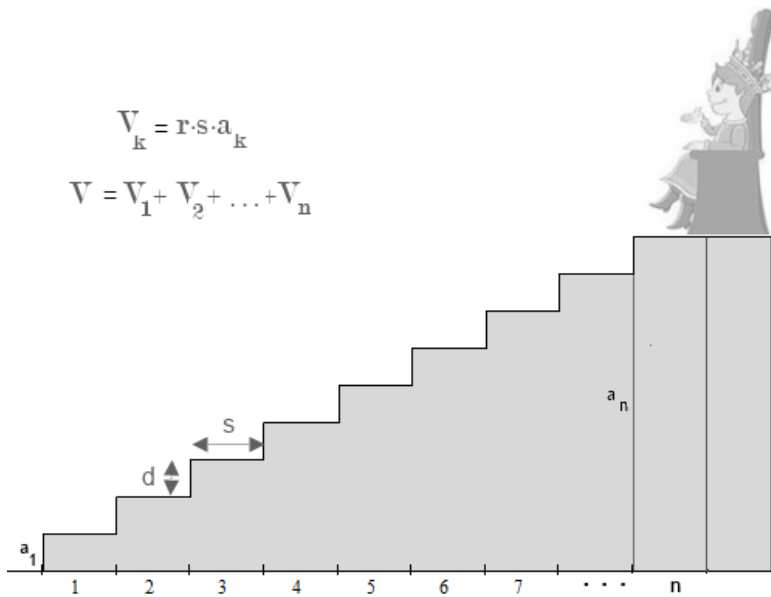


Рис. 2. Лестница, ведущая к трону

новили оптимальные отношения между шагом лестницы и высотой ступени:

$$\begin{cases} s + d = 45 & (\text{формула безопасности лестницы}); \\ s - d = 12 & (\text{формула удобства лестницы}). \end{cases}$$

За триста с лишним лет появилось много новых нормативов. Но если вы замерите параметры ступеней лестничного пролета в своем доме, то убедитесь, что с тех пор мало что изменилось. Выходит, параметры d и s не такие уж произвольные. Введем еще один параметр – **ширину**

лестницы, т. е. длину проступи в направлении, перпендикулярном плоскости (см. рис. 2).

Ω97

Пример 11. Царь повелел установить трон на возвышенном месте и подвести к нему мраморную лестницу с заданными параметрами: n – количество ступеней, d – высота ступени, s – шаг лестницы, r – ширина. Какой объем мрамора потребуется для строительства лестницы?

Решение. Высота первой ступени $a_1 = d$, на нее потребуется мрамора $V_1 = d \cdot s \cdot r$. Высота следующей ступени от земли $a_2 = 2d$, на нее потребуется мрамора $V_2 = 2d \cdot s \cdot r$. Продолжая рассуждать по индукции, заметим, что под k -й ступенью должен располагаться мраморный блок объемом $V_k = a_k \cdot s \cdot r$, где $a_k = kd$. Таким образом, высоты ступеней от основания лестницы образуют арифметическую прогрессию. Суммарный объем всех мраморных блоков

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (a_1 + \dots + a_n) \cdot s \cdot r = \frac{n(n+1)}{2} \cdot d \cdot r \cdot s.$$

Ответ: $V = \frac{n(n+1)}{2} \cdot d \cdot r \cdot s.$

Ω97

Пример 12. Пусть $a_1 = 1.2$, $a_4 = 1.8$. Найти S_6 .

Решение:
$$\begin{cases} a_1 = 1.2 \\ a_1 + 3d = 1.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1.2 \\ d = 0.2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{2.4 + 1}{2} \cdot 6 = 10.2.$$

Ответ: 10.2.

Пример 13. Вычислить $7.5 + 9.8 + 12.1 + \dots + 53.5$.

Ω97

Решение: $a_1 = 7.5$, $a_n = 53.5$, $d = 9.8 - 7.5 = 2.3$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{53.5 - 7.5}{2.3} + 1 = 21.$$

$$S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21 = \frac{7.5 + 53.5}{2} \cdot 21 = 640.5.$$

Ответ: 640.5.

Пример 14. $a_4 = \frac{5}{14}$. Найти сумму первых семи членов арифметической прогрессии.

Ω98

Решение: $a_4 = \frac{5}{14} \Rightarrow a_1 + 3d = \frac{5}{14} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = \frac{5}{14} \cdot 7 = 2.5.$$

Ответ: 2.5.

Пример 15. Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии.

