

Пол Дж. Нахин

Секреты интересных интегралов

Springer

ДМК ПРЕСС ИЗДАТЕЛЬСТВО

УДК 517.37
ББК 22.161
Н12

Нахин П. Дж.
Н12 Секреты интересных интегралов / пер. с анг. Н. К. Смоленцева. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 428 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-763-3

В книге приведена целая коллекция из почти 200 запутанных определенных интегралов из физики, техники и математики, а также 60 задач с полными решениями. Если вам что-то говорят имена Римана, Бернулли, Эйлера, Френеля, Дирихле, Фурье, Коши, Фейнмана — эта книга точно для вас.

Издание доставит истинное удовольствие математикам, физикам, думающим студентам, а также всем читателям, кто еще только планирует стать великим учёным!

УДК 517.37
ББК 22.161

Authorized Russian translation of the English edition of Inside Interesting Integrals ISBN 9781493912773 © 2015 Springer Science+Business Media New York.

This translation is published and sold by permission of Packt Publishing, which owns or controls all rights to publish and sell the same.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-1-4939-1277-3 (анг.)
ISBN 978-5-97060-763-3 (рус.)

© 2015 Springer Science+Business Media New York
© Оформление, издание, перевод, ДМК Пресс, 2020

Содержание

Вступительное слово от издательства 11
Предисловие 12

Глава 1. Введение 22
1.1. Интеграл Римана 22
1.2. Примеры риманова интегрирования 26
1.3. Интеграл Лебега 28
1.4. «Интересно» и «секреты» 31
1.5. Некоторые примеры трюков 33
1.6. Особенности 38
1.7. Интеграл Далцелла 43
1.8. Откуда берутся интегралы 46
1.9. Заключительные слова 60
1.10. Задачи для упражнений 61

Глава 2. «Легкие» интегралы 64
2.1. Шесть «легких» для разминки 64
2.2. Новый прием 68
2.3. Два старых трюка, плюс один новый 75
2.4. Еще один старый прием. Лог-синус Эйлера 84
2.5. Задачи для упражнений 90

Глава 3. Любимый трюк Фейнмана 92
3.1. Формула Лейбница 92
3.2. Удивительный интеграл 101
3.3. Интеграл Фруллани 103
3.4. Обратная сторона трюка Фейнмана 106
3.5. Сочетание двух приемов 115
3.6. Интеграл Улера и символьное интегрирование 118
3.7. Интеграл вероятности, новый взгляд 122
3.8. Интеграл Дини 125
3.9. Любимый прием Фейнмана решает физическое уравнение 128
3.10. Задачи и упражнения 130

Глава 4. Гамма- и бета-функции 134
4.1. Гамма-функция Эйлера 134
4.2. Интеграл Валлиса и бета-функция 136
4.3. Перестановка порядка интегрирования в двойном интеграле 147
4.4. Гамма-функция встречает физику 158
4.5. Задачи для решения 161

Глава 5. Использование степенных рядов для нахождения интегралов 164
5.1. Число Каталана 164
5.2. Степенные ряды для логарифмической функции 168

5.3. Интегралы дзета-функции 176
5.4. Константа Эйлера и связанные с ней интегралы 181
5.5. Задачи и упражнения 195

Глава 6. Семь сложных интегралов 199
6.1. Интеграл Бернулли 199
6.2. Интеграл Ахмеда 201
6.3. Интеграл Коксетера 205
6.4. Оптический интеграл Харди–Шустера 212
6.5. Тройные интегралы Уотсона/Ван Пейпа 217
6.6. Эллиптические интегралы в физической задаче 223
6.7. Задачи и упражнения 229

Глава 7. Использование $\sqrt{-1}$ для нахождения интегралов 235
7.1. Формула Эйлера 235
7.2. Интегралы Френеля 236
7.3. ζ(3) и снова интегралы лог-синуса 240
7.4. ζ(2), наконец! 245
7.5. Опять интеграл вероятности 248
7.6. За пределами интеграла Дирихле 250
7.7. Дирихле встречает гамма-функцию 256
7.8. Преобразования Фурье и интегралы энергии 259
7.9. «Странные» интегралы из радиотехники 265
7.10. Причинность и интегралы преобразования Гильберта 275
7.11. Задачи и упражнения 283

Глава 8. Контурное интегрирование 287
8.1. Вступление 287
8.2. Криволинейные интегралы 287
8.3. Функции комплексной переменной 290
8.4. Уравнения Коши–Римана и аналитические функции 296
8.5. Интегральная теорема Грина 300
8.6. Первая интегральная теорема Коши 303
8.7. Вторая интегральная теорема Коши 316
8.8. Особенности и теорема о вычетах 330
8.9. Интегралы с многозначными подынтегральными функциями 338
8.10. Задачи и упражнения 346

Глава 9. Эпилог 349
9.1. Риман, простые числа и дзета-функция 349
9.2. Вывод функционального уравнения для ζ(***s***) 359
9.3. Вопросы для упражнений 372

Решения задач и упражнений 375

Предметный указатель 426

Глава 1

Введение

1.1. Интеграл Римана

Непосредственная цель этого вступительного раздела – рассмотреть вопрос о том, сможете ли вы понять технические комментарии в книге. Говоря прямо, знаете ли вы, что такое интеграл? Вы можете смело пропустить следующие несколько абзацев, если это окажется «старой шляпой», но, возможно, для некоторых это будет полезно. Изложение будет гораздо менее строго, чем хотелось бы чистому математику, и я намерен просто определить терминологию.

