К. П. Моргунов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ



«Инфра-Инженерия»

К. П. Моргунов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Учебное пособие

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2026

УДК 628.11
ББК 38.774
М79

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры гидротехнических сооружений, конструкций и гидравлики ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова» *Колосов Михаил Александрович*;
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой водопользования и экологии ФГБОУ ВО «СПбГАСУ» *Федоров Святослав Викторович*

Моргунов, К. П.

М79 Моделирование гидравлических явлений : учебное пособие / К. П. Моргунов. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2026. – 220 с. : ил., табл.

ISBN 978-5-9729-2746-3

Рассмотрены подходы к организации физического моделирования явлений, происходящих при движении жидкости в речном потоке, а также при взаимодействии движущейся жидкости с различного типа гидротехническими сооружениями. Изложены основы теории подобия, представлены основные понятия теории размерностей. Подробно рассмотрены принципы моделирования потоков в открытых руслах с жесткими и деформируемыми границами, процессов взвешивания и осаждения наносов. Описаны работы по гидравлическому моделированию, проведенные в гидротехнической лаборатории ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова в 2010–2020 годах.

Для обучающихся в магистратуре при изучении дисциплины «Моделирование гидравлических явлений» направления «Строительство» (профиль «Водные пути, порты и судопропускные сооружения»).

УДК 628.11
ББК 38.774

ISBN 978-5-9729-2746-3

© Моргунов К. П., 2026
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2026
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ 9
1.1. Моделирование и подобие 9
1.2. Условия подобия 11
1.3. Основные понятия теории размерностей 17
1.4. Механическое подобие систем 26
1.4.1. Геометрическое подобие 26
1.4.2. Кинематическое подобие 28
1.4.3. Динамическое подобие 29
1.5. Закон подобия Ньютона 30
1.6. Соотношение коэффициентов подобия 34
1.7. Одновременное действие нескольких законов динамического подобия 36
Контрольные вопросы 39

2. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ 40
2.1. Предварительные замечания 40
2.2. Гидравлическое моделирование 41
2.2.1. Общие соображения 41
2.2.2. Приближенное подобие 43
2.2.3. Автомодельность 47
2.2.4. Значение и роль индикаторов подобия 49
Контрольные вопросы 51

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА НА ЖЕСТКИХ МОДЕЛЯХ 52
3.1. Равномерное установившееся движение напорного потока 52
3.2. Равномерное установившееся движение безнапорного потока 62
3.3. Влияние турбулентности на подобие гидромеханических явлений 71
3.4. Моделирование равномерного безнапорного течения при разных масштабах длины и глубины 77
3.5. Моделирование установившегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах 86
3.5.1. Плавно изменяющееся движение в прямолинейном русле 86
3.5.2. Моделирование движения воды в криволинейном русле 89
3.5.3. Моделирование при резко меняющемся движении потока 93
3.6. Моделирование русловых потоков на напорных воздушных моделях 95
3.7. Моделирование неустановившегося движения жидкости 100
3.7.1. Неустановившееся движение в открытых руслах 100
3.7.2. Неустановившееся движение в напорных системах 102
Контрольные вопросы 105

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА ЧЕРЕЗ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЕ СООРУЖЕНИЯ 107
4.1. Моделирование водосбросов и водосливов 107
4.2. Особенности моделирования гидравлических явлений в гидротехнических сооружениях 112

4.2.1. Учет сил трения 113
4.2.2. Моделирование течений с вовлечением в поток воздуха 114
Контрольные вопросы 118

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА В ДЕФОРМИРУЕМЫХ РУСЛАХ 119
5.1. Общие положения гидролого-морфологической теории руслового процесса 119
5.2. Моделирование движения воды в размываемых руслах 127
5.2.1. Основы моделирования размываемых русел 127
5.2.2. Условия начала размыва 130
5.2.3. Выбор материала для модельного русла 137
5.3. Моделирование твердого расхода 143
5.3.1. Масштабы моделирования твердого расхода 143
5.3.2. Моделирование деформируемого русла 145
Контрольные вопросы 149

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗВЕШИВАНИЯ И ОСАЖДЕНИЯ НАНОСОВ 151
6.1. Задачи моделирования переноса наносов 151
6.2. Моделирование осаждения наносов 153
6.3. Моделирование гидравлического транспорта дисперсных материалов 157
6.4. Моделирование местных размывов русла 161
Контрольные вопросы 165

7. ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, ВЫПОЛНЕННЫЕ В ГИДРОТЕХНИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА ИМЕНИ АДМИРАЛА С. О. МАКАРОВА 166
7.1. Характеристика гидротехнической лаборатории и параметры установок 166
7.2. Гидравлические исследования, выполненные в гидротехнической лаборатории в последние годы 172
7.2.1. Исследования пропускной способности водопроводных галерей искусственного сооружения 173
7.2.2. Определение гидравлических характеристик спиральновитых металлических гофрированных труб 178
7.2.3. Определение условий безопасного движения судов на акватории реки Невы в районе проектируемого моста 183
7.2.4. Экспериментальные исследования местного размыва дна в районе шпунтовой защиты строящихся мостовых опор и ледорезных устройств 189
7.2.5. Лабораторные исследования гидродинамического воздействия потока на шлюзующееся судно при наполнении камеры судоходного шлюза 202

Заключение 217

Библиографический список 218

ВВЕДЕНИЕ

В технике, в том числе в гидротехнике, очень часто приходится сталкиваться с необходимостью моделирования процессов, то есть исследования конструкций сооружений и закономерностей процессов, характеризующих различные физические явления, путем построения их моделей. Такая потребность возникает в случаях, когда изучение самих объектов, которые принято называть натурными, неудобно либо нецелесообразно. Например, из-за их значительных размеров, как это бывает с плотинами гидроузлов. Или дороговизны создания (строительства) объекта, который затем, возможно, придется переделывать. Иногда моделировать приходится процессы, особенности которых недоступны для прямого изучения, такие как фильтрационные процессы в грунтах либо русловые процессы в реках.

