Мордехай Бен-Ари

Математические сюрпризы



ДМК Пресс
издательство

УДК 51
ББК **21.1**
Б46

Бен-Ари М.
Б46 Математические сюрпризы / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2023. – 216 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-191-7

Эта книга опровергает расхожее представление о том, что к изучению математики следует подходить со всей строгостью и эмоции в этом деле неуместны. На этих страницах вы найдете сюрпризы, фокусы и неожиданные источники вдохновения в области математики. Среди того, что вас удивит и порадует, – обоснование возможности геометрического построения алгебраическими средствами, демонстрация математических принципов на примере оригами, необычное доказательство по индукции, новый взгляд на хорошо известный результат и маловажная, на первый взгляд, теорема, легшая в основу целой отрасли математики.

Издание предназначено тем, кто увлекается математикой и знает ее в объеме средней школы.

УДК 51
ББК 21.1

© Mordechai Ben-Ari, 2022. This book is an open access publication.

This book is licensed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 Internalional License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the sourse, provide a link to the Creative Commons license and indicate if changes were made.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-3-031-13565-1 (англ.)
ISBN 978-5-93700-191-7 (рус.)

© Mordechai Ben-Ari, 2022
© Перевод, оформление, издание, ДМК Пресс, 2023

Содержание

От издательства 10

Вступительное слово 11

Предисловие 13

Глава 1. Складывающийся циркуль 18
1.1. Построение циркулем и линейкой 19
1.2. Фиксированный и складывающийся циркули 19
1.3. Построение Евклида для копирования отрезка прямой 21
1.4. Некорректное построение копии отрезка 22
1.5. Не доверяйте рисункам 24
В чем сюрприз? 25
Источники 25

Глава 2. Трисекция угла 26
2.1. Приближенные трисекции 26
2.1.1. Первая приближенная трисекция 26
2.1.2. Вторая приближенная трисекция 29
2.2. Трисекция с помощью невсиса 31
2.3. Удвоение куба с помощью невсиса 32
2.4. Трисекция угла с помощью квадратрисы 33
2.5. Числа, допускающие построение 35
2.6. Числа, допускающие построение, как корни многочленов 37
2.7. Невозможность классических построений 39
В чем сюрприз? 41
Источники 41

Глава 3. Квадратура круга 42
3.1. Построение Кочански 43
3.2. Первое построение Рамануджана 44
3.3. Второе построение Рамануджана 47
3.4. Квадратура круга с помощью квадратрисы 50
В чем сюрприз? 51
Источники 51

Глава 4. Теорема о пяти красках 52
4.1. Плоские карты и планарные графы 52
4.2. Формула Эйлера 54
4.3. Непланарные графы 56
4.4. Степени вершин 57
4.5. Теорема о шести красках 58
4.6. Теорема о пяти красках 59
4.7. Некорректное доказательство Кемпе теоремы о четырех красках 61
В чем сюрприз? 62
Источники 62

Глава 5. Как организовать охрану музея 63
5.1. Раскрашивание триангулированных многоугольников 64
5.2. От раскраски многоугольников к охране музея 66
5.3. Любой многоугольник можно триангулировать 66
В чем сюрприз? 69
Источники 69

Глава 6. Индукция 70
6.1. Аксиома математической индукции 70
6.2. Числа Фибоначчи 72
6.3. Числа Ферма 75
6.4. 91-функция Маккарти 76
6.5. Задача Иосифа Флавия 77
В чем сюрприз? 80
Источники 80

Глава 7. Решение квадратных уравнений 81
7.1. Традиционные методы решения квадратных уравнений 81
7.2. Связь между корнями и коэффициентами 82
7.3. Примеры применения метода Ло 84
7.4. Вывод традиционной формулы 86
7.5. Геометрическое решение квадратных уравнений аль-Хорезми 86
7.6. Построение Кардано для решения кубических уравнений 88
7.7. Мнимые числа их не смущали 89
7.8. Метод Лилла и окружность Карлайла 90
7.9. Численное нахождение корней 93
В чем сюрприз? 94
Источники 94

Глава 8. Теория Рамсея 95
8.1. Тройки Шура 95
8.2. Пифагоровы тройки 97
8.3. Задача ван дер Вардена 98
8.4. Теорема Рамсея 99

8.5. Вероятностный метод 100
8.6. SAT-решатели 101
8.6.1. Логика высказываний и SAT-задача 102
8.6.2. Тройки Шура 102
8.6.3. Пифагоровы тройки 103
8.6.4. Краткий обзор алгоритма DPLL 104
8.7. Пифагоровы тройки в вавилонской математике 105
В чем сюрприз? 108
Источники 108