Если $y = f(x)$ – некоторая (любая) «достаточно хорошая» функция (если вы сумеете ее рисовать, то для нас это и будет «достаточно хорошая»), то определенный интеграл от функции $f(x)$, где x изменяется от $x = a$ до $x = b$, – это площадь (число, полностью определенное с помощью a, b и $f(x)$) фигуры, ограниченной функцией $f(x)$ и осью Ox. Это, по сути, затененная область, показанная на рис. 1.1.1. Вот почему вы часто увидите фразу «область под кривой» в этой и других книгах по интегралам. (Мы будем иметь дело в основном с вещественно-значными функциями в этой книге, но в конце будет довольно много обсуждений, касающихся комплексных функций.) На рисунке я показал $f(x)$, пересекающую x-ось при $x = c$; площадь выше оси Ox (от $x = a$ до $x = c$) – это положительная площадь, в то время как площадь ниже оси Ox (от $x = c$ до $x = b$) является отрицательной.

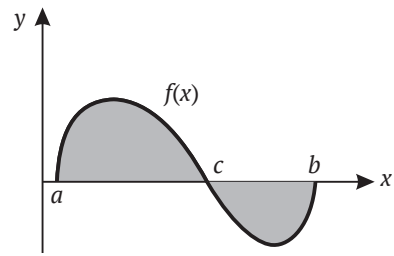


Рис. 1.1.1 ❖ Определенный интеграл Римана

Этот интеграл, называемый интегралом Римана, – в честь гениального немецкого математика Бернгарда Римана (1826–1866) – мы записываем в математических обозначениях как $\int_a^b f(x)dx$, где удлиненное S (это знак интеграла!) означает суммирование. Стоит взглянуть на то, как строится интеграл Римана, потому что не все функции имеют интеграл Римана (это функции, которые ведут себя «нехорошо»). Я покажу вам такую функцию в разделе 1.3. Идеи Римана датируются 1854 годом.

Суммирование вступает в игру, потому что интеграл на самом деле является предельным значением бесконечного числа членов в сумме. Вот как это происходит. Чтобы вычислить площадь под кривой, представьте, что интервал интегрирования по оси x от a до b разделен на n подынтервалов, при этом i-й подынтервал имеет длину Δx_i. То есть если конечные точки подынтервалов – это

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

тогда

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если мы сделаем подынтервалы равной длины, то

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a),$$

откуда получаем

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Мы предполагаем на данный момент, что n – это некоторое конечное (но «большое») целое число, что означает, что Δx является «малым».

Действительно, мы предполагаем, что Δx настолько мало, что $f(x)$, рассматриваемая на подынтервале, изменяется лишь незначительно на протяжении всего подынтервала. Пусть ζ_i – любое значение переменной x в интервале $x_{i-1} \le \zeta_i \le x_i$. Теперь площадь, ограниченная $f(x)$ над этим подынтервалом, является просто площадью очень тонкого вертикального прямоугольника высоты $f(\zeta_i)$ и горизонтальной ширины Δx, то есть площадью, равной $f(\zeta_i)\Delta x$. (Затененная вертикальная полоса на рис. 1.1.2.) Если мы сложим все эти прямоугольные области от $x = a$ до $x = b$, то получим очень хорошее приближение к общей площади под кривой от от $x = a$ до $x = b$, причем приближение становится только лучше, когда $n \to \infty$, и тогда $\Delta x \to 0$ (отдельные прямоугольные ленты становятся тоньше и тоньше). То есть значение I интеграла задается так:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

где символ суммирования стал символом интеграла, а Δx стал дифференциалом dx. Будем называть $f(x)$ подынтегральным выражением, а a и b – нижним и верхним пределами интегрирования соответственно.

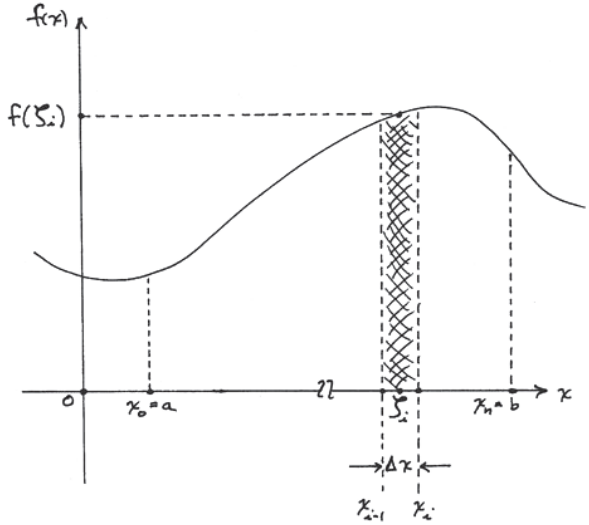


Рис. 1.1.2 ❖ Аппроксимация «площади под кривой»