В этих случаях приходится заменять натурный объект его моделью и изучать процессы и явления на модели.

Моделью принято называть некий заменитель, «заместитель» оригинала, некоторый условный (виртуальный) или материально реализованный объект, изучение которого дает исследователям новую необходимую информацию о натурном объекте.

К настоящему времени сформировалось следующие основные подходы к моделированию:

– физическое моделирование, когда на модели исследуют явление, имеющее ту же физическую природу, что и в натуре (например, истечение воды через водослив в натуре и на модели);

– аналоговое моделирование, при котором природа исследуемых явлений и процессов в натуре и на модели различна, но они описываются аналогичными (одинаковыми) системами математических уравнений (например, напорное движение грунтовых вод и распределение электрического потенциала в проводнике – метод электрогидродинамической аналогии ЭГДА);

– математическое моделирование – исследование явления с помощью математического описания процессов, происходящих на исследуемом объекте.

Степень адекватности математической модели определяется уровнем развития научных знаний о процессах. Понятно, что исследуемая таким способом модель некоторого явления настолько соответствует изучаемому натурному процессу, насколько точно его математическое описание. Теория не может дать больше того, что содержится в исходных дифференциальных уравнениях. Если исходные уравнения неверно описывают физическую сущность процесса, то и полученные с помощью теории результаты будут неверными.

Если известны уравнения, описывающие рассматриваемое явление, но решение их обычными методами затруднено, прибегают к решению этих уравнений численными методами с использованием вычислительной техники. Такое моделирование называется численным.

Зачастую исследуемое гидротехническое явление или процесс может быть настолько сложным, что для его описания на момент исследований еще нет замкнутых систем уравнений либо нет достаточно обоснованных формулировок граничных и начальных условий, которые позволяли бы свести задачи гидромеханики и гидравлики к задачам математическим. Порой дифференциальные уравнения, описывающие исследуемые явления, не решаются известными в математике методами.

По этой причине решение задач гидравлики аналитическими методами на базе дифференциальных уравнений и различных методов математического анализа не всегда может быть полезно для практических целей. Различного рода ограничения и допущения, которые приходится вводить при описании процесса, позволяют использовать полученные строгие решения лишь как качественные оценки изучаемых процессов.

В последнее время численное (компьютерное) моделирование находит все большее распространение в связи с широким использованием вычислительной техники и значительным развитием возможностей этой техники. Однако такое моделирование эффективно может быть применено, только когда достаточно четко сформулированы основные положения физических процессов и изучены качественные стороны исследуемых явлений. Существенное значение при этом имеет верификация математической модели, то есть подтверждение того, что математическое описание и компьютерная модель соответствуют происходящим физическим процессам. Нужно понимать, что математика – это лишь *язык* науки, а физическую суть процессов необходимо изучать, используя эмпирические подходы. Следует иметь в виду, что к настоящему времени теория руслового процесса еще недостаточно проработана. Поэтому и до настоящего времени остается актуальным пожелание замечательного русского гидротехника Лохтина В. М., высказанное им еще в 1897 году в фундаментальном труде «О механизме речного русла»: «…в интересах дальнейшего развития знаний в деле изучения рек… поменьше формул и побольше наблюдательности».

Там, где математическое моделирование затруднено или вообще невозможно, основную роль играет физическое моделирование – экспериментальные методы исследования, которые дают возможность установить основные закономерности процессов с использованием физического подобия явлений, то есть построения и изучения реальных моделей.

В случае физического моделирования модель представляет собой объект, как правило, такой же физической природы, как натурный, но в уменьшенном (а иногда и в увеличенном) масштабе.

Физическое моделирование выполняется, как правило, в лабораторных условиях, поэтому его также называют лабораторным исследованием. Оно нашло в гидротехнике, в том числе, в гидравлике и гидрологии, весьма широкое применение.

Лабораторные исследования на моделях позволяют с адекватно обоснованными затратами средств, материалов и времени наглядно изучать сложные процессы, которые в естественных условиях протекают порой в течение многих лет

и даже десятилетий (размывы и отложения наносов, кавитационная эрозия, износ и т. п.). Использование теории подобия при физическом моделировании позволяет ответить на вопросы, как нужно ставить опыты и как обрабатывать опытные данные, чтобы, ограничившись минимальным числом опытов, иметь право обобщать результаты и получать закономерности изменения параметров для целой группы подобных явлений. Теория подобия позволяет с достаточной для практики точностью изучить сложные процессы на моделях, значительно меньших по размерам и часто более простых, чем объекты натуральной величины. Кроме того, опыты можно проводить не с рабочими веществами (порой токсичными, взрывоопасными, дорогостоящими и т. п.), а с модельными. Все это позволяет упрощать и удешевлять эксперимент.

С использованием физического моделирования исследуются самые разнообразные проблемы:

– выбор гидравлически рациональных компоновок гидроузлов, конструкции сооружений и элементов крепления дна бьефов;

– исследование напряженно-деформированного состояния и несущей способности плотин различного типа;

– определение пропускной способности водопропускных сооружений;

– изучение кавитационной стойкости водопропускных сооружений и гасителей энергии;

– исследование русловых процессов и влияния на них регуляционных сооружений;

– изучение фильтрации и связанных с ней фильтрационных деформаций грунтов в теле и в основаниях грунтовых сооружений;

– предотвращение попадания наносов в водозаборы и многое другое.

Разновидностью физического моделирования можно считать натурное моделирование.