Ω95

Решение: $a_4 + a_6 = 14 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 5d = 14 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2a_1 + 8d = 14 \Rightarrow S_9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = \frac{14}{2} \cdot 9 = 63.$$

Ответ: 63.

Пример 16. Требуется разделить 10 мер хлеба на 10 человек так, чтобы разность между каждым человеком и следующим составила $\frac{1}{8}$ меры.

Ω98

Решение. У нас десять членов прогрессии с шагом $d = \frac{1}{8}$.

$$S_{010} = 10 \Rightarrow \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 10 \Rightarrow \frac{2a_1 + 9d}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 9d = 2 \Rightarrow 2a_1 + \frac{9}{8} = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{16}.$$

Ответ: требование задачи будет выполнено, если первый человек получит $\frac{7}{16}$ меры хлеба, а каждый следующий на $\frac{1}{8}$ меры больше предыдущего.

Ω98

Пример 17. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 30. Найти третий ее член.

Решение:

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 30 \Rightarrow (a_1 + 2d) \cdot 5 = 30 \Rightarrow a_1 + 2d = a_3 = 6.$$

Ответ: 6.

Если из арифметической прогрессии убрать первые n членов и последовательно перенумеровать остальные, мы получим арифметическую прогрессию с той же разностью, первым членом которой будет $(n + 1)$ -й член исходной.

Ω98

Пример 18. Пусть $a_{17} = 5$, а $a_{25} = 35$. Найти сумму членов прогрессии с семнадцатого по двадцать пятый.

Решение. Отбросим первые 16 членов, и задача сведется к нахождению суммы девяти первых членов прогрессии,

первый член которой равен 5, а девятый 35.

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{5 + 35}{2} \cdot 9 = 180.$$

Ответ: 180.

Очевидно, сумма членов арифметической прогрессии с n -го по m -й, т. е. $S_{[n,m]}$, где $m > n$, равна $S_m - S_{n-1}$.

Пример 19. Найти сумму членов арифметической прогрессии с двенадцатого по девятнадцатый, если первый член равен 3, а двадцатый 41.

Ω98

Решение: $a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow 3 + 19d = 41 \Rightarrow d = 2$.

$$S_{19} = \frac{2a_1 + 18d}{2} \cdot 19 = \frac{6 + 36}{2} \cdot 19 = 399.$$

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{6 + 20}{2} \cdot 11 = 143, \quad S_{19} - S_{11} = 256.$$

Ответ: 256.

Пример 20. Отношение суммы первых 13 членов арифметической прогрессии $S_{[1,13]}$ к сумме последних 13 членов $S_{[n-12,n]}$ равно $\frac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трех $S_{[4,n]}$ к сумме всех членов без последних трех $S_{[1,n-3]}$ равно $\frac{4}{3}$. Определить число членов прогрессии.

Ω98

Решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{[1,13]}}{S_{[n-12,n]}} = \frac{1}{2} \\ \frac{S_{[4,n]}}{S_{[1,n-3]}} = \frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 + a_{13}}{a_{n-12} + a_n} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_4 + a_n}{a_1 + a_{n-3}} = \frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2a_1 + 12d}{2a_1 + 2(n-7)d} = \frac{1}{2} \\ \frac{2a_1 + (n+2)d}{2a_1 + (n-4)d} = \frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{d} = n - 19 \\ \frac{a_1}{d} = \frac{22-n}{2} \end{cases} \Rightarrow n - 19 = \frac{22-n}{2} \Rightarrow n = 20.$$

Ответ: 20.

Ω99

Пример 21. Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма первых n членов равна n^2 для любого n .

Решение: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = n^2 \Rightarrow d = \frac{2(n-a_1)}{n-1}.$

В последнем равенстве d будет константой только в случае $a_1 = 1$. Тогда $d = 2$ и $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$. Иначе говоря, последовательность состоит из нечетных натуральных чисел $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

Ответ: $a_1 = 1$ и $d = 2$.

Ω99

Пример 22. Могут ли числа 1, $\sqrt{3}$ и 3 быть членами одной арифметической прогрессии?

Решение. Условия задачи не требуют, чтобы члены прогрессии были расположены подряд. Пусть $a_m = 1$, $a_n = \sqrt{3}$ и $a_p = 3$, где $m < n < p$. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_m = a_1 + (m-1)d \Rightarrow \Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d$, т. е. разность любых двух членов равна произведению разности их номеров на разность прогрессии.