Если a и b конечны ($-\infty < a < b < \infty$), то стоит отметить, что мы всегда можем написать определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как $\int_0^\infty g(t)dy$. То есть мы можем нормализовать интервал интегрирования. Просто сделайте замену переменной $t = \dfrac{x-a}{b-x}$. Если a и b не оба конечны, всегда есть некоторая замена переменной, которая нормализует интервал интегрирования. Например, предположим, что мы имеем $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$. Запишем его как $\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$ и сделаем замену переменной $t = -x$ в первом интеграле. Заметим также, что интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$ можно всегда переписать в виде $\int_0^1 f(x)dx$, записывая его в виде суммы $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty f(x)dx$ и делая замену переменной $y = \dfrac{1}{x}$ во втором интеграле, которая приводит пределы интегрирования также к 0 и 1 во втором интеграле. Отметив это сейчас, до конца данной книги я не буду беспокоиться о нормализации.

Мы можем всегда написать

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du,$$

поскольку символ, который мы используем для обозначения горизонтальной оси, есть x только по традиции. Обозначение его символом u не имеет значения для числового значения интеграла I. Мы называем переменную интегрирова-

ния *фиктивной переменной* интегрирования. Предположим, что мы используем u в качестве фиктивной переменной, и заменим верхний предел в интеграле переменной x, а нижний – минус бесконечностью. Теперь у нас больше нет определенного интеграла с конкретным числовым значением, а есть функция от x. То есть

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du,$$

и наш первоначальный определенный интеграл задается формулой

$$I = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(u)du.$$

Какова связь между $F(x)$ и $f(x)$? Напомним, что из определения производной мы имеем:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(u)du - \int_{-\infty}^{x} f(u)du}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(u)du}{\Delta x} = \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x),$$

где равенства в последней строке выполняются, потому что $f(x)$ по существу является константой в интервале интегрирования длины Δx. Интегрирование и дифференцирование – это взаимно обратные операции друг к другу. Поскольку производная любой константы C равна нулю, мы записываем так называемый *неопределенный* интеграл (интеграл без верхнего и нижнего пределов) как

$$F(x) + C = \int f(x)dx.$$

Таким образом, один из способов найти интегралы – просто найти функцию $F(x)$, которая при дифференцировании дает подынтегральное выражение $f(x)$. Это называется «поискать в таблице», и это отличный способ брать интегралы, когда у вас есть *таблица с нужным вам выражением*.

Что вы делаете, когда такой записи нет? Вот тогда все становится «интересным»! Вам нужно будет либо получить более обширную таблицу пар $F(x) \leftrightarrow f(x)$, либо создать $F(x)$ для себя. Или, может быть, неохотно, но придется признать тот факт, что, возможно, для конкретной функции $f(x)$, которая у вас есть, просто нет соответствующей функции $F(x)$. Удивительно, однако, что в последнем случае может случиться так, что хотя $F(x)$ не существует, все же может существовать вычислимое выражение для *определенного* интеграла для конкретных значений пределов интегрирования. Например, не существует $F(x)$ для $f(x) = e^{-x^2}$, и все, что мы можем написать для *неопределенного* интеграла, – это допущение

$$\int e^{-x^2} dx = ?$$

И все же (как будет показано позже в этой книге) мы можем написать *определенный* интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Это все о том, как близко к чуду то, что вы получаете в математике.

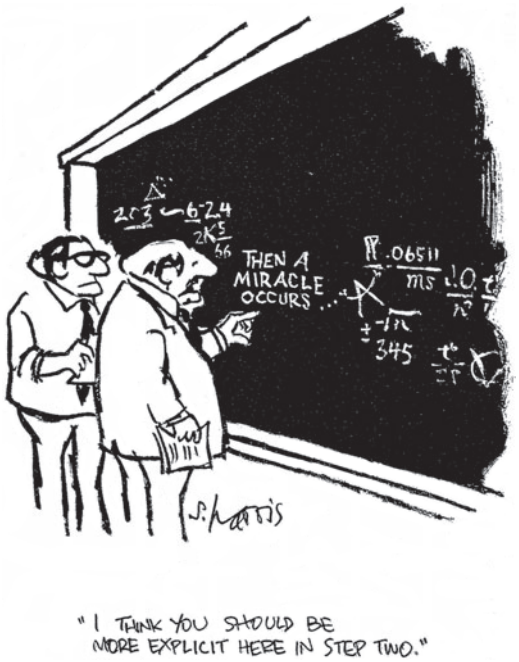


Рисунок использован с согласия Сидни Харриса, ScienceCartoonsPlus.com

На рисунке: «Здесь происходит какое-то чудо...». Под рисунком: «Спасибо, но вы должны быть более аккуратными здесь, на втором шаге»

1.2. Примеры риманова интегрирования

Вот относительно небольшие вычисления, которые наглядно демонстрируют пространственную интерпретацию интеграла Римана. Рассмотрим совокупность всех точек (x, y), которые вместе образуют область $\boldsymbol{R}$ в x,y-плоскости, с условием $|x| + |y| < 1$, где $-1 < x < 1$. Какова площадь этой области $\boldsymbol{R}$? Решение относительно y дает

$$|y| < 1 - |x|,$$

что является краткой версией двойного неравенства

$$-(1 - |x|) = y_2 < y < 1 - |x| = y_1.$$

Рассмотрим отдельно случай $x > 0$ и случай $x < 0$.

