15
16
17
18
19
20
21

МАТЕМАТИКА

2015 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

С. А. Шестаков

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

ЗАДАЧА

20

ФГОС

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.
ЕГЭ 2015. Математика. Задача 20. Задачи с параметром
Под ред. И. В. Ященко
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2015
240 с.
ISBN 978-5-4439-2122-8

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2015. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2015 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2015.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль уровня основных арифметических навыков и умения решать текстовые задачи. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги: *Шестаков С. А.* ЕГЭ 2015. Математика. Задача 20. Задачи с параметром / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2015. — 240 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2122-8

Содержание

Предисловие 3

Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром 5

§ 1.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром 5

§ 1.2. Логический перебор в нелинейных уравнениях и неравенствах 14

Глава 2. Квадратный трехчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах 25

§ 2.1. Исследование дискриминанта и формулы Виета 25

§ 2.2. Расположение корней квадратного трехчлена 43

§ 2.3. Задачи, сводимые к исследованию квадратного трехчлена 59

Глава 3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств 80

§ 3.1. Монотонность 80

§ 3.2. Ограниченность 95

§ 3.3. Инвариантность 118

Глава 4. Графические интерпретации 137

§ 4.1. Метод областей 137

§ 4.2. Преобразования графиков 149

§ 4.3. Геометрические идеи 164

Глава 5. Другие методы 182

§ 5.1. Метод упрощающего значения 182

§ 5.2. Параметр как переменная 190

§ 5.3. Тригонометрические подстановки 201

§ 5.4. Векторные интерпретации в алгебре 209

Диагностическая работа 1 217

Диагностическая работа 2 218

Диагностическая работа 3 220

Диагностическая работа 4 222

Диагностическая работа 5 224

Ответы 226

Предисловие

Эта книга в значительной своей части посвящена уравнениям и неравенствам с параметрами, т. е. уравнениям и неравенствам, содержащим наряду с неизвестной величиной еще и буквенные параметры, при различных числовых значениях которых меняется число решений уравнения или неравенства, а иногда и его вид. Решение задач с параметрами предполагает, в сущности, определенную исследовательскую деятельность, требующую внимания и уверенного владения материалом школьной программы по математике во всей ее полноте, умения выдвигать и проверять гипотезы, проводить (в том числе и достаточно разветвленные) логические построения и делать выводы. Поэтому такие задания относятся к сложным и располагаются в вариантах вступительных экзаменов и ЕГЭ по математике на последних позициях, предназначенных для тех выпускников и абитуриентов, которые претендуют на высокий экзаменационный балл.

По формулировке любую задачу с параметром можно отнести к одной из двух следующих групп:

— найти все значения параметра, для каждого из которых выполняются те или иные условия (уравнение, неравенство или система имеют определенное число решений; решение принадлежит определенному множеству или удовлетворяет определенным ограничениям и т. п.; сами решения находить при этом, как правило, не требуется);

— найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет хотя бы одно решение, и указать эти решения для каждого такого значения параметра (кратко: «при каждом значении параметра решить уравнение (неравенство, систему)».

В дальнейшем для экономии места условия задач второй группы будем иногда приводить именно в краткой формулировке.

Разумная классификация задач с параметром по методам решений достаточно затруднительна, поскольку каждая из них является в определенной степени нестандартной. В этой книге, как и в книге [1], послужившей для нее своего рода прообразом, задачи классифицируются по принципу «ключевой идеи» — идеи, позволяющей найти ключ к решению. В пояснительных текстах параграфов разъясняются эти идеи и приводятся примеры с решениями, иллюстрирующими применение этих идей. В каждом параграфе приведены упражнения для самостоятельного решения, позволяющие закрепить и отработать изученный материал. Большинство задач взяты из опубликованных вариантов вступительных экзаменов и предметных олимпиад в различные вузы, открытых вариантов диагностических и тренировочных работ и ЕГЭ по математике; некоторые задачи составлены специально для этой книги.

