Содержание:

1) Виды трансцендентных неравенств.

2) Основные элементарные трансцендентные функции.

3) Методы решения простых трансцендентных неравенств. Алгоритм.

4) Решение тригонометрических неравенств методом интервалов.

5) Примеры решения тригонометрических неравенств методом интервалов.

1)) Виды трансцендентных неравенств.

Трансцендентные неравенства это неравенства не являющееся алгебраическим.

Это неравенство вида $f(x) \gtrless g(x)$,где функции являются аналитическими, и по крайней мере одна из них является алгебраической.

Аналитическая функция действительной переменной - это функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения.

Аналитическая функция:

1. Алгебраическая функция – это функция, состоящая из многочлена.
2. Трансцендентная функция – это функция, не являющаяся алгебраической.

Алгебраическое неравенство - это неравенство, состоящее из многочлена.

Степенью алгебраического неравенства называется степень многочлена, из которого оно состоит.

1) Линейное неравенство. В нем содержится многочлен первой степени.

2) Квадратное неравенство. В нем содержится многочлен второй степени.

И так далее.

Трансцендентное неравенство - это неравенство, содержащее показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции и смешанные с ними функции.

1) Тригонометрические неравенства.

2) Показательные неравенства.

3) Логарифмические неравенства.

4) Смешанные неравенства.

1. Тригонометрически-логарифмические.

2. Тригонометрически-показательные.

3. Логарифмически-показательные.

4. Тригонометрические с модулем.

5. Показательные с модулем.

6. Логарифмические с модулем

7. Тригонометрические и иррациональные.

8. Показательные и иррациональные.

9. Логарифмические и иррациональные.

10. Дробно - рациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические (с трансцендентной функцией в знаменателе).

11. Трансцендентные с многочленом.

12. Различные тройные трансцендентные неравенства.

И много различных вариантов.

2)) Основные элементарные трансцендентные функции.

1) Показательная.

$y = a^x$

a - основание (положительное действительное число ($a > 0$) и не равное единице ($a \neq 1$))

x - аргумент функции (любое действительное число).

$y = e^x$ - экспонента.

e - число Эйлера (иррациональное число).

$e \approx 2{,}718$

x - аргумент функции (любое действительное число).

2) Тригонометрические.

$y = \sin x$

$y = \cos x$

$y = ctgx$

$y = \sec x$ $\qquad\qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$y = co\sec x$ $\qquad\qquad co\sec x = \frac{1}{\sin x}$

3) Логарифмические.

$y = \log_a x$

a - основание (положительное и не равное единице действительное число ($a > 0,\ a \neq 1$))

$y = \log_a b$

b - положительное действительное число ($b > 0$).

x - аргумент функции (положительное и не равное единице действительное число).

$x > 0$
$x \neq 1$

$y = \ln x$

Натуральный логарифм.

e - основание натурального логарифма (иррациональное число).

x - аргумент функции (положительное действительное число).

$y = \lg x$

Десятичный логарифм.

10 - основание десятичного логарифма (натуральное число).

x - аргумент функции (положительное действительное число).

3)) Методы решения простых трансцендентных неравенств. Алгоритм.

3. 1 Тригонометрические неравенства.

Алгоритм решения неравенств с синусом и косинусом.

$\cos f(x) \gtrless a$ или $\sin f(x) \gtrless a$ $\quad a$ - действительное число.

Для того чтобы решить простое неравенство с синусом и косинусом нужно:

1) Приравнять функцию к числу и решить полученное простое тригонометрическое уравнение.

$\cos f\left(x\right)=a$ $\sin f\left(x\right)=a$

2) Изобразить числовую окружность и оси косинуса и синуса. Нанести на них значение и найти корни уравнения на окружности.

3) Определить на числовой окружности нужный промежуток.

В зависимости от того какое число a, простое тригонометрическое уравнение с синусом и косинусом может иметь или не иметь корней. Если уравнение не имеет корней, то нужно проверить имеет ли решение неравенство.

Если знак $<$ или $>$ точки выкалываем.

Если знак $\leq$ или $\geq$ точки закрашиваем.

1. (Число находится между - 1 и 1 или равно им).

У уравнения всегда есть корни; и неравенство всегда имеет какие-то решения.

2. (Число находится за - 1 и 1 и не равно им).

У уравнения нет корней; а неравенство, или не имеет решений, или вся окружность решение неравенства.

3. 2 Методы решения простых показательных неравенств.

Алгоритм решения простых показательных неравенств.