Глава 9. Задача Лэнгфорда 109
9.1. Задача Лэнгфорда как задача о покрытии 109
9.2. Для каких значений ***N*** задача Лэнгфорда разрешима? 111
9.3. Решение для L(4) 114
В чем сюрприз? 115
Источник 115

Глава 10. Аксиомы оригами 116
10.1. Аксиома 1 116
10.2. Аксиома 2 117
10.3. Аксиома 3 118
10.4. Аксиома 4 120
10.5. Аксиома 5 121
10.6. Аксиома 6 123
10.6.1. Вывод уравнения сгиба 125
10.6.2. Вывод уравнений отражения 128
10.6.3. Касательные к параболе 129
10.7. Аксиома 7 130
В чем сюрприз? 132
Источники 132

Глава 11. Фокус-покус 133
11.2. Описание метода Лилла 135
11.2.1. Метод Лилла как алгоритм 135
11.2.2. Отрицательные коэффициенты 136
11.2.3. Нулевые коэффициенты 137
11.2.4. Нецелые корни 137
11.2.5. Кубический корень из двух 138
11.3. Доказательство корректности метода Лилла 139
11.4. Складывание Белох 140
В чем сюрприз? 141
Источник 141

Глава 12. Геометрические построения с помощью оригами 142
12.1. Трисекция угла Абе 142
12.2. Трисекция угла Мартина 143

12.3. Удвоение куба Мессера ... 145
12.4. Удвоение куба Белох ... 147
12.5. Построение правильного девятиугольника ... 148
В чем сюрприз? ... 150
Источники ... 150

Глава 13. Циркуля достаточно ... 151

13.1. Что такое построение одним циркулем? ... 151
13.2. Отражение точки ... 152
13.3. Построение окружности заданного радиуса ... 153
13.4. Сложение и вычитание отрезков ... 154
13.5. Построение пропорционального отрезка ... 157
13.6. Построение точки пересечения двух прямых ... 158
13.7. Построение точек пересечения прямой и окружности ... 160
В чем сюрприз? ... 161
Источник ... 161

Глава 14. Линейки и одной окружности достаточно ... 162

14.1. Что такое построение одной линейкой? ... 162
14.2. Построение прямой, параллельной заданной ... 163
14.3. Построение перпендикуляра к заданной прямой ... 166
14.4. Копирование отрезка в заданном направлении ... 166
14.5. Построение пропорционального отрезка ... 167
14.6. Построение квадратного корня ... 168
14.7. Построение точек пересечения прямой и окружности ... 169
14.8. Построение точек пересечения двух окружностей ... 169
В чем сюрприз? ... 171
Источники ... 171

Глава 15. Конгруэнтны ли треугольники с одинаковыми площадью и периметром? ... 172

15.1. От треугольника к эллиптической кривой ... 173
15.2. Решение уравнения эллиптической кривой ... 175
15.3. Вывод треугольника из эллиптической кривой ... 177
В чем сюрприз? ... 178
Источники ... 178

Глава 16. Построение правильного семнадцатиугольника ... 179

16.1. Построение правильных многоугольников ... 180
16.2. Основная теорема алгебры ... 181
16.3. Корни из единицы ... 181
16.4. Доказательство Гаусса возможности построения правильного семнадцатиугольника ... 182
16.5. Вывод формулы Гаусса ... 186
16.6. Построение правильного семнадцатиугольника ... 187

16.7. Построение правильного пятиугольника 190
16.7.1. Тригонометрическое 191
16.7.2. Геометрическое 191
В чем сюрприз? 192
Источники 192

Приложение А. Теоремы из геометрии и тригонометрии 193
А.1. Теоремы о треугольнике 193
А.1.1. Вычисление площади треугольника 193
А.2. Тригонометрические тождества 196
А.2.1. Синус и косинус суммы и разности двух углов 196
А.2.2. Косинус тройного угла 198
А.2.3. Синус и косинус половинного угла 198
А.2.4. Теорема косинусов 199
А.2.5. Тангенс суммы двух углов 200
А.2.6. Тангенс половинного угла 201
А.2.7. Произведение трех тангенсов 201
А.2.8. Предел $\sin\alpha/\alpha$ 202
А.3. Теоремы о свойствах биссектрисы 203
А.4. Теорема Птолемея 204
А.4.1. Трапеция, вписанная в окружность 204
А.4.2. Доказательство теоремы Птолемея 206
А.5. Теорема Чевы 207
А.6. Теорема Менелая 208
Источники 209

Литература 210

Предметный указатель 213

Глава 1

Складывающийся циркуль

Современный циркуль является *фиксированным*: расстояние между ножками можно зафиксировать, что позволяет скопировать отрезок прямой или окружность из одного места в другое (рис. 1.1a). Евклид же пользовался *складывающимся циркулем*, не позволяющим зафиксировать расстояние (рис. 1.1b). Преподаватели часто используют складывающийся циркуль, состоящий из какого-то маркера, привязанного к веревке; он позволяет нарисовать окружность на доске. Но стоит оторвать циркуль от доски, как возможность воспроизвести длину пропадает.