Наряду с задачами с параметрами в книгу включены уравнения, неравенства и системы, которые принято считать нестандартными, поскольку их сведение к простейшим уравнениям и неравенствам основано не на стандартных алгебраических преобразованиях, а на иных идеях (монотонности, ограниченности, инвариантности, графических или геометрических интерпретациях и т. п.), аналогичных тем, что применяются для решения части задач с параметром.

Автор признателен и благодарен О. А. Васильевой за внимательное и неравнодушное чтение рукописи, замечания и предложения, в немалой степени способствовавшие улучшению книги.

[1] *Шестаков С. А., Юрченко Е. В.* Уравнения с параметром. Учебно-методическое пособие. — М.: Слог, 1993. — 110 с.

Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром

Эта глава посвящена своего рода знакомству с уравнениями, неравенствами и их системами, содержащими параметры: здесь представлены задачи, для решения которых не требуются какие-то специальные знания, алгоритмы или идеи — достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений и неравенств, умения выполнять стандартные алгебраические преобразования и делать не слишком сложный и разветвленный логический перебор. Так, например, уравнение $(a^2-a)x^2+2ax-3a^2+4a=0$ при $a=1$ является линейным уравнением $2x+1=0$ с единственным корнем $x=-0{,}5$; при $a=0$ обращается в тождество $0=0$, которое выполняется при любом значении x (это означает, что корнем данного уравнения при $a=0$ является любое действительное число); при значениях a, отличных от 0 или 1, данное уравнение является квадратным и либо не имеет действительных корней (если дискриминант уравнения отрицателен), либо имеет один корень (если дискриминант уравнения равен нулю), либо имеет два корня (при положительном дискриминанте). Уже из приведенного примера ясно, что для успешного решения подобных задач требуются наряду с базовыми навыками решения линейных и квадратных уравнений внимательность и скрупулезность при анализе условия и логическом переборе возможных значений параметра.

§ 1.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром

К числу самых простых задач с параметром относятся линейные уравнения и неравенства, а также их системы. Любое линейное уравнение с параметром может быть сведено к виду $f(a)\cdot x=g(a)$, а неравенство — к виду $f(a)\cdot x\vee g(a)$ (здесь a — параметр, $f(a)$ и $g(a)$ — алгебраические выражения, «$\vee$» — один из четырех возможных знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\geqslant$»). Такой вид линейного уравнения (неравенства) с параметром будем называть стандартным. Линейные уравнения и неравенства после приведения к стандартному виду обычно решаются с помощью логического перебора. В некоторых задачах, прежде чем перейти к исследованию линейного уравнения или неравенства, необходимо сделать замену переменной.

Для того чтобы ответить на вопрос о числе корней уравнения $f(a)\cdot x = g(a)$ (и при необходимости найти эти корни), достаточно рассмотреть два случая: 1) $f(a)=0$; 2) $f(a)\neq 0$. В первом случае число корней уравнения зависит от $g(a)$: если $f(a)=0$, а $g(a)\neq 0$, то корней нет; если $f(a)=0$ и $g(a)=0$, уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, и его корнем является любое действительное число. Во втором случае уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{g(a)}{f(a)}$.

Для ответа на вопрос о решениях неравенства $f(a)\cdot x<g(a)$ нужно рассмотреть три случая: 1) $f(a)>0$; 2) $f(a)<0$; 3) $f(a)=0$. В первом случае при делении обеих частей неравенства на положительное число $f(a)$ знак неравенства не меняется, и тогда $x<\dfrac{g(a)}{f(a)}$, т. е. решение неравенства — промежуток $\left(-\infty; \dfrac{g(a)}{f(a)}\right)$. Во втором случае при делении обеих частей неравенства на отрицательное число $f(a)$ знак неравенства меняется на противоположный, и тогда $x>\dfrac{g(a)}{f(a)}$, т. е. решение неравенства — промежуток $\left(\dfrac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$. В третьем случае получаем неравенство $0\cdot x<g(a)$, и если $g(a)\leqslant 0$, то решений нет, если же $g(a)>0$, то решением неравенства является любое действительное число. Исследование неравенств $f(a)\cdot x>g(a)$, $f(a)\cdot x\leqslant g(a)$ и $f(a)\cdot x\geqslant g(a)$ проводится аналогично (каждый раз рассматриваются три случая: 1) $f(a)>0$; 2) $f(a)<0$; 3) $f(a)=0$).