Натурное моделирование проводится на реальном объекте при специально выбранных условиях с обобщением результатов исследований на основе критериев подобия, что позволяет использовать их для расчета других сооружений. Этот вид крупномасштабного моделирования предоставляет возможность проводить исследования, не поддающиеся или плохо поддающиеся лабораторному моделированию.

При реализации физического моделирования важную роль играет теория подобия и размерностей, определяющая и устанавливающая условия, которые должны соблюдаться в экспериментах, проводимых на моделях, выделяющая параметры, характеризующие основные эффекты и режимы процессов.

Для правильной и обоснованной постановки экспериментов и обработки их результатов, которые затем могли бы быть использованы для анализа процесса, важно правильно выбрать безразмерные параметры, характеризующие процесс. Число таких параметров должно быть минимальным и они должны в наиболее удобной форме отражать основные эффекты.

Для этого необходим предварительный теоретический анализ процесса, как можно более точное знание физической стороны изучаемого явления, для чего и используется теория размерностей и подобия. Грамотная постановка и обработка результатов эксперимента невозможна без использования основ этой теории. Иногда на начальной стадии изучения сложных явлений теория размерности может оказаться единственно возможным теоретическим подходом к проблеме. С помощью теории размерностей можно оценить ситуацию, когда явление зависит от многих параметров, но некоторые из них, как показывает анализ, могут оказаться несущественными.

Тем не менее, даже всестороннее знание природы изучаемого процесса, умение выделить существенные стороны и факторы, не всегда позволяет добиться полной аналогии построенной модели с натурой и получить удовлетворительные результаты экспериментов.

Очевидно, что наиболее оптимальный и результативный путь решения практических задач исследования – разумное сочетание математических, аналоговых и физических методов моделирования.

В настоящем курсе рассмотрены только методы физического моделирования гидравлических явлений.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

1.1. Моделирование и подобие

Изучение характеристик и поведения объекта путем моделирования заключается в том, чтобы установить соответствие между характеристиками натуры и модели, при котором, определяя характеристики модели и зная форму соответствия, можно было получить характеристики натурного объекта.

Моделированием будем называть исследование характеристик и свойств натурного объекта посредством изучения свойств его модели, более удобной для изучения и находящейся с натурным объектом в определенном соответствии.

Моделирование включает в себя:

– создание модели;

– изучение модели и характера происходящих на ней процессов;

– перенос сведений, полученных на модели, на натурный объект.

Натурным объектом назовем объект, характеристики которого изучаются методом моделирования. При этом под натурным объектом понимаются как естественные и искусственные *сооружения*, так и различные *явления* и *процессы*, в них протекающие и характеризующие функционирование объекта, проявляющиеся в виде изменения состояния объекта и режимов его работы.

Параметрами называются показатели, характеризующие изменение состояния объекта или режима его работы в пространстве и во времени. Процесс функционирования объекта понимается как изменение его параметров.

Модель – это специально создаваемый объект, характеристики которого связаны с натурным объектом соответствующими соотношениями, и предназначенный для получения таких сведений о характеристиках и процессах, происходящих на натурном объекте, которые сложно или вообще невозможно получить путем непосредственного изучения натурного объекта.

Таким образом, основная задача моделирования – получение по результатам исследования модели знаний о характеристиках натурного объекта и происходящих в нем процессах, а также о характере поведения натурного объекта в различных моделируемых ситуациях. Для того чтобы это можно было обоснованно сделать, модель и натурный объект должны быть подобны друг другу.

Подобными называются явления, протекающие в геометрически подобных системах, в которых происходят процессы одинаковой физической природы, и одноименные величины в сходственных точках связаны постоянными соотношениями между собой.

Сходственными точками называются точки подобных систем, одинаково расположенные по отношению к их границам.

В соответствии с этим для рассматриваемых систем (натуры и модели) вводятся постоянные *масштабные коэффициенты* или *константы подобия*, представляющие собой отношения характеристик и параметров натурного объекта и модели:

$$\alpha_l = \frac{l_н}{l_м}; \qquad \alpha_t = \frac{t_н}{t_м}; \qquad \alpha_\upsilon = \frac{\upsilon_н}{\upsilon_м}; \qquad \alpha_P = \frac{P_н}{P_м};$$

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_н}{\tau_м}; \qquad \alpha_\rho = \frac{\rho_н}{\rho_м}; \qquad \alpha_\nu = \frac{\nu_н}{\nu_м}.$$

Здесь масштабные коэффициенты (константы подобия), соответственно, для:
α_l – линейных размеров l;
α_t – времени t;
α_υ – скорости υ;
α_P – силы P;
α_τ – напряжения τ;
α_ρ – плотности ρ;
α_ν – кинематического коэффициента вязкости ν.

Индекс «н» относится к значению величины на натуре, индекс «м» – к модельному значению этой величины.

Применительно к рассматриваемой области науки и техники – гидротехнике, при моделировании физическую модель принято называть *гидравлической* моделью, а моделирование с использованием таких моделей – *гидравлическим моделированием*.

Основное достоинство гидравлических моделей заключается в том, что с их помощью возможно проведение исследований в тех случаях, когда математическая модель исследуемого явления не может быть сформулирована полностью, и применить численное моделирование невозможно. Например, как известно, до сих пор не существует замкнутой системы уравнений, описывающих поля скоростей и давлений турбулентного потока. Тем не менее, если предполагать, что эти уравнения имеют одинаковый вид для натуры и модели, то можно определить условия пересчета результатов измерений на модели в натуру.

Еще одним преимуществом гидравлических моделей является относительная простота задания сложных условий однозначности (граничных условий). Так, обычно весьма сложной бывает геометрическая форма границ для естественных потоков, чтобы ее задать при компьютерных расчетах, необходимо заложить значительные массивы данных, характеризующих изменения границ берегов и уровня дна по ширине и длине потока. На гидравлической модели форма русла сравнительно просто задается при изготовлении модели.