Рис. 1.1a ❖ Фиксированный циркуль. Одна ножка заканчивается иглой, помещаемой в центр окружности. К другой ножке прикреплен карандаш, рисующий окружность. Ножки соединены тугим шарниром, так что расстояние между их концами (радиус окружности) сохраняется даже после того, как циркуль оторван от бумаги

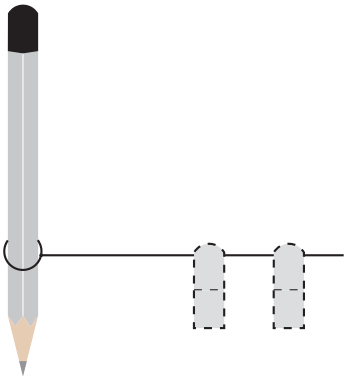


Рис. 1.1b ❖ Складывающийся циркуль. Пользователь держит один конец веревки в центре окружности. К другому концу прикреплен карандаш, которым рисуется окружность. Если оторвать циркуль от бумаги, то пальцы (изображены пунктиром) могут сдвинуться

Мы начнем эту главу с обсуждения того, зачем изучать построения циркулем и линейкой (раздел 1.1). В разделе 1.2 сравниваются два типа циркулей на примере самого простого построения: перпендикуляра, делящего отрезок

пополам. В разделе 1.3 описан евклидов метод копирования отрезка с помощью складывающегося циркуля. Это доказывает, что любое построение, возможное с помощью фиксированного циркуля, можно выполнить и с помощью складывающегося циркуля. В разделе 1.4 приведено доказательство этой теоремы, на первый взгляд корректное, но работающее не для всех конфигураций точек и прямых. Чтобы дополнительно подчеркнуть, что рисункам доверять нельзя, в разделе 1.5 приведено знаменитое «доказательство» того, что любой треугольник равнобедренный; оно выглядит корректным, но таковым не является, потому что основано на неправильном рисунке.

1.1. Построение циркулем и линейкой

Раньше построения циркулем и линейкой были одной из фундаментальных концепций в курсе евклидовой геометрии. Но в последнее время они выпали из школьных программ. Безусловно, практического значения эта тема не имеет. Как будет показано в разделах 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, еще греки знали, как с помощью лишь немного усовершенствованных инструментов выполнять построения, невозможные одними лишь циркулем и линейкой. В наше время компьютеры с помощью численных методов могут выполнять построения с любой точностью.

Тем не менее я полагаю, что изучение геометрических построений имеет ряд преимуществ:

- труднее, но интереснее изучать геометрию при помощи построений, а не просто читая теоремы и их доказательства;
- попытки найти нужное построение приводили к прорывным открытиям в математике. В главе 16 показано, что построение Гаусса заложило основы современной общей алгебры, в частности теории, разработанной Эваристом Галуа;
- в какой-то мере противоречит интуиции, а потому очень интересно существование доказательства того, что некоторые геометрические объекты построить невозможно;
- печально, но есть много людей, тратящих годы жизни в попытках выполнить невозможное построение. Учащиеся определенно должны знать о тщетности таких усилий.

1.2. Фиксированный и складывающийся циркули

В некоторых учебниках геометрии серединный перпендикуляр отрезка строится путем проведения двух окружностей с центрами в концах отрезка равных радиусов, которые должны быть *больше половины длины отрезка* (рис. 1.2а). Для этого нужен фиксированный циркуль, потому что после проведения окружности с центром в A расстояние между ножками циркуля не должно изменяться до проведения окружности с центром в B.

На рис. 1.2b показано построение серединного перпендикуляра с помощью фиксированного или складывающегося циркуля. Строятся две окружности: одна с центром в A радиусом $\overline{AB}$, а другая с центром в B радиусом $\overline{BA}$. Это можно сделать с помощью складывающегося циркуля, т. к. $\overline{AB} = \overline{BA}$ (это очевидно), поэтому циркулю не нужно «запоминать» длину $\overline{AB}$, чтобы построить окружность такого же радиуса с центром в B. Доказательство того, что прямая, показанная на рис. 1.2a, является серединным перпендикуляром, отнюдь не тривиально, оно опирается на такие продвинутые понятия, как конгруэнтность треугольников. Однако же доказательство правильности построения на рис. 1.2b просто и основывается на том факте, что треугольник $\triangle ABC$ равносторонний. На самом деле это первое предложение в «Началах» Евклида. $\overline{AC} = \overline{AB}$, потому что это радиусы одной и той же окружности, и точно так же $\overline{BC} = \overline{BA}$. Имеем: $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

На рис. 1.3a показано, что при построении с помощью фиксированного циркуля треугольник получается равнобедренным, но необязательно равносторонним (рис. 1.3b).