При решении линейных уравнений и неравенств с параметрами следует помнить и о графической интерпретации линейного уравнения или неравенства с двумя переменными: при каждом конкретном значении параметра a (для которого хотя бы одно из чисел $f(a)$ или $g(a)$ отлично от нуля) уравнение $f(a)x+g(a)y=p(a)$ является уравнением прямой на плоскости Oxy, а неравенство $f(a)x+g(a)y>p(a)$ задает на плоскости Oxy множество всех точек, расположенных выше или ниже (в зависимости от значения параметра) этой прямой. При этом нужно понимать, что при некоторых значениях параметра такое уравнение или неравенство может либо выполняться для любых x и y, либо не иметь решений вовсе.

Пример 1. Найти все пары чисел $(a; b)$, для каждой из которых имеет не менее трех корней уравнение

$$(a-2)x+b(x-2) = (2b-1)x+(2x-1)a.$$

Решение. Степень переменной x в каждой из частей данного уравнения равна 1. Значит, это уравнение является линейным относительно x, и его можно привести к стандартному виду. Для этого раскроем скобки в обеих частях уравнения и запишем его в виде $(a-2+b-2b+1-2a)x=2b-a$, откуда $(a+b+1)x=a-2b$. Если $a+b+1\neq 0$, уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{a-2b}{a+b+1}$. Если $a+b+1=0$, но $a-2b\neq 0$, уравнение не имеет корней. Если

$$\begin{cases} a+b+1=0, \\ a-2b=0, \end{cases}$$

уравнение принимает вид $0\cdot x=0$ и его корнем является любое действительное число. Значит, не менее трех корней уравнение имеет только в последнем случае. Решив систему, получим $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Пример 2. При каждом значении параметра a решить неравенство

$$2xa^2-(5x+2)a+2x+1 \geqslant 0.$$

Решение. Данное неравенство является линейным относительно переменной x. Раскроем скобки, перегруппируем слагаемые и приведем его к стандартному виду: $(2a^2-5a+2)x \geqslant 2a-1$. Корнями квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства являются числа $a=0{,}5$ и $a=2$, поэтому, разложив этот трехчлен на линейные множители, придем к неравенству $(2a-1)(a-2)x \geqslant 2a-1$. Коэффициент при переменной в левой части неравенства в зависимости от значений параметра может быть равен нулю, положителен или отрицателен. Рассмотрим все возможные случаи. Если $a=0{,}5$, неравенство принимает вид $0\cdot x \geqslant 0$ и выполняется при любом значении переменной x. Если $a=2$, неравенство принимает вид $0\cdot x \geqslant 3$ и не выполняется ни при каких значениях x. Если $(2a-1)(a-2)>0$, т. е. $a\in(-\infty; 0{,}5)\cup(2; +\infty)$, то, разделив обе части неравенства на положительное число $(2a-1)(a-2)$ и сократив дробь в правой части, получим $x\geqslant\dfrac{1}{a-2}$, т. е. $x\in\left[\dfrac{1}{a-2}; +\infty\right)$. Если $(2a-1)(a-2)<0$, т. е. $a\in(0{,}5; 2)$, то, разделив обе части неравенства на отрицательное число $(2a-1)(a-2)$ и сократив дробь в правой части, получим $x\leqslant\dfrac{1}{a-2}$, т. е. $x\in\left(-\infty; \dfrac{1}{a-2}\right]$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{a-2}; +\infty\right)$ при $a\in(-\infty; 0{,}5)\cup(2; +\infty)$; $(-\infty; +\infty)$ при $a=0{,}5$; $\left(-\infty; \dfrac{1}{a-2}\right]$ при $a\in(0{,}5; 2)$; нет решений при $a=2$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases} (3a^2-13a)x+8y=3a^2-16a-8, \\ 5x+4y=2. \end{cases}$$