В математическом описании моделирования для единообразия написания уравнений, описывающих процессы, происходящие на натурных объектах и на моделях, прибегают к использованию безразмерных переменных и уравнений в безразмерном виде.

Размерными величинами называются величины, численное значение которых зависит от принятых масштабов, то есть от системы измерения.

Безразмерными величинами, соответственно, называются величины, численное значение которых не зависит от применяемой системы единиц измерения.

1.2. Условия подобия

Переход от размерных величин к безразмерным при описании различных процессов осуществляется, как правило, следующим образом.

В области исследования (в натурном объекте) выбираются характерные величины – фиксированные формально произвольные значения основных характеристик процесса. Пусть это будут, например, линейный размер, время, масса, скорость, давление, сила и т. п. Обозначим такие характерные величины чертой над буквенным обозначением: $\overline{l_{\text{н}}}, \overline{t_{\text{н}}}, \overline{m_{\text{н}}}, \overline{\upsilon_{\text{н}}}, \overline{p_{\text{н}}}, \overline{P_{\text{н}}}$. Соответственно, для модели такой набор характерных величин будет: $\overline{l_{\text{м}}}, \overline{t_{\text{м}}}, \overline{m_{\text{м}}}, \overline{\upsilon_{\text{м}}}, \overline{p_{\text{м}}}, \overline{P_{\text{м}}}$. Тогда коэффициенты подобия могут быть представлены как

$$\alpha_l = \frac{\overline{l_{\text{н}}}}{\overline{l_{\text{м}}}}; \quad \alpha_t = \frac{\overline{t_{\text{н}}}}{\overline{t_{\text{м}}}}; \quad \alpha_m = \frac{\overline{m_{\text{н}}}}{\overline{m_{\text{м}}}}; \quad \alpha_\upsilon = \frac{\overline{\upsilon_{\text{н}}}}{\overline{\upsilon_{\text{м}}}}; \quad \alpha_p = \frac{\overline{p_{\text{н}}}}{\overline{p_{\text{м}}}}; \quad \alpha_P = \frac{\overline{P_{\text{н}}}}{\overline{P_{\text{м}}}}. \qquad (1.1)$$

И можно сформулировать условия подобия.

Два физических явления называются подобными, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на коэффициенты подобия, одинаковые во всех точках.

Это означает, что для подобных явлений не только для характерных, но и для любых не характерных величин (без черты сверху) будут выполняться условия, вытекающие из соотношений (1.1)

$$l_{\text{н}} = \alpha_l\, l_{\text{м}}; \quad t_{\text{н}} = \alpha_t\, t_{\text{м}} \quad m_{\text{н}} = \alpha_m\, m_{\text{м}}; \quad \upsilon_{\text{н}} = \alpha_\upsilon\, \upsilon_{\text{м}}; \quad p_{\text{н}} = \alpha_p\, p_{\text{м}} \quad P_{\text{н}} = \alpha_P\, P_{\text{м}}. \qquad (1.2)$$

В механике известен принцип Даламбера, который гласит: если к действующей на тело активной силе и реакции связи приложить дополнительную силу инерции, то тело будет находиться в равновесии (сумма всех сил, действующих в системе, дополненная главным вектором инерции, равна нулю). Это означает, что если известны уравнения, описывающие некую систему в состоянии равновесия (в статике), то для получения уравнений движения (динамики) этой системы достаточно добавить в уравнения статики силы инерции.

Применительно к теории подобия это означает, что простые линейные преобразования типа (1.2), касающиеся сил, будут справедливы не только для условий покоя, но и относительно уравнений движения. Поэтому можно дополнить сформулированные выше условия подобия.

Явления будут подобными, если характеризующие их функции, определенные в сходственных точках областей, могут быть получены одни из других с помощью простого линейного преобразования.

Введем безразмерное значение переменной, как отношение этой переменной величины к его характерному значению. Обозначим безразмерные величины штрихом, тогда можно записать

$$l'_{\text{н}} = \frac{l_{\text{н}}}{\overline{l_{\text{н}}}} = \frac{\alpha_l\, l_{\text{м}}}{\alpha_l\, \overline{l_{\text{м}}}} = \frac{l_{\text{м}}}{\overline{l_{\text{м}}}} = l'_{\text{м}}.$$

Видим, что безразмерные величины, полученные делением величины на характерное значение, в сходственных точках натурного объекта и модели будут одинаковыми. Следовательно, для всех переменных параметров можно записать

$$l'_{\text{н}} = \frac{l_{\text{н}}}{\overline{l_{\text{н}}}} = \frac{l_{\text{м}}}{\overline{l_{\text{м}}}} = l'_{\text{м}}; \quad t'_{\text{н}} = \frac{t_{\text{н}}}{\overline{t_{\text{н}}}} = \frac{t_{\text{м}}}{\overline{t_{\text{м}}}} = t'_{\text{м}}; \quad m'_{\text{н}} = \frac{m_{\text{н}}}{\overline{m_{\text{н}}}} = \frac{m_{\text{м}}}{\overline{m_{\text{м}}}} = m'_{\text{м}};$$

$$\upsilon'_{\text{н}} = \frac{\upsilon_{\text{н}}}{\overline{\upsilon_{\text{н}}}} = \frac{\upsilon_{\text{м}}}{\overline{\upsilon_{\text{м}}}} = \upsilon'_{\text{м}}; \quad p'_{\text{н}} = \frac{p_{\text{н}}}{\overline{p_{\text{н}}}} = \frac{p_{\text{м}}}{\overline{p_{\text{м}}}} = p'_{\text{м}}; \quad P'_{\text{н}} = \frac{P_{\text{н}}}{\overline{P_{\text{н}}}} = \frac{P_{\text{м}}}{\overline{P_{\text{м}}}} = P'_{\text{м}}; \qquad (1.3)$$

$$\text{или } l'_{\text{н}} = \frac{l_{\text{н}}}{\overline{l_{\text{н}}}} = \frac{l_{\text{м}}}{\overline{l_{\text{м}}}} = l'_{\text{м}} = idem;$$

idem по латыни означает «то же самое», «идентичное».