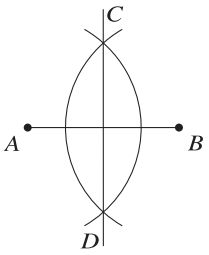


Рис. 1.2a ❖ Построение серединного перпендикуляра с помощью фиксированного циркуля

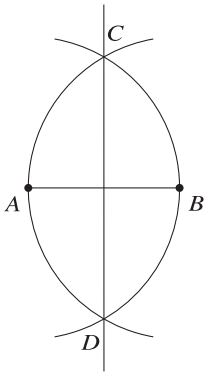


Рис. 1.2b ❖ Построение серединного перпендикуляра с помощью фиксированного или складывающегося циркуля

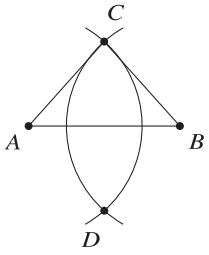


Рис. 1.3a ❖ Построение равнобедренного треугольника с помощью фиксированного циркуля

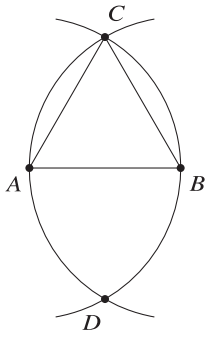


Рис. 1.3b ❖ Построение равностороннего треугольника с помощью складывающегося циркуля

1.3. Построение Евклида для копирования отрезка прямой

Второе предложение в «Началах» Евклида описывает, как получить копию заданного отрезка $\overline{AB}$, один из концов которого совпадает с заданной точкой C. Это означает, что фиксированный циркуль не дает никаких дополнительных возможностей и складывающегося циркуля достаточно, хотя построения получаются более сложными.

Теорема 1.1. *Пусть даны отрезок $\overline{AB}$ и точка C. Тогда с помощью складывающегося циркуля можно построить отрезок $\overline{CC'}$, один конец которого совпадает с точкой C и такой, что $\overline{AB} = \overline{CC'}$* (рис. 1.4a).

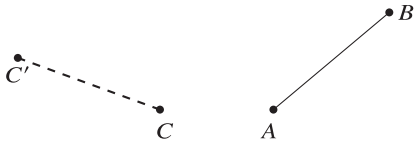


Рис. 1.4a ❖ Копирование отрезка $\overline{AB}$. Ориентация $\overline{CC'}$ не имеет значения

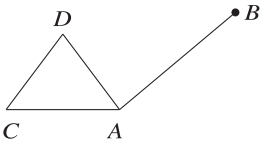


Рис. 1.4b ❖ Копирование отрезка с помощью складывающегося циркуля

Доказательство. Проведем отрезок $\overline{AC}$. Построим равносторонний $\triangle ACD$ на основании $\overline{AC}$ (рис. 1.4b). Согласно первому предложению Евклида, этот треугольник можно построить с помощью складывающегося циркуля. Продолжим отрезок, соединяющий *точку D с точкой A*, и отрезок, соединяющий *точку D с точкой C* (рис. 1.5a). Построим окружность с центром в A и радиусом $\overline{AB}$ и обозначим E пересечение этой окружности с лучом $\overline{DA}$ (рис. 1.5b). Построим окружность с центром в D и радиусом $\overline{DE}$ и обозначим F пересечение этой окружности с лучом $\overline{DC}$ (рис. 1.6).

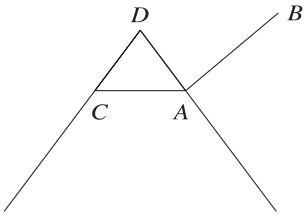


Рис. 1.5a ❖ Построение лучей, исходящих из D

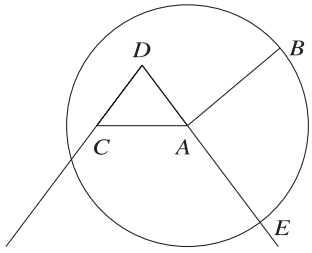


Рис. 1.5b ❖ Построение окружности радиуса $\overline{AB}$

$\overline{DC} = \overline{DA}$, потому что $\triangle ACD$ равносторонний. $\overline{AE} = \overline{AB}$ как радиусы одной окружности, и по той же причине $\overline{DF} = \overline{DE}$. Поэтому

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}.$$ □

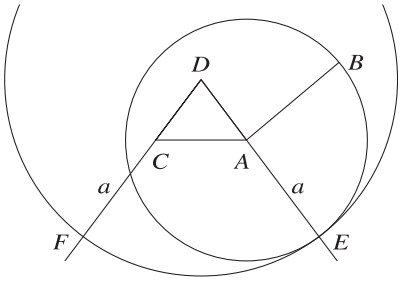


Рис. 1.6 ❖ Построение $\overline{CF} = \overline{AB}$

Направления лучей существенны. Приведенное доказательство проходит для любого отрезка $\overline{AB}$ и любой точки C, вне зависимости от их взаимного расположения. В силу сделанного выбора направлений «конус», ограниченный двумя лучами, пересекает окружности, даже если $\overline{AC} > \overline{AB}$ (рис. 1.7).