$a^{f(x)\lessgtr a^m}$; $a^{f(x)\lessgtr b}$

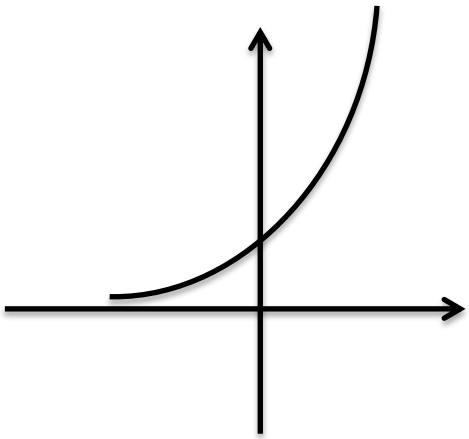
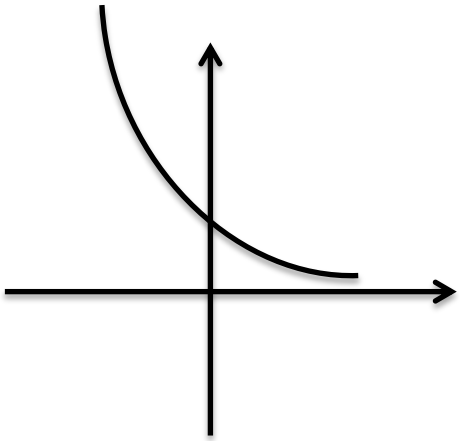
a - положительное действительное число, не равное единице.

m- действительное число.

b - действительное число.

Для того чтобы решить простое показательное неравенство нужно:

1) Если можно привести обе части неравенства к одному основанию показательной функции.

$a > 1$ больше единице	$0 < a < 1$ от нуля до единице
Посмотрим на функцию, она возрастает. 	Посмотрим на функцию, она убывает. 
Если функция возрастает, то большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Если можно привести к одному основанию, то при решении простых показательных неравенств нужно опустить основания и сравнить показатели степеней. $a^{f(x)<_{>}a^m}$ Опускаем основания и сравниваем показатели степеней.	Если функция убывает, то большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, а меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции. Если можно привести к одному основанию, то при решении простых показательных неравенств нужно опустить основания и сравнить показатели степеней. $a^{f(x)<_{>}a^m}$ Опускаем основания и сравниванием показатели степеней.

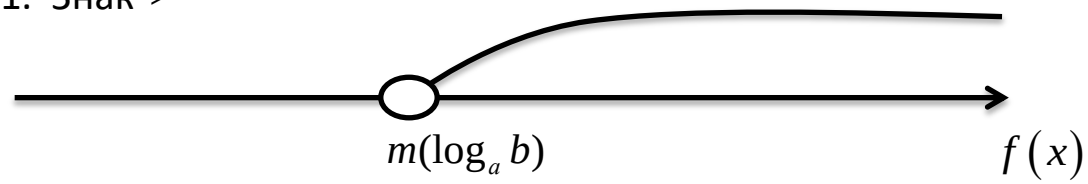
При этом знак неравенства не переворачиваем.	При этом знак неравенства переворачиваем
1) $a^{f(x)}>a^m$ $f(x)>m$ 2) $a^{f(x)} \geq a^m$ $f(x) \geq m$ 3) $a^{f(x)}<a^m$ $f(x)<m$ 4) $a^{f(x)} \leq a^m$ $f(x) \leq m$	1) $a^{f(x)}>a^m$ $f(x)<m$ 2) $a^{f(x)} \geq a^m$ $f(x) \leq m$ 3) $a^{f(x)}<a^m$ $f(x)>m$ 4) $a^{f(x)} \leq a^m$ $f(x) \geq m$
Если неравенство к одному основанию с обеих сторон не приводится, то решаем его по определению логарифма. 1) $a^{f(x)}>b$ $a^{f(x)}>a^{\log_a b}$ $f(x)>\log_a b$ Знак не переворачивается. 2) $a^{f(x)} \geq b$ $f(x) \geq \log_a b$ 3) $a^{f(x)}<b$ $f(x)<\log_a b$ 4) $a^{f(x)} \leq b$ $f(x) \leq \log_a b$	Если неравенство к одному основанию с обеих сторон не приводится, то решаем его по определению логарифма. 1) $a^{f(x)}>b$ $a^{f(x)}>a^{\log_a b}$ $f(x)<\log_a b$ Знак переворачивается. 2) $a^{f(x)} \geq b$ $f(x) \leq \log_a b$ 3) $a^{f(x)}<b$ $f(x)>\log_a b$ 4) $a^{f(x)} \leq b$ $f(x) \geq \log_a b$

3) Изобразить числовую прямую и отметить на ней число, которое получилось при решении не показательного неравенства, если оно линейное.

Если неравенство нелинейное, то решить его методом интервалов.