Тогда получается, что характерные величины (с чертой сверху) играют роль масштабов, и два подобных явления в сходственных пространственно-временных точках различаются между собой только масштабами описывающих явление величин, в том числе и соответствующих уравнений.

И используя характерные величины, можно выразить размерные величины через безразмерные

$$l_{\text{н}} = \overline{l_{\text{н}}}\, l'_{\text{н}}; \quad t_{\text{н}} = \overline{t_{\text{н}}}\, t'_{\text{н}}; \quad m_{\text{н}} = \overline{m_{\text{н}}}\, m'_{\text{н}}; \quad \upsilon_{\text{н}} = \overline{\upsilon_{\text{н}}}\, \upsilon'_{\text{н}}; \quad p_{\text{н}} = \overline{p_{\text{н}}}\, p'_{\text{н}}; \quad P_{\text{н}} = \overline{P_{\text{н}}}\, P'_{\text{н}}. \qquad (1.4)$$

Различные явления в механике, в частности в гидромеханике, описываются определенными системами дифференциальных уравнений. Например, движение идеальной жидкости описывается системой уравнений Эйлера, а движение реальной вязкой жидкости – системой уравнений Навье – Стокса. Но такая система описывает целый класс явлений (ламинарный и турбулентный режимы) и применима к самым разнообразным процессам: к движению жидкости в трубах или в открытых руслах, к обтеканию жидкостью твердого тела, к истечению из отверстий и насадок и т. п.

Для того чтобы привязаться к конкретной задаче, необходимо указать некоторые признаки, которые получили название *условия однозначности*, так как именно они однозначно определяют изучаемое явление и решение системы дифференциальных уравнений.

Условия однозначности, как правило, включают:

– геометрическую форму и размеры системы, в которой протекает процесс;

– физические (физико-химические) параметры веществ, находящихся в системе;

– начальные условия протекания процесса (скорости, температура и т. д.);

– состояние системы на ее границах (например, равенство нулю скорости жидкости на неподвижных стенках).

После объединения условий однозначности с дифференциальными уравнениями создается возможность интегрирования этих уравнений и получения решения, соответствующего условиям именно этой конкретной задачи. Таким образом, эти граничные и начальные условия определяют единственность решения системы дифференциальных уравнений для данного явления.

Если в дифференциальных уравнениях движения перейти от обычных размерных величин к безразмерным, получаемым путем деления размерных переменных на характерные величины, а затем сделать безразмерными и сами уравнения, и граничные и начальные условия, то полученные таким образом безразмерные дифференциальные уравнения и соответствующие им безразмерные граничные и начальные условия станут одинаковыми для натурного объекта и модели.

Проведем такую операцию («обезразмеривание») с уравнениями Навье – Стокса, описывающими движение реальной вязкой жидкости в открытом потоке. Запишем уравнение Навье – Стокса в проекции на ось *x*:

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 \upsilon_x + \frac{\nu}{3}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} \operatorname{div} \upsilon,$$

здесь $\nabla^2 \upsilon_x = \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$\operatorname{div} \upsilon = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$ – оператор дивергенции;

X – проекция на ось *x* единичной объемной силы;

p – давление;

ρ – плотность жидкости;

ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Упростим задачу, приняв жидкость несжимаемой, а также то, что из объемных сил в жидкости действует только сила тяжести. Тогда с учетом условия неразрывности будем иметь:

$$\operatorname{div} \upsilon = 0; \qquad X = g.$$

Проекция уравнения Навье – Стокса на ось *x* примет вид:

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 \upsilon_x. \qquad (1.5)$$

Граничными условиями (условиями однозначности) могут быть, например, условия непроницаемости твердых поверхностей

$$\upsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

где $\varphi(x, y, z)$ – уравнение непроницаемой поверхности.

Условия однозначности могут включать и распределение давления на свободной поверхности жидкости

$$p_{\text{пов}}(\eta_{\text{пов}}) = \text{const},$$

где $\eta_{\text{пов}} = f(x, y, x)$ – уравнение свободной поверхности.

Перейдем в уравнении (1.5) к безразмерным величинам («обезразмерим» уравнение). Для этого выразим размерные величины через безразмерные, используя соотношения (1.4). Получим

$$\frac{\partial\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{t}\,t'\right)} + \left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)\frac{\partial\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{l}\,x'\right)} + \left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_y\right)\frac{\partial\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{l}\,y'\right)} + \left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_z\right)\frac{\partial\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{l}\,z'\right)} =$$

$$= g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\overline{p}\,p'\right)}{\partial\left(\overline{l}\,x'\right)} + \nu\left[\frac{\partial^2\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{l}\,x'\right)^2} + \frac{\partial^2\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{l}\,y'\right)^2} + \frac{\partial^2\left(\overline{\upsilon}\,\upsilon'_x\right)}{\partial\left(\overline{l}\,z'\right)^2}\right].$$

Характерные величины (с чертой сверху) не зависят от координат и времени, поэтому их можно вынести из-под знаков дифференциалов.

$$\frac{\overline{\upsilon}}{\overline{t}}\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial t} + \frac{\left(\overline{\upsilon}\right)^2}{\overline{l}}\upsilon'_x\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial x'} + \frac{\left(\overline{\upsilon}\right)^2}{\overline{l}}\upsilon'_y\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial y'} + \frac{\left(\overline{\upsilon}\right)^2}{\overline{l}}\upsilon'_z\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial z'} =$$

$$= g - \frac{1}{\rho}\frac{\overline{p}}{\overline{l}}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu\,\overline{\upsilon}}{\left(\overline{l}\right)^2}\left[\frac{\partial^2 \upsilon'_x}{\partial\left(x'\right)^2} + \frac{\partial^2 \upsilon'_x}{\partial\left(y'\right)^2} + \frac{\partial^2 \upsilon'_x}{\partial\left(z'\right)^2}\right].$$