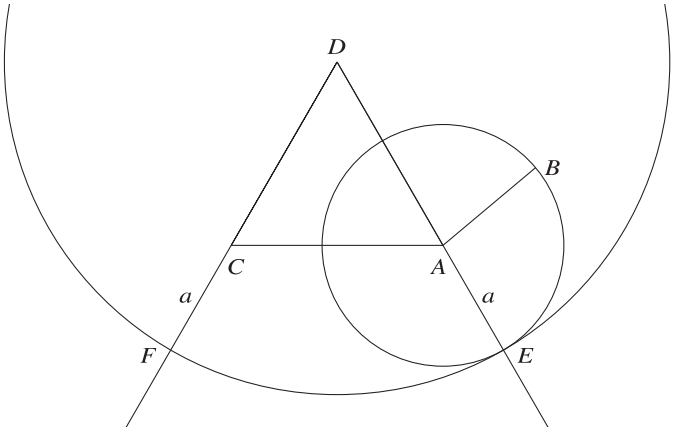


Рис. 1.7 ❖ Построение в случае $\overline{AC} > \overline{AB}$

1.4. Некорректное построение копии отрезка

Доказательство. Построим три окружности: с центром в A и радиусом $\overline{AB}$, с центром в A и радиусом $\overline{AC}$ и с центром в C и радиусом $\overline{AC} = \overline{CA}$. Обозначим пересечения окружностей с центрами в A и C соответственно E и F, а пересечение окружности с центрами в C и окружности с центром в A и радиусом $\overline{AB}$ обозначим D. На рис. 1.8 показано построение в случае, когда $\overline{AC} > \overline{AB}$.

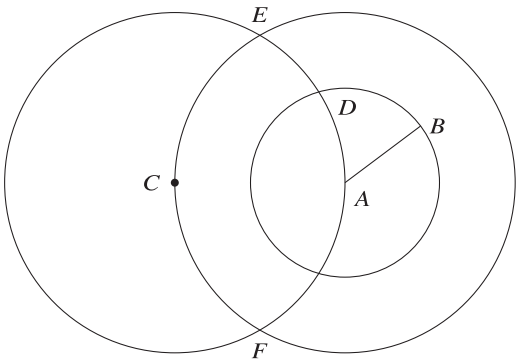


Рис. 1.8 ❖ Построение копии отрезка (1)

Построим окружность с центром в E и радиусом $\overline{ED}$. Обозначим G пересечение этой окружности и окружности с центром в A и радиусом $\overline{AC}$. Точки пересечения две, поэтому выберем ту, что ближе к C (рис. 1.9). $\overline{CD} = \overline{CE}$ как радиусы одной окружности, и точно так же $\overline{AE} = \overline{AG}$. По построению, радиусы $\overline{CE}$ и $\overline{AE}$ равны. Поэтому

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

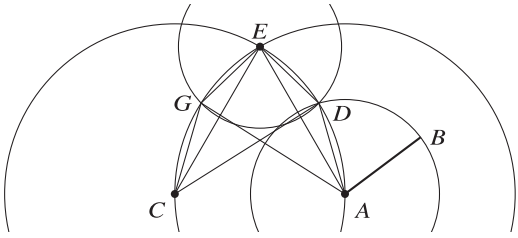


Рис. 1.9 ❖ Построение копии отрезка (2)

$\overline{EG} = \overline{ED}$ как радиусы одной окружности, поэтому $\triangle EAG \cong \triangle DCE$ по трем сторонам и $\angle GEA = \angle DEC$.

Поскольку

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA,$$

то $\triangle ADE \cong \triangle CGE$ по двум сторонам и углу между ними. $\overline{AB} = \overline{AD}$ как радиусы меньшей окружности с центром в точке A, поэтому $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. □

Доказательство корректно, только если $\overline{AC} > \overline{AB}$. На рис. 1.10 показано, что получается, когда $\overline{AC} < \overline{AB}$. Как видим, в этом случае $\overline{AB} \neq \overline{GC}$.