Решение. Каждое уравнение системы является уравнением прямой на плоскости Oxy. Эти прямые либо параллельны (тогда они не имеют общих точек и, следовательно, система не имеет решений), либо пересекаются в одной точке (тогда система имеет единственное решение), либо совпадают (тогда система имеет бесконечно много решений). Не менее семи решений система будет иметь только в последнем случае. Напомним, что если $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, то две прямые $a_1x+b_1y=c_1$ и $a_2x+b_2y=c_2$ совпадают в том и только том случае, если соответствующие коэффициенты пропорциональны, т. е. если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. Таким образом, $\frac{3a^2-13a}{5}=\frac{8}{4}=\frac{3a^2-16a-8}{2}$. Решив уравнение $\frac{3a^2-13a}{5}=2$, получим $a=5$ или $a=-\frac{2}{3}$. Решив уравнение $\frac{3a^2-16a-8}{2}=2$, получим $a=6$ или $a=-\frac{2}{3}$. Единственным общим корнем этих уравнений является $a=-\frac{2}{3}$.

Ответ: $a=-\frac{2}{3}$.

Иногда уравнение или неравенство можно свести к линейному с помощью замены переменной. Сделав замену переменной, нужно обязательно переформулировать задачу, ведь новая переменная во многих случаях принимает значения только из определенного множества. Например, при замене $t=\cos x$ придется учитывать, что переменная t может принимать значения только из отрезка $[-1; 1]$; при замене $t=\log_5(x^2+5)$ — только из промежутка $[1; +\infty)$ и т. д. Переформулировка задачи для новой переменной в таких случаях является значимой частью решения.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 12\cos^2 x+5\cos^2 y+11=6a, \\ 15\cos^2 x+4\cos^2 y+25=12a. \end{cases}$$

Решение. Данная система является системой линейных уравнений относительно $u=\cos^2 x$ и $v=\cos^2 y$. Ясно, что $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 1]$. Задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 12u + 5v + 11 = 6a, \\ 15u + 4v + 25 = 12a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $u \in [0;\, 1]$, $v \in [0;\, 1]$. Поскольку коэффициенты при переменных не зависят от параметра, проще всего найти решение системы в общем виде. Умножим обе части первого уравнения на -4, обе части второго уравнения на 5 и рассмотрим почленную сумму полученных уравнений: $-48u + 75u - 44 + 125 = -24a + 60a$, откуда $u = \dfrac{4a-9}{3}$. Аналогично, умножив обе части первого уравнения на 5, обе части второго уравнения на -4 и рассмотрев почленную сумму полученных уравнений, после необходимых преобразований найдем $v = 5 - 2a$. Условия $u \in [0;\, 1]$, $v \in [0;\, 1]$ выполняются в том и только том случае, если

$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{4a-9}{3} \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 5 - 2a \leqslant 1. \end{cases}$$

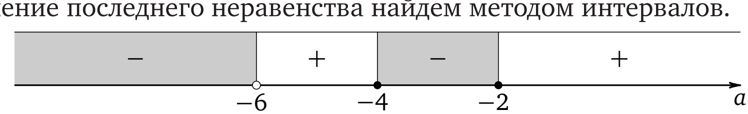
Из первого неравенства системы получим, что $a \in [2{,}25;\, 3]$, из второго — что $a \in [2;\, 2{,}5]$. Следовательно, $a \in [2{,}25;\, 2{,}5]$.