Уравнение все еще размерное, каждый член уравнения имеет размерность ускорения. Отнесем каждый член уравнения к комплексу $\frac{\left(\overline{\upsilon}\right)^2}{\overline{l}}$, сделав тем самым уравнение безразмерным. Для упрощения записи опустим штрих у безразмерных переменных величин. Кроме того, обратим внимание на то, что в силу условий (1.3) безразмерное уравнение будет иметь одинаковый вид для натуры и для модели. Получим

$$\frac{\overline{l}}{\overline{t}\,\overline{\upsilon}}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} =$$

$$= \frac{g\,\overline{l}}{\left(\overline{\upsilon}\right)^2} - \frac{\overline{p}}{\rho\left(\overline{\upsilon}\right)^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\overline{l}\,\overline{\upsilon}}\left(\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2}\right).$$

Для того чтобы процессы, описываемые этим уравнением для натуры и для модели, были одинаковыми, то есть подобными, необходимо чтобы безразмерные комплексы, входящие в состав слагаемых членов уравнения, тоже были одинаковыми. То есть для подобия должны выполняться соотношения

$$\frac{\overline{l_н}}{\overline{t_н}\,\overline{\upsilon_н}} = \frac{\overline{l_м}}{\overline{t_м}\,\overline{\upsilon_м}}; \quad \frac{g\,\overline{l_н}}{\left(\overline{\upsilon_н}\right)^2} = \frac{g\,\overline{l_м}}{\left(\overline{\upsilon_м}\right)^2}; \quad \frac{\overline{p_н}}{\rho\left(\overline{\upsilon_н}\right)^2} = \frac{\overline{p_м}}{\rho\left(\overline{\upsilon_м}\right)^2}; \quad \frac{\nu}{\overline{l_н}\,\overline{\upsilon_н}} = \frac{\nu}{\overline{l_м}\,\overline{\upsilon_м}}.$$

Эти безразмерные комбинации называются *числами подобия*. Каждому из них присвоено имя ученого, известного своими работами в соответствующей области знаний, в частности – в области гидротехники:

$\frac{l}{\upsilon t} = \mathrm{Sh}$ – число Струхаля;

$\frac{\upsilon^2}{g\,l} = \mathrm{Fr}$ – число Фруда;

$\frac{\Delta p}{\rho\,\upsilon^2} = \mathrm{Eu}$ – число Эйлера;

$\frac{\upsilon l}{\nu} = \mathrm{Re}$ – число Рейнольдса.

Обратим внимание на то, что в число Эйлера давление входит в виде градиента (разности) Δp. Это свидетельствует о независимости характера движения, описываемого безразмерными уравнениями Навье – Стокса от абсолютной величины давления.

Таким образом, если два потока вязкой жидкости подобны, то для них справедливо условие

$$\mathrm{Sh} = idem; \quad \mathrm{Fr} = idem; \quad \mathrm{Eu} = idem; \quad \mathrm{Re} = idem. \tag{1.6}$$

Аналогичные преобразования выполняются и с условиями однозначности – начальными и граничными условиями. При этом в составе этих условий появляется ряд безразмерных комплексов, характеризующих форму границ области и распределение параметров (скоростей и давлений) на границах в любой момент времени и во всей области в начальный момент.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Из равенства чисел подобия для натуры и модели (на примере числа Струхаля)

$$\frac{l_н}{\upsilon_н\,t_н} = \frac{l_м}{\upsilon_м\,t_м}$$

получим

$$\frac{\alpha_l}{\alpha_\upsilon\,\alpha_t} = 1.$$

Для всех чисел подобия можно получить аналогичные соотношения:

$$\frac{\alpha_l}{\alpha_\upsilon\,\alpha_t}=1;\quad \frac{\alpha_\upsilon^2}{\alpha_l\,\alpha_g}=1;\quad \frac{\alpha_p}{\alpha_\rho\,\alpha_\upsilon^2}=1;\quad \frac{\alpha_l\,\alpha_\upsilon}{\alpha_\nu}=1, \tag{1.7}$$

где $\alpha_g=\dfrac{g_н}{g_м}$ – коэффициент подобия объемных сил;

$\alpha_\rho=\dfrac{\rho_н}{\rho_м}$ – коэффициент подобия плотности;

$\alpha_\nu=\dfrac{\nu_н}{\nu_м}$ – коэффициент подобия вязкости.

Безразмерные комплексы, составленные из коэффициентов подобия, называют *индикаторами подобия*. Таким образом, из условий (1.6) и (1.7) вытекает первая теорема подобия.

Если явления подобны, то числа подобия равны между собой, а индикаторы подобия равны единице.

В подобных объектах и подобных явлениях отношения не только характерных величин (обозначенных нами ранее чертой сверху), но и нехарактерных в сходственных точках будут равны коэффициенту подобия, одинаковому для всех точек

$$\frac{l_н}{l_м}=\frac{\overline{l_н}}{\overline{l_м}}=\alpha_l;\quad \frac{\overline{\upsilon_н}}{\overline{\upsilon_м}}=\alpha_\upsilon \text{ и т. д.}$$

Такие отношения называются *симплексами подобия*.