Случай 1. Если $x > 0$, тогда $|x| = x$, и двойное неравенство принимает вид

$$-(1 - x) = y_2 < y < 1 - x = y_1,$$

и часть площади $\boldsymbol{R}$ для $x > 0$ есть

$$\int_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int_0^1 \big((1-x)+(1-x)\big)dx = \int_0^1 (2-2x)dx =$$
$$= (2x - x^2)\Big|_0^1 = 2 - 1 = 1.$$

Случай 2. Если $x < 0$, тогда $|x| = -x$, и двойное неравенство принимает вид

$$-(1 + x) = y_2 < y < 1 + x = y_1,$$

и часть площади $\boldsymbol{R}$ для $x < 0$ есть

$$\int_{-1}^0 (y_1 - y_2)dx = \int_{-1}^0 \big((1+x)+(1+x)\big)dx = \int_{-1}^0 (2+2x)dx =$$
$$= (2x + x^2)\Big|_{-1}^0 = 2 - 1 = 1.$$

Так что площадь всей области $\boldsymbol{R}$ равна 2.

Обратите внимание, что мы сделали все расчеты, не заботясь о форме $\boldsymbol{R}$. Но как выглядит $\boldsymbol{R}$? Если бы мы знали это, то, возможно, площадь была бы очевидна (так и будет!). Для $x > 0$ мы имеем неравенство

$$|y| < 1 - |x|,$$

которое говорит, что одна сторона $\boldsymbol{R}$ есть

$$y_a(x) = 1 - x, \quad x > 0,$$

а другая сторона $\boldsymbol{R}$ есть

$$y_b(x) = -(1 - x) = -(1 + x), \quad x > 0.$$

Для $x < 0$ мы имеем

$$|x| + |y| < 1,$$

или, поскольку $|x| = -x$ для $x < 0$,

$$|y| < 1 + x.$$

Тогда третья сторона $\boldsymbol{R}$ есть

$$y_c(x) = 1 + x, \quad x < 0,$$

а четвертая сторона ***R*** есть линия

$$y_d(x) = -(1 + x) = -1 - x, \quad x < 0.$$

На рис. 1.2.1 показаны эти четыре стороны, и мы видим, что ***R*** – это повернутый (на 45°) квадрат с центром в начале координат с длиной стороны $\sqrt{2}$. То есть он имеет площадь, равную 2, как мы и рассчитали с помощью интеграла Римана.

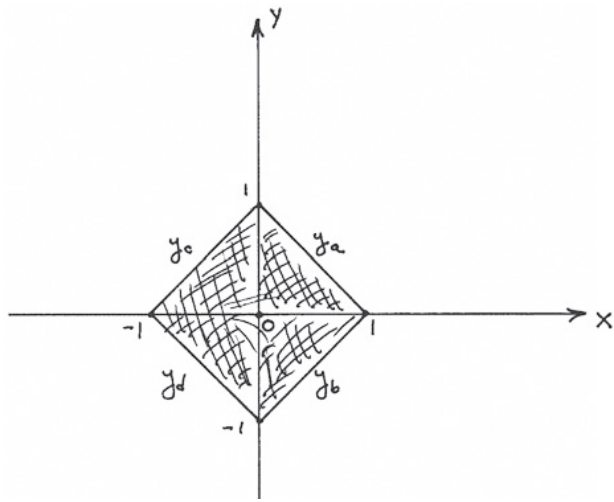


Рис. 1.2.1 ❖ Область ***R*** – это затененный повернутый квадрат

1.3. Интеграл Лебега

Теперь, чтобы быть честным с инженерами, читающими это (и чтобы избежать презрительного осуждения математиками, читающими это!), я должен взять здесь тайм-аут и сказать вам, что интеграл Римана (и его интерпретация площади) не является концом пути, когда речь идет об интегрировании. В 1902 году французский математик Анри Лебег (1875–1941) расширил интеграл Римана, чтобы иметь возможность обрабатывать подынтегральные функции, которые не очевидным способом ограничивают область. Такие функции есть; вероятно, самой известной является та, которая была построена в 1829 году немецким математиком Леженом Дирихле (1805–1859).

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если} \quad x \text{ иррационально} \end{cases}.$$

Попробуйте изобразить график функции $\varphi(x)$ – и я уверен, что вы не сможете! В любом интервале конечной длины есть бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел, и функция Дирихле очень занята, дико прыгая взад-вперед бесконечное число раз от 0 до 1, как лягушка под кофеи-

ном с высоким сахаром (то, что рациональные числа являются счетной бесконечностью, а иррациональные числа – несчетной бесконечностью, – это два замечательных положения в математике, оба известных благодаря немецкому математику русского происхождения Георгу Кантору (1845–1918)). И если вы даже не можете изобразить ее, то как вы можете говорить о функции Дирихле как «ограничивающей область»? Никак, и функция Дирихле является примером функции, которая не является интегрируемой в смысле Римана.