Ответ: $a \in [2{,}25;\, 2{,}5]$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6\log_{0{,}25} \sin x + a^2 + 6a + 8 = a \log_4 \sin x.$$

Решение. Приведем логарифм в левой части уравнения к основанию 4. Получим $-6\log_4 \sin x + a^2 + 6a + 8 = a\log_4 \sin x$, откуда $(a+6)\log_4 \sin x = a^2 + 6a + 8$. Пусть $\log_4 \sin x = t$. При всех допустимых значениях переменной $\sin x \leqslant 1$. Значит, $t \leqslant 0$. Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+6)t = a^2 + 6a + 8$ имеет хотя бы один неположительный корень. Корнями трехчлена в правой части уравнения являются числа $a = -4$ и $a = -2$. Разложив квадратный трехчлен на множители, получим $(a+6)t = (a+4)(a+2)$. Если $a = -6$, корней нет. Если $a \neq -6$, то $t = \dfrac{(a+4)(a+2)}{a+6}$. Условию $t \leqslant 0$ найденный корень удовлетворяет только в том случае, если $\dfrac{(a+4)(a+2)}{a+6} \leqslant 0$. Решение последнего неравенства найдем методом интервалов.



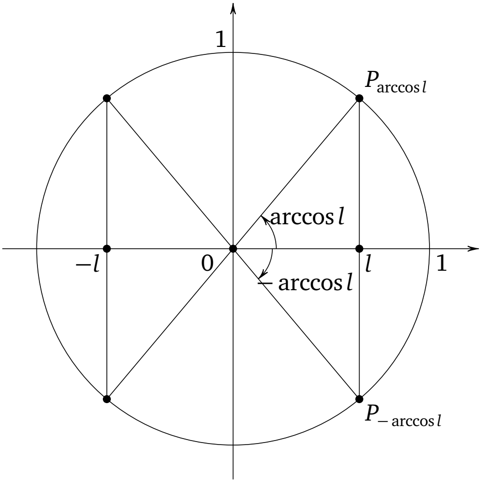
Ответ: $(-\infty;\, -6) \cup [-4;\, -2]$.

Замечание. Обратим внимание на то, что в двух последних примерах не требовалось делать обратную замену и возвращаться к прежней переменной. Эта ситуация является достаточно распространенной, и при правильной переформулировке с учетом необходимых ограничений на новую переменную возвращаться к старой не нужно, если, конечно, не требуется искать сами корни данного уравнения или решения данного неравенства. В последнем случае обратная замена является обязательной.

Пример 6. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$a\cdot 5^{|\cos x|}+1=(a-1)^2.$$

Решение. Раскроем скобки в правой части уравнения и приведем подобные слагаемые. Получим уравнение $a\cdot 5^{|\cos x|}=a^2-2a$. Если $a=0$, уравнение обращается в тождество, справедливое при любом значении переменной, т. е. в этом случае $x\in(-\infty;+\infty)$. Если $a\neq 0$, то, разделив обе части уравнения на a, получим $5^{|\cos x|}=a-2$. Пусть $t=5^{|\cos x|}$. Так как $0\leqslant|\cos x|\leqslant 1$, получим, что $5^0\leqslant t\leqslant 5^1$, или $1\leqslant t\leqslant 5$. Значит, $1\leqslant a-2\leqslant 5$, откуда $3\leqslant a\leqslant 7$. Сделав обратную замену при найденных значениях a, получим $|\cos x|=\log_5(a-2)$. Решения уравнения $|\cos x|=l$ (где $0\leqslant l\leqslant 1$) в наиболее компактной форме можно записать, воспользовавшись единичной окружностью.



Таким образом, $x=\pm\arccos(\log_5(a-2))+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\arccos(\log_5(a-2))+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a\in[3;7]$; $(-\infty;+\infty)$ при $a=0$; при прочих a решений нет.

Замечание. При решении последнего примера можно было обойтись без формальной замены переменной, эта замена была сделана только для большей наглядности.

Упражнения к § 1.1

1. а) Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения
$$9(5x-1)a^2-(59x-55)a+6(x-1)=0.$$

б) Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения
$$7(2x-1)a^2-(23x-22)a+3(x-1)=0.$$

2. а) Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства
$$4xa^2-(17x+4)a+4x+1\geqslant 0.$$

б) Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства
$$5xa^2-(26x+1)a+5x+5\leqslant 0.$$

3. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$|9x+7a-3|=|4x+3a+4|$$
имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -8.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$|7x+8a-5|=|9x+7a-2|$$
имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 9.

4. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$|3x-5a-3|\leqslant 7-5a-x$$
имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$|3x-4a-1|\leqslant 5-4a-x$$
имеет единственное решение.

5. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее трех решений система уравнений

$$\begin{cases} (2a^2-11a)x-25y=2a^2-13a-30, \\ 8x-5y=3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее трех решений система уравнений

$$\begin{cases} (9a^2-49a)x+36y=9a^2-58a+44, \\ 9y-5x=5. \end{cases}$$

6. а) Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+7y=2, \\ 3x+y=a, \\ 3x+13y=a^2+3a. \end{cases}$$

б) Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 2x-y=a, \\ 4x-y=a^2+2a. \end{cases}$$

7. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=4a, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{6}{y}=3+4a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3a, \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=3-a. \end{cases}$$

8. а) Найдите все значения параметра a, при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-6y)^{-1}=-0{,}1, \\ 7x-2y=2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x+y=2a, \\ \dfrac{1}{x-4y}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

б) Найдите все значения параметра a, при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-5y)^{-1} = -\frac{1}{8}, \\ 3x+y = 3a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 7x-3y = 3a, \\ \dfrac{1}{x-3y} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 12\cos^2 x + 11\cos^2 y + 33a = 31, \\ 33\cos^2 x + 4\cos^2 y + 151 = 198a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 21\sin^2 x + 8\sin^2 y + 59 = 6a, \\ 24\sin^2 x + 7\sin^2 y + 91 = 9a. \end{cases}$$

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5^{x+2a} \leqslant 25^{x+a-4}, \\ 6^{x-3a-3} \geqslant 36^{x+a-3} \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 3.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 7^{x+2a+1} \leqslant 49^{x+a+1}, \\ 3^{x-a-2} \geqslant 9^{x+a+2} \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x = a^2 + 5a + 4.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\log_{0,5} \cos x + 7a = a\log_{0,25} \cos x + a^2 + 12.$$

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(2^{\sin x} - 1)a^2 - (3\cdot 2^{\sin x} - 1)a + 2^{\sin x+1} = 0.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(3^{\cos x}-1)a^2-(5\cdot 3^{\cos x}-2)a+2\cdot 3^{\cos x+1}=0.$$

§ 1.2. Логический перебор в нелинейных уравнениях и неравенствах

Круг задач, решение которых основывается на стандартных преобразованиях и логическом переборе, довольно широк, а их формулировки достаточно разнообразны. Ключевым признаком такой задачи является то, что ее решение, как отмечалось выше, не предполагает знакомства с какими-то новыми идеями и методами, которых нет в школьных учебниках, а требует лишь умения выполнять преобразования, отвечать на вопросы о существовании корней уравнения или решений неравенства, удовлетворяющих определенным условиям, находить, если требуется, сами эти решения, выполнять необходимый логический перебор.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3-(a+4)x^2+4ax=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель левой части уравнения: $x(x^2-(a+4)x+4a)=0$, откуда $x=0$ или $x^2-(a+4)x+4a=0$. Корнями последнего уравнения являются $x=4$ и $x=a$ (эти корни можно найти, воспользовавшись формулами Виета или формулой корней квадратного уравнения). Ровно два различных корня данное уравнение имеет, только если $a=0$ или $a=4$.

Ответ: $a=0$, $a=4$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+2x+a=17$ и $x^2+5x=3a+18$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение. Пусть x_0 — корень каждого из данных уравнений. Тогда справедливы тождества

$$x_0^2+2x_0+a-17=0 \tag{1}$$

и

$$x_0^2+5x_0-3a-18=0. \tag{2}$$

Вычитая почленно равенство (1) из (2), получим $3x_0-4a-1=0$, откуда $x_0=\frac{4a+1}{3}$. Таким образом, данные уравнения имеют не более одного общего корня $x_0 = \frac{4a+1}{3}$. Подставим $\frac{4a+1}{3}$ вместо x в любое из уравнений, например в первое. Получим