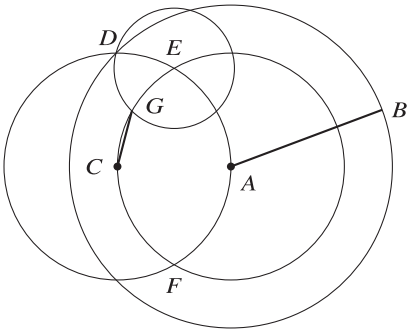


Рис. 1.10 ❖ Рисунок,
для которого доказательство не проходит

1.5. Не доверяйте рисункам

Теорема 1.2 (разумеется, неправильная). *Все треугольники равнобедренные.*

Доказательство (неверное). Пусть $\triangle ABC$ – произвольный треугольник и P – пересечение биссектрисы угла $\angle BAC$ и серединного перпендикуляра к отрезку $\overline{BC}$. Пересечения перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, обозначим соответственно E и F (рис. 1.11). $\triangle APE \cong \triangle APF$, потому что это прямоугольные треугольники с равными углами α и общей стороной $\overline{AP}$. $\triangle DPB \cong \triangle DPC$, потому что это прямоугольные треугольники, $\overline{PD}$ – общая сторона, а $\overline{BD} = \overline{CD} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$, потому что это прямоугольные треугольники, $\overline{EP} = \overline{PF}$ в силу первой конгруэнтности, а $\overline{PB} = \overline{PC}$ в силу второй конгруэнтности. Объединяя эти равенства, получаем, что $\triangle ABC$ равнобедренный:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}.$$ □

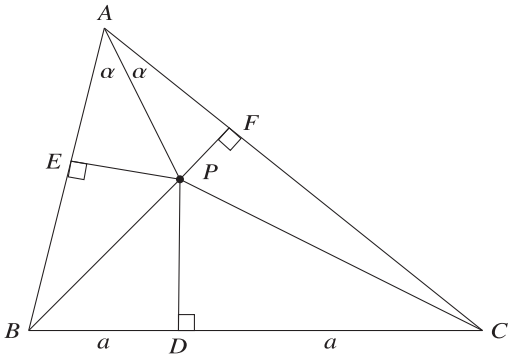


Рис. 1.11 ❖ Неверное доказательство того,
что все треугольники равнобедренные

Логика доказательства правильна, но рисунок, на котором оно основано, неверен, т. к. точка P на самом деле находится вне треугольника (рис. 1.12).

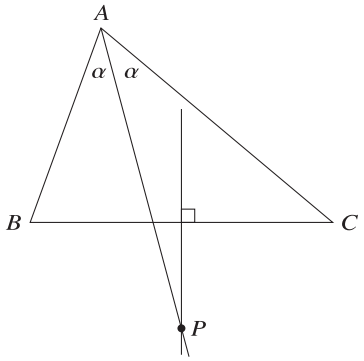


Рис. 1.12 ❖ Почему построение не работает

В чем сюрприз?

В школе я считал само собой разумеющимся, что у циркуля имеется тугой шарнир, позволяющий сохранить расстояние между иглой и карандашом даже после отрыва циркуля от бумаги. Когда учитель использовал циркуль, состоящий из веревки и кусочка мела, я даже не задумывался о том, что он отличается от моего. Статья Готфрида Тусана стала настоящим сюрпризом, как и его демонстрация некорректности доказательств, данных после Евклида, поскольку они зависели от рисунков, содержащих необоснованные предположения. Я рекомендую эту статью всем читателям, желающим углубить свое понимание доказательств в математике.

Источники

Эта глава основана на работе [50]. Некорректное построение, доказывающее эквивалентность обоих циркулей, в разделе 1.4 взято из работы [37]. Полный перевод «Начал» Евклида на русский язык с обширными комментариями осуществил Д. Д. Мордухай-Болтовский[1].

[1] Начала Евклида / пер. с греч. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского; под ред. М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. М.; Л.: ГИТТЛ, Т. 1. 1948; Т. 2. 1949.

Глава 2

Трисекция угла

Невозможно разделить произвольный угол на три равные части с помощью только циркуля и линейки. Для трисекции необходимо строить кубические корни, но с помощью циркуля и линейки можно построить лишь длины, составленные из целых чисел с применением четырех арифметических действий и извлечения квадратного корня. Это доказал Пьер Ванцель в 1837 году. Тем не менее бесчисленные любители продолжают попытки осуществить трисекцию угла. Их построения – лишь приближения, хотя они убеждены, что все правильно. В разделе 2.1 приведены примеры двух таких построений, выведены формулы углов и вычислены погрешности приближения.