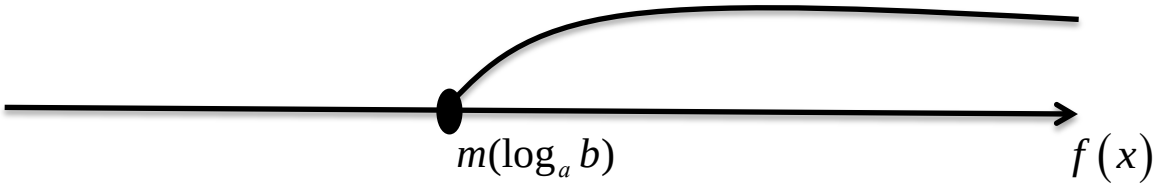
4) Отметить числовой промежуток, если неравенство линейное.

1. Знак $>$



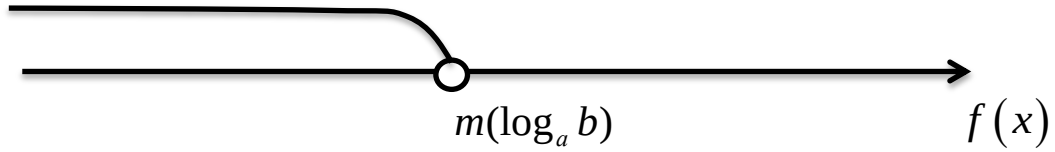
Точка выколотая, промежуток отмечается вправо (стрелка показывает вправо $>$).

2. Знак $\geq$



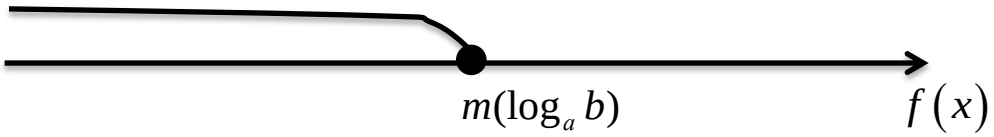
Точка закрашенная, промежуток отмечается вправо (стрелка показывает вправо $\geq$).

3. Знак $<$



Точка выколотая, промежуток отмечается влево (стрелка показывает влево $<$).

4. Знак $\leq$



Точка закрашенная. Промежуток отмечается влево (стрелка показывает влево $\leq$).

5) Записать ответ в виде числового промежутка.

6) Если неравенство не показательное не линейное, то решаем его методом интервалов.

$>$ или $<$ точки выколотые.

$\geq$ или $\leq$ точки закрашенные.

7) Записываем ответ в виде объединения числовых промежутков.

Пример 1.

$2^{x-1}>8$

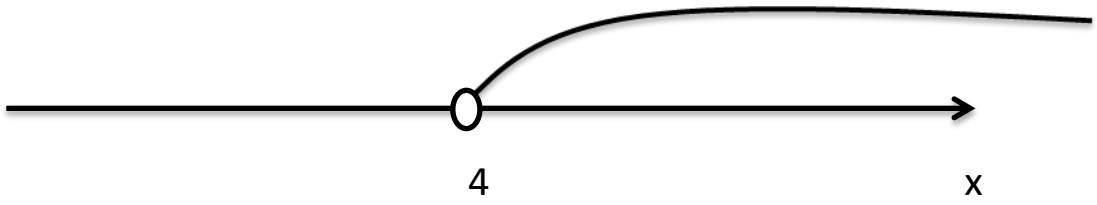
$2^{x-1}>2^3$

Основание 2 больше единице знак не меняется.

$x-1>3$

$x>3+1$

$x>4$



Ответ: $x \in (4;+\infty)$

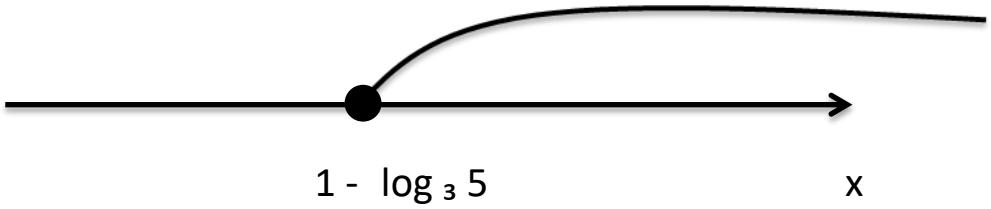
Пример 2.