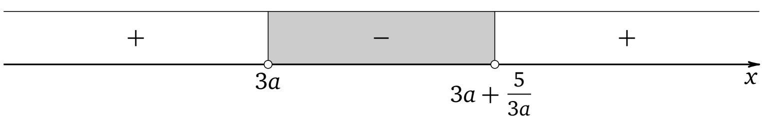
$$\left(\frac{4a+1}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{4a+1}{3} + a - 17 = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно a. Выполнив преобразования, приведем его к стандартному виду: $16a^2+41a-146=0$. Корнями последнего уравнения являются $a=-\frac{73}{16}$ и $a=2$.

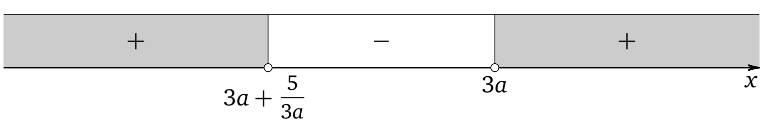
Ответ: $a=-\frac{73}{16}$, $a=2$.

Пример 3. При каждом значении параметра a решить неравенство $\frac{5}{x-3a} > 3a$.

Решение. Перенеся $\frac{5}{x-3a}$ в правую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придем к неравенству $\frac{3ax-9a^2-5}{x-3a} < 0$. При $a=0$ неравенство примет вид $-\frac{5}{x}<0$, откуда $x\in(0;+\infty)$. При $a>0$ можно разделить обе части неравенства на положительное число $3a$. Получим $\frac{x-\left(3a+\frac{5}{3a}\right)}{x-3a} < 0$. Поскольку в этом случае $3a+\frac{5}{3a} > 3a$, решением неравенства является интервал $\left(3a;\, 3a+\frac{5}{3a}\right)$:



При $a<0$ можно разделить обе части неравенства на отрицательное число $3a$, изменив знак неравенства на противоположный. Получим $\frac{x-\left(3a+\frac{5}{3a}\right)}{x-3a} > 0$. Поскольку в этом случае $3a+\frac{5}{3a} < 3a$, решением неравенства является объединение интервалов $\left(-\infty;\, 3a+\frac{5}{3a}\right) \cup$ $\cup\,(3a;+\infty)$:



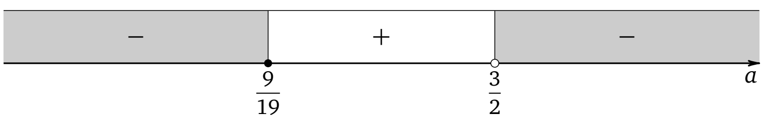
Ответ: $\left(-\infty;\, 3a+\frac{5}{3a}\right)\cup(3a;+\infty)$ при $a<0$; $(0;+\infty)$ при $a=0$; $\left(3a;\, 3a+\frac{5}{3a}\right)$ при $a>0$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+\sqrt{x^2-4ax-7a}=3$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x$. Левая часть уравнения неотрицательна в силу неотрицательности квадратного корня. Если правая часть уравнения отрицательна, корней оно не имеет. Если правая часть уравнения неотрицательна, возведение в квадрат обеих его частей является равносильным преобразованием, т. е. не приводит ни к потере корней, ни к приобретению посторонних корней. В этом случае приходим к системе

$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^2-4ax-7a=9-6x+x^2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \leqslant 3, \\ (6-4a)x=7a+9. \end{cases}$$

При $a=1{,}5$ уравнение системы не имеет корней. При $a\neq 1{,}5$ корнем уравнения системы является $x=\dfrac{7a+9}{6-4a}$. В этом случае данное уравнение имеет хотя бы один корень, только если $\dfrac{7a+9}{6-4a}\leqslant 3$. Перенеся 3 в левую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придем к неравенству $\dfrac{19a-9}{6-4a}\leqslant 0$. Решив последнее неравенство методом интервалов, получим $a\in\left(-\infty;\dfrac{9}{19}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$:



Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{9}{19}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\cos 2x-(a^2-8a+6)\sin x=3$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно 4 корня.