Деление уравнения Навье – Стокса на комплекс $\dfrac{(\overline{\upsilon})^2}{\overline{l}}$, рассмотренное выше, это только один из способов приведения его к безразмерному виду. Уравнение содержит несколько слагаемых, и обезразмерить его можем, отнеся все члены к коэффициентам при любом из его членов. И при этом можно получить другие безразмерные комплексы – числа подобия, некоторым из которых также были присвоены имена выдающихся ученых. Так, например, комплекс $\dfrac{p\,l}{\nu\,\rho\,\upsilon}=\mathrm{St}$ назвали числом Стокса (можно заметить, что $\mathrm{St}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Eu}$).

Если разделить уравнения Навье – Стокса на ускорение свободного падения g, получим еще три числа подобия, для которых по аналогии с (1.6) можно записать

$$\frac{\upsilon}{g\,t}=idem;\qquad \frac{\Delta p}{\rho\,g\,l}=I=idem;\qquad \frac{\nu\,\upsilon}{g\,l^2}=D=idem. \tag{1.8}$$

Числа подобия, получаемые при различных методах обезразмеривания, частично заменяют друг друга. Среди чисел подобия в каждой конкретной задаче

есть такие, которые включают характерные величины, содержащиеся в постановке задачи, являются наперед заданными и определяют условия однозначности. Такие числа подобия называют *критериями подобия*, именно они обусловливают подобие двух сравниваемых явлений. Критериев подобия для задачи меньше, чем чисел подобия. Иногда используется термин «*определяющие критерии подобия*».

Так, например, число I является отношением перепада давлений к характерной длине участка. Фактически – это уклон. При напорном движении по горизонтальному руслу это пьезометрический уклон. По физическому смыслу – это отношение действующих в потоке сил давления к объемным силам (силам тяжести и инерции)

$$I = \frac{\Delta p}{\rho g l} = \frac{\Delta p}{\rho \upsilon^2} \frac{\upsilon^2}{g l} = \mathrm{Eu} \cdot \mathrm{Fr}\,.$$

Условие $I = idem$ обеспечивает подобие формы свободной поверхности открытых безнапорных потоков.

При установившемся неравномерном движении, что обычно имеет место в речных потоках, критериями подобия (определяющими) являются Fr, I и D.

1.3. Основные понятия теории размерностей

Порой даже в случае незамкнутости математического описания задачи, ее неполного описания, то есть, когда уравнения, описывающие исследуемый процесс, еще не установлены, некоторые полезные для моделирования результаты можно получить, используя выводы теории размерностей.

Для этого нужно установить физические величины, которые определяют изучаемое явление. Физические величины в природных явлениях связаны между собой. Поэтому, если некоторые из них принять в качестве «основных» и установить для них единицы измерения, то единицы измерения других «неосновных» величин можно определенным образом выразить через единицы основных величин. Единицы измерения основных величин принято называть *основными* или *первичными*, а всех остальных – *производными* или *вторичными*.

Путь выполнения исследования процесса методом анализа размерностей, в принципе, таков.

Устанавливается размерность всех величин, определяющих исследуемое явление, а также размерность искомой величины. Затем зависимость искомой величины от величин, ее определяющих, представляется в виде степенного одночлена, и, приравнивая размерность этого одночлена к размерности искомой величины, можем получить общий вид закономерности. Одновременно выявляются и устанавливаются критерии подобия, так как полученное решение будет представлять собой уравнение связи между обезразмеренными комбинациями. Те критерии, которые образуются из заданных величин, входящих в условия однозначности, будут определяющими.

Как показывает практика, при изучении механических явлений достаточно установить единицы измерения трех величин, чтобы выразить через них единицы всех остальных. Хотя число основных единиц не обязательно должно быть равно трем, можно брать и большее число основных единиц.

При использовании системы СИ (фр. *Système international d'unités, SI*) в качестве основных принимаются единицы длины (l), времени (t) и массы (m). Тогда размерность любой другой механической величины X можно представить как

$$[X] = [l]^a [t]^b [m]^c. \tag{1.9}$$

Так, например, размерность скорости определится как

$$[\upsilon] = [l]^1 [t]^{-1} [m]^0 = \frac{[l]}{[t]},$$

а размерность силы

$$[F] = [m][a] = [m]^1 [l]^1 [t]^{-2} = \frac{[m][l]}{[t]^2}.$$

Размерности основных величин, используемых при исследовании гидротехнических задач, представлены в таблице 1.1

Таблица 1.1

Размерности основных гидротехнических величин

Величина	Размерность в системе СИ $[l]$, $[t]$, $[m]$
Длина	$[l]$
Время	$[t]$
Масса	$[m]$
Площадь	$[l]^2$
Объем	$[l]^3$
Линейная скорость	$[l][t]^{-1}$
Угловая скорость, частота	$[t]^{-1}$
Линейное ускорение	$[l][t]^{-2}$
Угловое ускорение	$[t]^{-2}$
Расход	$[l]^3 [t]^{-1}$
Удельный расход	$[l]^2 [t]^{-1}$
Сила	$[m][l][t]^{-2}$

Окончание таблицы 1.1

Величина	Размерность в системе СИ $[l]$, $[t]$, $[m]$
Плотность	$[m][l]^{-3}$
Давление, касательное напряжение	$[m][l]^{-1}[t]^{-2}$
Энергия	$[m][l]^{2}[t]^{-2}$
Мощность	$[m][l]^{2}[t]^{-3}$
Кинематический коэффициент вязкости	$[l]^{2}[t]^{-1}$
Динамический коэффициент вязкости	$[m][l]^{-1}[t]^{-1}$
Поверхностное натяжение	$[m][t]^{-2}$

Подход теории размерности к решению задачи заключается в следующем. Пусть необходимо определить искомую величину Q, зависящую от параметров A, B, D, F и E. Составляется степенная зависимость

$$Q = c\,A^{x}\,B^{y}\,D^{z}\,F^{p}\,E^{q}, \tag{1.10}$$

где c – коэффициент пропорциональности.