Вы можете подумать, что именно бесконечное число разрывных скачков в пределах конечного интервала делает функцию $\varphi(x)$ не интегрируемой по Риману, но на самом деле можно иметь аналогичную дико разрывную функцию, которая остается интегрируемой по Риману. Действительно, в 1854 году Риман построил такую функцию. Пусть $[x]$ – целое число, ближайшее к x. Например, $[9.8] = 10$ и $[-10.9] = -11$. Если x находится точно между двумя целыми числами, то $[x]$ определяется как ноль; $[3.5] = 0$. Тогда бесконечно разрывная функция Римана выглядит так:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx - [kx]}{k^2}.$$

На рис. 1.3.1 я построил приближение (используя первые восемь членов суммы) к $r(x)$ на промежутке [0, 1]. Этот рисунок, я думаю, просто начнет давать вам представление о том, насколько сумасшедше дикая $r(x)$; она имеет бесконечное число разрывов на промежутке [0, 1], и все же Риман показал, что $r(x)$ по-прежнему интегрируется в смысле Римана, тогда как $\varphi(x)$ нет[1].

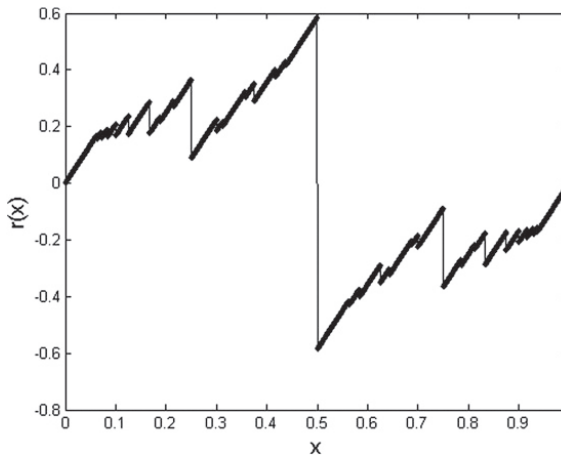


Рис. 1.3.1 ❖ Странная функция Римана

[1] Для большей информации относительно $r(x)$ см.: *Hairer E. and Wanner G.* Analysis by Its History. Springer, 1996. P. 232; *Dunham William.* The Calculus Gallery. Princeton, 2005. P. 108–112.

Однако функция Дирихле интегрируема в смысле Лебега. Вместо того чтобы делить интервал интегрирования на подынтервалы, как в интеграле Римана, интеграл Лебега делит интервал интегрирования на множества точек. Центральным интеллектуальным вкладом Лебега было введение концепции меры множества. Мерой подынтервала Римана была просто его длина. Интеграл Римана, таким образом, является лишь частным случаем интеграла Лебега, поскольку подынтервал является лишь одним конкретным способом определения множества точек; но есть и другие способы. Когда существует интеграл Римана, существует и интеграл Лебега, но обратное неверно. Когда оба интеграла существуют, они равны.

Чтобы увидеть, как это работает, давайте вычислим интеграл Лебега $\varphi(x)$ на промежутке [0, 1]. На этом интервале сначала сфокусируемся на всех рациональных значениях x, имеющих конкретное целое число n в знаменателе дроби m/n (по определению, это общая форма рационального числа). Для данного n, которое мы выбрали, мы видим, что m может изменяться от 0 до n, то есть существует $n + 1$ таких рациональных значений (точек) вдоль оси x от 0 до 1. Теперь представьте себе каждую из этих точек вложенной в интервал длины $\frac{\varepsilon}{n^3}$, где ε – сколь угодно малое (но ненулевое) положительное число. Это означает, что мы можем представить себе сколь угодно малый интервал ненулевой длины. Общая длина всех $n + 1$ интервалов равна

$$(n+1)\frac{\varepsilon}{n^3} = \frac{\varepsilon}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^3}.$$

Напомним, что это все было для конкретного n.

Теперь суммируем по всем возможным n, то есть пусть n пробегает от 1 до бесконечности. Повторений, конечно, будет много, например $n = 2$ и $m = 1$, $n = 26$ и $m = 13$ определяют одну и ту же точку. Таким образом, общая длина всех интервалов, содержащих (охватывающих) все рациональные числа от 0 до 1, не более, чем

$$\varepsilon\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right\}.$$

Как известно, обе суммы имеют конечные значения (первая – это, конечно, знаменитый результат Эйлера $\pi^2/6$, который будет получен в главе 7, а вторая сумма явно еще меньше). Дело в том, что общая сумма в скобках имеет некоторое конечное значение S, и поэтому общая длина всех интервалов, охватывающих все рациональные числа от 0 до 1, не превышает εS, и мы можем сделать это число настолько маленьким, насколько захотим, просто выбирая все меньшие значения для ε. Говорят, что лебегова мера множества всех рациональных чисел от 0 до 1 равна нулю, и тогда в смысле Лебега мы имеем[1]:

[1] Теперь промежуток [0, 1] разбивается всего на два подмножества. На одном из них функция может достигать значения 1, но мера этого подмножества не превышает εS, на втором подмножестве функция равна нулю. Поэтому интегральная сумма не превосходит εS и стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. – *Прим. перев.*

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0.$$

Теперь, подводя итог сказанному, я признаю красоту интеграла Лебега, но и одновременно «скандальный» факт, что в этой книге я не собираюсь беспокоиться об этом! В 1926 году президент математического общества (Англия) строго заявил, что «быть серьезным математиком и не использовать интеграл Лебега – это принять позицию старика в сельской деревне, который отказывается путешествовать в поезде»[1]. С другой стороны, американский инженер-электрик и ученый-компьютерщик Ричард Хэмминг (1915–1998) несколько кавалеристски опроверг это, когда заявил (в обращении[2] к *математикам* в 1997 году!):

> *...на протяжении более 40 лет я утверждал, что если бы полет самолета зависел от того, была ли какая-то функция, возникшая в его конструкции, интегрируема по Лебегу, а* ***не по Риману****, то я бы не летал в нем. А ты бы полетел? Признает ли природа эту разницу? Я сомневаюсь! Вы можете, конечно, выбирать, что вам угодно, в этом вопросе, но я заметил, что год за годом интегрирование Лебега, да и вся теория меры, кажется, играет все меньшую и меньшую роль в других областях математики, и* ***ни в одной из тех, которые просто используют математику*** *[мой акцент].*

Я думаю, что у Хэмминга более сильная позиция, и все интегралы, которые вы увидите в этой книге, следует понимать как интегралы Римана.

Для математиков, у которых может возникнуть соблазн отклонить слова Хэмминга фразой «Ну, что еще вы ожидаете от *инженера!*», позвольте мне отметить, что за год до выступления Хэмминга один математик сказал, по сути, то же самое в статье, которую Хэмминг наверняка читал. Признав, что интеграл Лебега «стал “официальным” интегралом в математических исследованиях», Роберт Бартл (1927–2003) затем заявил, что «*пришло время отказаться от интеграла Лебега как первого интеграла* [акцент Бартла]»[3].

1.4. «Интересно» и «секреты»

Итак, что такое интересный интеграл и что значит говорить о том, что он имеет «секреты»? Я полагаю, что честный ответ на «интересную» часть примерно соответствует знаменитому комментарию судьи Верховного суда Поттера

---

[1] Комментарий, сделанный после презентации статьи: *Francis E. C.* Modern Theories of Integration // The Mathematical Gazette. March 1926. P. 72–77.

[2] В статье Hamming's: Mathematics On a Distant Planet // The American Mathematical Monthly. August-September 1998. P. 640–650.

[3] См. отмеченную наградами статью Bartle's: Return to the Riemann Integral // The American Mathematical Monthly. October 1996. P. 625–632. Он был профессором математики в университете штата Иллинойс в течение многих лет, а затем в университете Восточного Мичигана.

Стюарта 1964 года: на вопрос «Что такое порнография?» он признал, что это трудно определить, «но я знаю это, когда вижу». То же самое и с интересным интегралом!

В 1957 году летом на каникулах перед старшими классами средней школы я купил копию второго издания знаменитого учебника Джорджа Б. Томаса «Математический анализ и аналитическая геометрия» для занятий в летней школе в местном колледже. Я до сих пор помню волнение, которое испытал, когда, пролистывая страницы в первый раз, столкнулся (на стр. 369) со следующим (Томас говорит, что это из «теории подъемной силы» аэродинамики):

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\pi.$$

Почему я, еще ребенок, не достигший и семнадцати лет, который еще недавно строил модели самолетов из комплектов бальзового дерева и протекающих тюбиков клея, нашел это «интересным»? Я не знал тогда – и я не уверен, что знаю даже сейчас, – за исключением того, что это выглядит просто «таинственным и экзотическим».

Теперь некоторые могут посмеяться над этим, но мне все равно – мне кажется, что аэродинамический интеграл все еще выглядит таинственным и экзотическим! Эта строка с формулой – такая же замечательная строка, как и все, что вы найдете у Хемингуэя или Достоевского, но, в отличие от даже величайшей фантастики, это строка, которую никто не мог просто выдумать. В конце концов, какое отношение к π имеют все эти странные (для меня) вещи в левой части знака равенства? Конечно, я знал даже в те давние времена, что они тесно связаны с кругами, но я не видел никаких кругов слева. Интересно!