Еще древнегреческие математики открыли, что если разрешены другие инструменты, то трисекцию угла выполнить можно. В разделе 2.2 описывается построение Архимеда с помощью простого инструмента – *невсиса*, а в разделе 2.3 показано, как с помощью того же невсиса удвоить куб. В разделе 2.4 представлена трисекция угла с помощью *квадратрисы*, предложенная Гиппием. Оставшаяся часть главы посвящена доказательству невозможности трисекции угла. В разделе 2.5 охарактеризованы числа, допускающие построение, в разделе 2.6 эти числа связаны с корнями многочленов, а в разделе 2.7 с помощью развитой ранее теории показано, что трисекция угла и удвоение куба невозможны.

2.1. Приближенные трисекции

2.1.1. Первая приближенная трисекция

Построение. Пусть $\theta = \angle AOB$ – произвольный угол. Без ограничения общности можно предположить, что точки A и B расположены на единичной окружности с центром в O. Разделим угол $\angle AOB$ пополам и обозначим C точку пересечения биссектрисы с единичной окружностью. Пусть D – середина отрезка $\overline{OA}$, а T – середина отрезка $\overline{DC}$. Обозначим φ угол $\angle DOT$ (рис. 2.1).

Теорема 2.1.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin(\theta/2)}{1+2\cos(\theta/2)}.$$

Доказательство. Рисунок 2.2 – часть рис. 2.1 с дополнительными построениями.

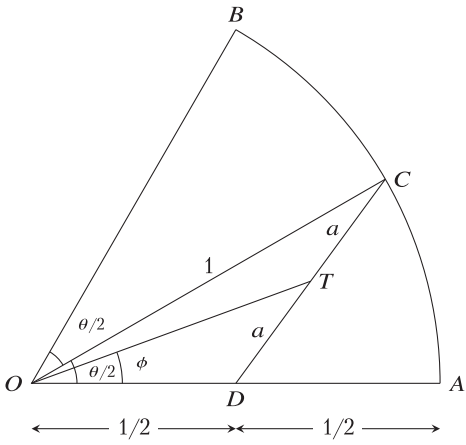


Рис. 2.1 ❖ Первая приближенная трисекция (1)

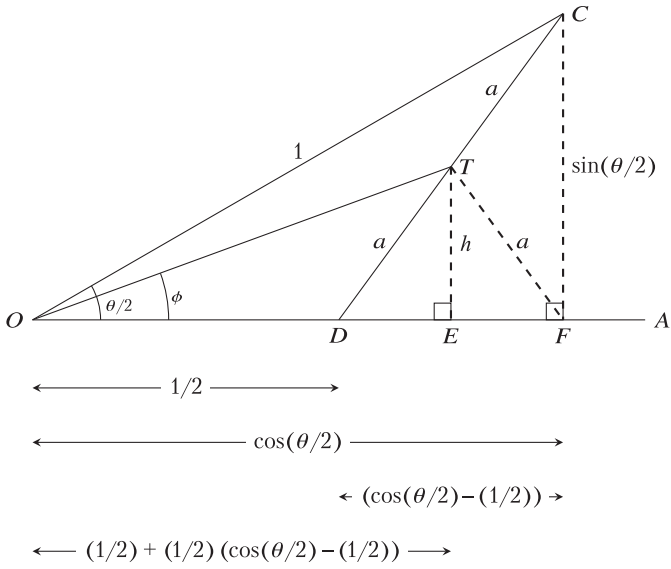


Рис. 2.2 ❖ Первая приближенная трисекция (2)

Пусть $\overline{CF}$ – перпендикуляр к $\overline{OA}$, пересекающий $\overline{OA}$ в точке F. Поскольку $\overline{OC} = 1$, то $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$ и $\overline{OF} = \cos(\theta/2)$. Пусть $\overline{TE}$ – перпендикуляр к $\overline{OA}$, пересекающий $\overline{OA}$ в точке E.

T – середина $\overline{DC}$, поэтому $\overline{DT} = \overline{TC} = a$. Но $\overline{FT}$ – медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, поэтому $\overline{FT} = a$ и, следовательно, $\triangle DTF$

равнобедренный. Отсюда следует, что $\overline{TE}$ является одновременно медианой и высотой, опущенной на сторону $\overline{DF}$. По рисунку легко видеть, что

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Вычислим длину $2a = \overline{CD}$, воспользовавшись теоремой Пифагора для треугольника $\triangle DCF$:

$$(2a)^2 = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Длину $h = \overline{TE}$ можно вычислить по теореме Пифагора для $\triangle DTE$:

$$a^2 = h^2 + \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2;$$

$$h^2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} - \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$h = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{\overline{OE}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1 + 2\cos\frac{\theta}{2}}.$$ □

Это приближение к трисекции $\varphi = \theta/3$. Для $\theta = 60°$:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sin 30°}{1 + 2\cos 30°}\right) = \operatorname{arctg} 0.366 \approx 20.1° \approx 20°.$$

В табл. 2.1 приведены погрешности для нескольких острых углов. Погрешность относительно мала для небольших углов, но достигает 1 % для угла 85°.