В этой зависимости неизвестны показатели степени x, y, z, p и q, но известна размерность величин A, B, D, F и E, а также размерность искомой величины Q. Тогда, используя соотношение (1.9), вместо (1.10) можно получить, например, такое соотношение

$$[l]^{\alpha}[t]^{\beta}[m]^{\gamma} = [l]^{x+y-z+p}[t]^{-y+z-q}[m]^{x-p+q}.$$

Затем нужно приравнять показатели степени при одинаковых единицах, в результате получается система из трех уравнений с пятью неизвестными. Три неизвестных (например, x, y и z) можно определить через α, β, γ, p и q, оставшиеся (p и q) войдут в окончательную зависимость как неизвестные, но теперь они также войдут и в состав x, y и z.

Тогда зависимость (1.9) получится в виде

$$Q = c\,A^{k_1+f(p,q)}\,B^{k_2+f(p,q)}\,D^{k_3+f(p,q)}\,F^{p}\,E^{q}$$

или

$$Q = \left(A^{k_1}\,B^{k_2}\,D^{k_3}\right)\pi_1^{p}\,\pi_2^{q},$$

где π_1 и π_2 – некоторые безразмерные комбинации из величин A, B, D, F и E.

Такой метод приравнивания показателей степени однородных по размерности членов называется методом Рэлея.

Для примера использования метода Рэлея при моделировании гидравлических явлений рассмотрим задачу о движении (опускании) частицы шаровой формы в вязкой жидкости. Очевидно (это, кстати, известно и из результатов ряда теоретических решений), что определяющим критерием в этой задаче является число Рейнольдса Re в форме $\mathrm{Re} = \frac{\upsilon d}{\nu} = \frac{\upsilon \rho d}{\mu}$, где υ – скорость падения шара в жидкости; d – диаметр шара; μ – динамический коэффициент вязкости жидкости; ρ – плотность жидкости.

Представим силу F сопротивления движению шара при обтекании его жидкостью в виде степенного одночлена

$$F = c\rho^x \upsilon^y d^z \mu^p.$$

Запишем эту зависимость через размерности

$$\frac{[m][l]}{[t]^2} = \left[\frac{m}{l^3}\right]^x \left[\frac{l}{t}\right]^y [l]^z \left[\frac{m}{l\,t}\right]^p = [m]^{x+p}\,[l]^{y+z-3x-p}\,[t]^{-y-p}.$$

Сопоставляя показатели степени при $[m]$, $[l]$ и $[t]$, получаем три уравнения с четырьмя неизвестными x, y, z и p

$$1 = x + p;$$
$$1 = y + z - 3x - p;$$
$$2 = y + p.$$

Откуда получаем

$$x = 1 - p; \qquad y = 2 - p; \qquad z = 2 - p;$$

и находим формулу силы сопротивления шара

$$F = c\rho^{1-p}\upsilon^{2-p}d^{2-p}\mu^p = c\rho\upsilon^2 d^2\left(\frac{\mu}{\rho\upsilon d}\right)^p = \frac{c\rho\upsilon^2 d^2}{\mathrm{Re}^p},$$

откуда

$$c = \frac{F}{\rho\upsilon^2 d^2}\mathrm{Re}^p = f(\mathrm{Re}).$$

Вид функции $f(\mathrm{Re})$ и определяется в процессе проведения экспериментов.

Размерности величин, описывающих какой-либо процесс, могут быть зависимыми и независимыми друг от друга.

Размерности называются *независимыми*, если каждая из них не может быть представлена в виде комбинации остальных. Так, например, размерности длины $[l]$, скорости $[\upsilon] = [l]\,[t]^{-1}$ и энергии $[E] = [m]\,[l]^2\,[t]^{-2}$ следует считать независимыми друг от друга, так как ни одна из них не может быть получена комбинацией размерности двух других.

Уравнение, выражающее некоторый физический закон, не зависящий от выбора системы единиц, может быть в общем случае представлено так:

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0. \qquad (1.11)$$

Одним из основных постулатов теории размерностей является *принцип однородности* (или гомогенности) физических уравнений, предложенный Фурье. Этот принцип может быть сформулирован следующим образом:

Размерности членов любых физических уравнений одинаковы.

Это значит, что все члены уравнения могут быть выражены в одной и той же системе единиц измерения, и уравнение остается справедливым при любой избранной системе основных единиц измерения.

Следует отметить, что в технических приложениях встречаются эмпирические формулы, которые принципу однородности не удовлетворяют. В таких формулах, полученных путем обработки опытных данных, зачастую размерности членов различны. Потому такие эмпирические зависимости не могут быть использованы за пределами той области применения, для которой они были получены.

В простейшем наглядном случае принцип однородности по размерности Фурье означает, что если к пяти яблокам прибавить четыре яблока, то не получится девять груш, а в результате будут тоже только яблоки. В более точной терминологии, если иметь в виду, что размерность любого члена уравнения в соответствии с (1.9) может быть выражена произведением степеней основных единиц $[l]$, $[t]$ и $[m]$, принцип однородности требует, чтобы показатели степени при размерностях длины, времени и массы были одинаковыми у всех членов уравнения.

В уравнение (1.11) входят n размерных величин, описывающих исследуемое явление. Пусть из этих n величин только k имеют независимые размерности, не изменяющиеся с изменением системы единиц, поэтому их можно принять в качестве основных. Размерности остальных $(n - k)$ величин можно выразить через размерности основных величин по принципу, приведенному в зависимости (1.9).

$$[X_{k+1}] = [X_1]^{a_1}[X_2]^{a_2} \ldots [X_k]^{a_k};$$
$$[X_{k+2}] = [X_1]^{b_1}[X_2]^{b_2} \ldots [X_k]^{b_k};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[X_n] = [X_1]^{c_1}[X_2]^{c_2} \ldots [X_k]^{c_k}.$$