Такая эмоциональная реакция не ограничивается только математиками-любителями; профессионалы могут быть охвачены той же эйфорией. Например, в 1935 году в конце своего президентского обращения к Лондонскому математическому обществу английский математик Г. Н. Уотсон (1886–1965) упомянул этот удивительный определенный интеграл:

$$\int_0^{\infty}e^{-3\pi x^2}\frac{\sinh(\pi x)}{\sinh(3\pi x)}dx=\frac{1}{e^{3\pi/3}\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2n(n+1)\pi}}{(1+e^{-\pi})^2(1+e^{-3\pi})^2\ldots(1+e^{-(2n+1)\pi})^2}.$$

Он заявил, что это дало ему «острые ощущения, неотличимые от острых ощущений, которые я испытываю, когда вхожу в Новую Ризницу Капеллы Медичи и вижу перед собой строгую красоту четырех статуй, представляющих День, Ночь, Вечер и Рассвет, который Микеланджело поставил над могилами Джулиано Медичи и Лоренцо Медичи».

Вот это да!

Хорошо, теперь что значит «секреты интегралов»? Я постараюсь ответить на это примером. Предположим, я говорю вам, что

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln(2).$$

Вы, вероятно, просто пожмете плечами и скажете (или, по крайней мере, подумаете, если будете слишком вежливы, чтобы это сказать): «Хорошо. Откуда ты это взял, из хорошей таблицы интегралов? Какую из них ты использовал? Я тоже посмотрю, что там». И вы могли бы, но *могли бы вы получить* результат? Вот что я имею в виду, говоря о «секретах» интегралов. Это искусство начинать с интеграла по левую сторону от знака равенства и каким-то образом вычислять выражение с правой стороны. (Мы найдем этот интеграл позже в книге, см. (2.2.4).)

Я намеренно использую слово *искусство*. Нет теории для нахождения определенных интегралов. Каждый новый интеграл – это совершенно новый вызов, и каждый новый вызов почти всегда требует нового трюка или, по крайней мере, одного или двух обращений к предыдущему трюку. Это вправду *трюк*. Некоторые люди могут в ужасе отшатнуться, но настоящий аналитик просто улыбается с предвкушением обещания праведной борьбы. И даже если интеграл выигрывает на данный момент, оставляя аналитика в изнеможении и с мучительной головной болью, аналитик знает, что всегда есть завтра, когда можно попытаться снова.

1.5. Некоторые примеры трюков

Теперь, просто чтобы вы знали, о чем я говорю, когда использую слово «трюк», вот первый пример трюка в этой книге (остальная часть этой книги – по сути, всего лишь один новый трюк за другим!). Что стоит в интеграле справа

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{e^{1/x}+1}\,dx = ?$$

Этот интеграл почти наверняка выглядит довольно страшно почти всем с первого взгляда; попытка найти функцию $F(x)$, при дифференцировании которой получается подынтегральное выражение, конечно, не кажется многообещающей. Но на самом деле этот определенный интеграл может решить даже первокурсник, если увидит хитрость! Поэкспериментируйте с этим некоторое время, пока я прокладываю себе путь к потрясающему откровению ответа, и посмотрим, сможете ли вы победить меня в этом.

Рассмотрим более простой интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{d(x)+1}\,dx,$$

где $d(x)$ – это любая функция от x, какая вам нравится. (Для исходного интеграла $d(x) = e^{(1/x)}$.) Я наложу небольшое ограничение на $d(x)$, но не сейчас. Если мы напишем

$$g(x) = \frac{\cos x}{d(x)+1},$$

тогда мы приходим (конечно!) к интегралу

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx.$$

Не важно, что представляет из себя $g(x)$, мы всегда можем записать ее как сумму четной функции $g_e(x)$ и нечетной функции $g_o(x)$. То есть

$$g(x) = g_e(x) + g_o(x).$$

Откуда мы знаем, что можем это сделать? Да потому, что мы можем всегда записать, что такое $g_e(x)$ и $g_o(x)$. По определениям четной и нечетной функций мы имеем:

$$g(-x) = g_e(-x) + g_o(-x) = g_e(x) - g_o(x),$$

и простая алгебраическая выкладка приводит нас к равенствам:

$$g_e(x) = \frac{g(x)+g(-x)}{2}$$

и

$$g_0(x) = \frac{g(x)-g(-x)}{2}.$$

Теперь

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} g_e(x)dx + \int_{-1}^{1} g_o(x)dx = \int_{-1}^{1} g_e(x)dx,$$

потому что благодаря «симметрии» нечетной функции относительно $x = 0$ мы имеем (представьте себе «область под кривой»):

$$\int_{-1}^{1} g_o(x)dx = 0.$$

Для нашего первоначального интеграла мы имеем:

$$g(x) = \frac{\cos x}{d(x)+1},$$

и тогда

$$g_e(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{d(x)+1} + \frac{\cos(-x)}{d(-x)+1}\right],$$

или поскольку $\cos(-x) = -\cos(x)$, то есть потому что косинус является четной функцией:

$$g_e(x) = \frac{\cos x}{2}\left[\frac{1}{d(x)+1} + \frac{1}{d(-x)+1}\right] = \frac{\cos x}{2}\left[\frac{d(-x)+1+d(x)+1}{d(x)d(-x)+d(x)+d(-x)+1}\right],$$

или

$$g_e(x) = \frac{\cos x}{2}\left[\frac{2+d(-x)+d(x)}{d(x)d(-x)+d(x)+d(-x)+1}\right].$$