$3^{1-x} \leq 5$

Основание 3 больше единицы. Знак не меняется.

$$1-x\le \log_3 5$$
$$-x\le \log_3 5-1$$
$$x\ge -\log_3 5+1$$
$$x\ge 1-\log_3 5$$

$x(-1)$



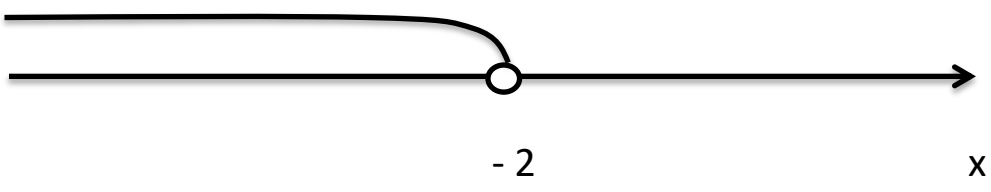
Ответ: $x\in[1-\log_3 5;+\infty]$

Пример 3.

$$0{,}1^{x+3}>\frac{1}{10}$$
$$0{,}1^{x+3}>0{,}1^{1}$$

Основание 0,1 меньше единицы. Знак переворачиваем.

$$x+3<1$$
$$x<1-3$$
$$x<-2$$



Ответ: $x\in(-\infty;-2)$

Пример 4.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3-2x} \le \frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3-2x} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{3}$$

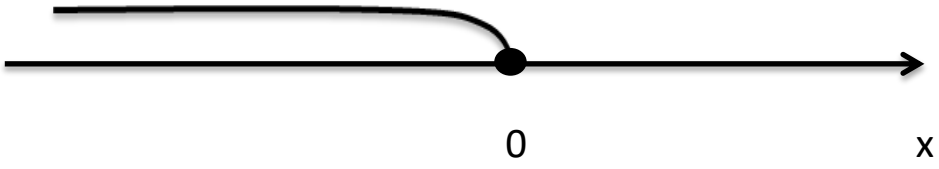
Основание $\frac{1}{5}$ меньше знак переворачиваем.

$3-2x \ge 3$

$-2x \ge 3-3$

$-2x \ge 0 \quad x(-1)$

$x \le 0$



Ответ: $x \in (-\infty;0]$

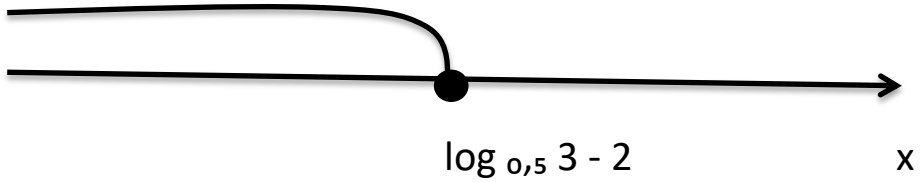
Пример 5.

$0,5^{x+2} \ge 3$

Основание $0,5$ меньше единицы. Знак переворачиваем.

$x+2 \le \log_{0,5} 3$

$x \le \log_{0,5} 3 - 2$



Ответ: $x \in \left(-\infty, \log_{0,5} 3-2\right]$

Пример 6.

$$e^{x^2-9}<1$$

Приведем обе части неравенства к одному основанию.

$$e^{x^2-9}<e^0$$

Основание $e \approx 2,718$ больше единицы. Знак не меняем.

$$x^2-9<0$$

Рассмотрим функцию.

$$f(x)=x^2-9$$

Найдем нули функции.

$$x^2-9=0$$

$$x^2=9$$

$$x_1=3$$

$$x_2=-3$$



$$f(0)=0-9=-9$$

Число отрицательное ставим минус.

Знак $<$ выбираем минус.

Ответ: $x \in (-3;3)$

Пример 7.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x^2} \leq 1$$

Приведем обе части неравенства к одному основанию.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{0}$$

Основание $\frac{1}{3}$ меньше единицы знак переворачиваем.

$$1-x^2 \geq 0$$

Рассмотрим функцию.

$$f(x) = 1-x^2$$

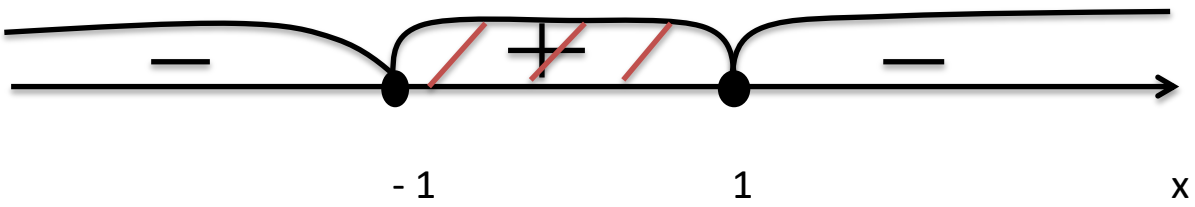
Найдем нули функции.

$$1-x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



$$f(0) = 1-0 = 1$$

Число положительное ставим плюс.