Таблица 2.1. Погрешности первой приближенной трисекции

θ (°)	$\theta/3$ (°)	$\operatorname{arctg}\varphi$ (°)	Погрешность (°)	Погрешность (%)
5	1.667	1.667	0.000	0.004
10	3.333	3.334	0.000	0.014
15	5.000	5.002	0.002	0.032
20	6.667	6.670	0.004	0.057
25	8.333	8.341	0.007	0.088
30	10.000	10.013	0.013	0.128
35	11.667	11.687	0.020	0.174
40	13.333	13.364	0.030	0.228
45	15.000	15.043	0.043	0.289

Таблица 2.1 *(окончание)*

θ (°)	$\theta/3$ (°)	arctg φ (°)	Погрешность (°)	Погрешность (%)
50	16.667	16.726	0.060	0.358
55	18.333	18.413	0.080	0.435
60	20.000	20.104	0.104	0.520
65	21.667	21.799	0.133	0.612
70	23.333	23.500	0.166	0.713
75	25.000	25.206	0.206	0.823
80	26.667	26.918	0.251	0.941
85	28.333	28.636	0.303	1.068

2.1.2. Вторая приближенная трисекция

Построение. Пусть $\theta = \angle AOB$ – произвольный угол. Без ограничения общности можно предположить, что точки A и B расположены на единичной окружности с центром в O. Построим окружность радиуса 1/3 с центром в O, и пусть D – точка ее пересечения с $\overline{OA}$. Проведем биссектрису угла $\angle AOB$ и обозначим C точку ее пересечения с окружностью радиуса 1/3. Построим хорду $\overline{CD}$ и хорды $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$. Поскольку равным хордам противолежат равные центральные углы, $\angle TOE = \angle EOA = \varphi$ (рис. 2.3).

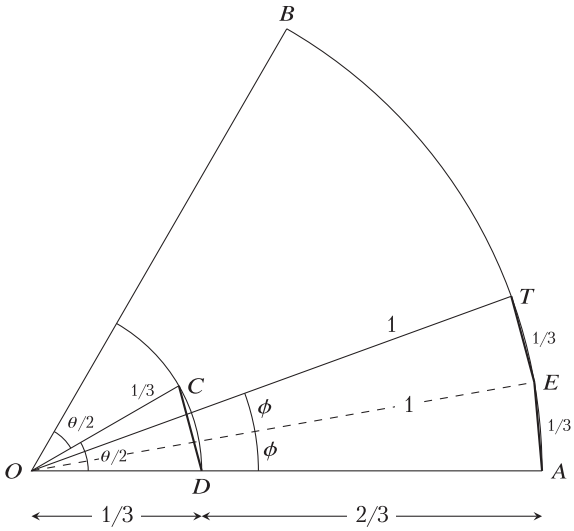


Рис. 2.3 ❖ Вторая приближенная трисекция

Теорема 2.2.

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9}\sin^2(\theta/4).$$

Доказательство. По теореме косинусов для треугольника $\triangle DOC$:

$$\overline{CD} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

По теореме косинусов для треугольника $\triangle EOA$:

$$\overline{AE} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = 2(1 - \cos\varphi).$$

После приравнивания $CD = AE$ и упрощения получаем:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

Поскольку $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ и, следовательно, $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, эту формулу можно записать и так:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{2}{9}\sin^2(\theta/4).$$

Это приближение к трисекции $2\varphi = \theta/3$. Для $\theta = 60°$:

$$2\arccos\left(1 - \frac{1}{9}(1 - \cos 30°)\right) \approx 19.8° \approx 20°.$$

В табл. 2.2 приведены погрешности для некоторых острых углов. Это построение гораздо менее точно, чем приведенное в разделе 2.1.1.

Таблица 2.2. Погрешности второй приближенной трисекции

θ (°)	$\theta/3$ (°)	$\arccos 2\varphi$ (°)	Погрешность (°)	Погрешность (%)
5	1.667	1.667	0.000	0.007
10	3.333	3.332	0.001	0.028
15	5.000	4.997	0.003	0.063
20	6.667	6.659	0.008	0.113
25	8.333	8.319	0.015	0.176
30	10.000	9.975	0.025	0.254
35	11.667	11.626	0.040	0.346
40	13.333	13.273	0.060	0.451
45	15.000	14.914	0.086	0.571
50	16.667	16.549	0.118	0.705
55	18.333	18.177	0.156	0.853
60	20.000	19.797	0.203	1.015
65	21.667	21.408	0.258	1.192
70	23.333	23.011	0.322	1.382
75	25.000	24.603	0.397	1.586
80	26.667	26.185	0.481	1.805
85	28.333	27.756	0.577	2.038