Хорошо, предположим, что теперь мы наложили ограничение на $d(x)$. Предположим, что $d(x)\ d(-x) = 1$. Вы заметите, что это как раз тот случай, и для $d(x)$ в нашем исходном интеграле ($d(x) = e^{(1/x)}$), потому что

$d(x)\ d(-x) = e^{(1/x)}e^{(-1/x)} = e^0 = 1.$

Итак, теперь вы должны увидеть, что числитель и знаменатель всего этого хлама в скобках в правой части последнего выражения для $g_e(x)$ равны! То есть все в скобках сводится к 1, и тогда

$$g_e(x) = \frac{\cos x}{2},$$

и наш страшный интеграл исчез, как воздушный шарик, уколотый булавкой:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{e^{1/x}+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = \frac{1}{2}\{\sin(x)\}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\sin(1)-\sin(-1)}{2} = \sin(1) = 0.8414709\ldots^{1}$$

Вот это трюк! Функция интегрирования `quad` MATLAB соглашается, вычисляя значение 0,8414623. Синтаксис кода: `quad(@(x)cos(x)./(exp(1./x)+1),1,1)`.

Это был довольно сложный прием, но иногда даже приемы довольно низкого уровня могут привести к «хитрым» успехам. Например, каково значение

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = ?$$

Давайте начнем с очевидного равенства $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$. В первом интеграле справа сделаем замену переменной $t = 1/x$ (и тогда $dx = -dt/t^2$). Тогда

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \int_{\infty}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right) = -\int_{\infty}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}dt = \int_1^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}dt = -\int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt.$$

---

[1] В записи sin(1) имеется в виду, что это синус 1 радиана, равного $\frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}3^\circ$ (не 1 градус).

То есть, признавая, что t и x являются всего лишь фиктивными переменными интегрирования, мы имеем $\int_0^1 = -\int_1^\infty$. И поэтому мы немедленно получаем наш результат (первоначально полученный Эйлером):

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0.} \tag{1.5.1}$$

На самом деле это частный случай более общего интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{b^2+x^2}dx.$$

Посмотрите, сможете ли вы вычислить этот интеграл (ваш ответ, конечно, должен сводиться к нулю, когда $b = 1$); если у вас возникнут проблемы, мы найдем этот интеграл в следующей главе – в (2.1.3), где вы увидите, что знание специального случая помогает (очень много!) и при выполнении общего случая.

В качестве третьего примера трюка позвольте мне показать вам пример, демонстрирующий, насколько умными могут быть новички в интегральном исчислении, когда надо вычислить значение определенного интеграла. Этот трюк восходит к 1719 году, когда итальянский математик Джулио Фаньяно (1682–1766) вычислил $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$. Конечно, сегодня даже первокурсник сразу узнает неопределенный интеграл, равный $\tan^{-1}(x)$[1], и поэтому ответом будет $\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0) = \pi/2$. Но хитроумный трюк Фаньяно требует не знания неопределенного интеграла[2], а только умения дифференцировать. Вот как это сделал Фаньяно.

Представьте себе круг с радиусом r с центром в начале координатной плоскости. Длина дуги L вдоль окружности этого круга, которая опирается на центральный угол θ, находится по формуле $L = r\theta$. Теперь предположим, что $r = 1$. Тогда $L = \theta$, и тогда с t в качестве фиктивной переменной интегрирования имеем:

---

[1] В книге используется мало распространенное у нас обозначение $\tan^{-1}(x)$ для функции arctg(x), и также обозначение функции тангенса у нас tg(x), а в книге tan(x). – *Прим. перев.*

[2] Я предполагаю, что когда вы видите $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$, то сразу определяете это как $\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. Это один из немногих «фундаментальных» неопределенных интегралов, который, по моему предположению, вы видели ранее на первом курсе математического анализа. Другие табличные интегралы: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$, $\int e^x dx = e^x$, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x)$ и $\int \ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - x$.

$$L = \theta = \int_0^{\theta} dt.$$

Затем Фаньяно поиграл с этим очень простым подынтегральным выражением (в самом деле, что может быть проще?!?), чтобы сделать его более сложным! В частности:

$$L = \int_0^{\theta} \frac{\frac{1}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)}} dt = \int_0^{\theta} \frac{\frac{1}{\cos^2(t)}}{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} dt = \int_0^{\theta} \frac{\frac{1}{\cos^2(t)}}{1+\tan^2(t)} dt.$$

Затем замена переменной $x = \tan(t)$ показывает:

$$dx = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Тогда

$$L = \theta = \int_0^{\tan(\theta)} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Предположим, что $\theta = \pi/2$. Тогда $\tan(\theta) = \tan(\pi/2) = \infty$, и, конечно, длина L составляет одну четвертую окружности круга и поэтому равна $\pi/2$, потому что $\pi/2$ составляет одну четвертую от 2π, длины окружности круга с единичным радиусом. Таким образом, *моментально* получаем:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

По тем же соображениям мы сразу имеем:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{1} \frac{dx}{1+x^2},$$

и

$$\frac{\pi}{3} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2},$$

и

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Довольно умно!