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad & \begin{cases} a_n - a_m = (n-m)d = \sqrt{3} - 1 \\ a_p - a_n = (p-n)d = 3 - \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{a_p - a_n}{a_n - a_m} = \frac{p-n}{n-m} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sqrt{3}$ – иррациональное число, а $\frac{p-n}{n-m}$ – рациональное, они ни при каких m, n, p не будут равны.

Ответ: числа 1, $\sqrt{3}$ и 3 не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Пример 23. При каком условии числа a , b и c могут быть членами арифметической прогрессии?

Ω99

Решение. Пусть $a = a_m$, $b = a_n$ и $c = a_p$. Тогда

$$\begin{cases} a = a_1 + d(m-1) \\ b = a_1 + d(n-1) \\ c = a_1 + d(p-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = d(m-n) \\ b - c = d(n-p) \end{cases} \Rightarrow \frac{a-b}{b-c} = \frac{m-n}{n-p}.$$

1. Если $\frac{a-b}{b-c}$ – иррациональное число, то числа a , b и c не могут быть членами арифметической прогрессии.

2. Если $\frac{a-b}{b-c} = \frac{s}{t}$, где s и t – целые числа, то a , b и c являются членами арифметической прогрессии:

$$\begin{cases} a = a_m = a_1 + d(m-1); \\ b = a_{m+s} = a_1 + d(m+s-1); \\ c = a_{m+s+t} = a_1 + d(m+s+t-1), \end{cases}$$

где a_1 – произвольная константа, $d = \frac{a-a_1}{m-1}$.

Ответ: числа a , b и c – члены арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{b-c}$ – рациональное число.

Ω99

Пример 24. Найти четырехзначное число, первые три цифры которого образуют невозрастающую арифметическую прогрессию, если известно, что оно делится на 225.

Решение. Поскольку $225 = 25 \cdot 9$, число должно делиться на 25 и на 9. На 25 делятся все четырехзначные числа вида $**00$, $**25$, $**50$ и $**75$. Представим все возможные варианты в зависимости от значения разности прогрессии d в следующей таблице:

d	** 00	** 25	** 50	** 75
0	0000	2225	5550	7775
1	2100	4325	7650	9875
2	4200	6425	9750	—
3	6300	8525	—	—
4	8400	—	—	—

Случай $d = 0$ — стационарная прогрессия. Число 0000 не является четырехзначным. Из остальных перечисленных в таблице делятся на 9 числа 6 300 и 7650.

Ответ: 6 300 и 7650.

Ω99

Пример 25. Могут ли цифры трехзначного *простого* числа образовать прогрессию с положительной разностью?

Решение. Допустим, могут. Пусть пусть x — первая цифра, тогда $x + d$ — вторая, $x + 2d$ — третья. Сумма цифр числа равна $3x + 3d$. Поскольку сумма цифр делится на 3, на 3 делится и все число, а значит, оно не будет простым.

Ответ: цифры трехзначного простого числа не могут образовывать арифметическую прогрессию.

Пример 26. Могут ли цифры четырехзначного *простого* числа образовывать арифметическую прогрессию с положительной разностью?

Ω99

Решение. Допустим, могут. Пусть x – первая цифра, $x + d$ – вторая, $x + 2d$ – третья, $x + 3d$ – четвертая. Сумма цифр числа равна $4x + 6d = 2(2x + 3d)$. Сразу исключим случаи, когда x делится на 3, так как тогда и все число делится на 3. Поскольку $x + 3d$ – цифра, $x + 3d \leq 9$. Если $d > 3$, то число $x + 3d$ не будет десятичной цифрой, $d = 3 \Rightarrow x = 0$, и в таком случае число уже не будет четырехзначным. Остаются $d = 0$, $d = 1$ и $d = 2$.

1) $d = 0$. Прогрессия стационарна, число состоит из четырех одинаковых цифр и делится на соответствующую цифру. Простое число может делиться только на 1. Но число, состоящее из одних единиц, $1\,111 = 11 \cdot 101$. Значит, $d \neq 0$.

2) $d = 1$. Тогда надо искать число среди 1 234, 2 345, 3 456, 4 567, 5 678 и 6 789. Удалим четные числа, делящиеся на 5 число 2 345 и делящееся на 3 число 6 789. Остается 4 567, которое действительно является простым. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить делимость числа 4 567 на простые числа от 2 до 67, поскольку $68^2 > 4\,567$.

3) $d = 2 \Rightarrow x \leq 3$. Случаи $x = 0$ и $x = 3$ мы исключили выше, а при $x = 2$ получим четное число. Остается составное