Решение. Перенесем все слагаемые левой части уравнения в его правую часть и, воспользовавшись формулой $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, приведем полученное уравнение к виду $6\sin^2 x+(a^2-8a+6)\sin x=0$, откуда $\sin x=0$ или $\sin x=-\dfrac{a^2-8a+6}{6}$. Корнями уравнения $\sin x=0$ являются числа $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Отрезку $[0;2\pi]$ принадлежат ровно 3 корня этого уравнения: $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$. Если $a^2-8a+6=0$, корни уравнения $\sin x=-\dfrac{a^2-8a+6}{6}$ совпадают с корнями уравнения $\sin x=0$, и только 3 корня данного уравнения принадлежат отрезку $[0;2\pi]$. Если $a^2-8a+6\neq 0$, корни уравнения $\sin x=-\dfrac{a^2-8a+6}{6}$

не совпадают с корнями уравнения $\sin x = 0$, и данное уравнение будет иметь ровно 4 корня на отрезке $[0; 2\pi]$ только в случае, если уравнение $\sin x = -\frac{a^2-8a+6}{6}$ имеет на этом отрезке единственный корень, что возможно, лишь если $\sin x = -1$ или $\sin x = 1$. Таким образом, $-\frac{a^2-8a+6}{6} = 1$ (откуда $a = 2$ или $a = 6$) или $-\frac{a^2-8a+6}{6} = -1$ (откуда $a = 0$ или $a = 8$).

Ответ: 0; 2; 6; 8.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ни одно из чисел -9 и 8 не принадлежит множеству решений неравенства

$$(x^2+x-72)\sqrt{0{,}2\cdot 5^{x^2+x-71}+a^2-3a+1} \leqslant 0.$$

Решение. Заметим, что $0{,}2\cdot 5^{x^2+x-71} = \frac{1}{5}\cdot 5^{x^2+x-71} = 5^{x^2+x-72}$. Корнями квадратного трехчлена x^2+x-72 являются числа -9 и 8. Разложив этот квадратный трехчлен на множители, перепишем неравенство в виде $(x+9)(x-8)\sqrt{5^{(x+9)(x-8)}+a^2-3a+1} \leqslant 0$. Условие задачи будет выполнено только в том случае, если при $x = -9$ и при $x = 8$ значение подкоренного выражения будет отрицательным, т. е. если $a^2-3a+2 < 0$, откуда $a \in (1; 2)$.

Ответ: $(1; 2)$.

Пример 7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(ax^2-(a+2)x+3)+\log_{0,1}(3x^2-(a+2)x+a) = 0$ имеет более двух корней.

Решение. Перейдя к основанию 10, перепишем данное уравнение в виде $\lg(ax^2-(a+2)x+3) = \lg(3x^2-(a+2)x+a)$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ax^2-(a+2)x+3 = 3x^2-(a+2)x+a, \\ 3x^2-(a+2)x+a > 0. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $(a-3)x^2 = a-3$. Если $a \neq 3$, последнее уравнение является квадратным и более двух корней иметь не может. Если $a = 3$, корнем уравнения является любое действительное число. При этом неравенство системы принимает вид $3x^2-5x+{}$ $+3 > 0$ и выполняется при любом значении переменной в силу отрицательности дискриминанта и положительности старшего коэффициента квадратного трехчлена в левой части неравенства.

Ответ: 3.

Пример 8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(3x+4)$ является решением неравенства $81x^2 \leqslant 16a^4$.

Решение. Неравенство $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(x+2)$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 \leqslant 3x+4, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства системы является отрезок $[-1; 4]$, поэтому решение системы есть $[-1; 0) \cup (0; 4]$. Из неравенства $81x^2 \leqslant \leqslant 16a^4$ получаем $|x| \leqslant \frac{4a^2}{9}$. Требование задачи будет выполнено, если

$$\begin{cases} -\dfrac{4a^2}{9} \leqslant -1, \\ 4 \leqslant \dfrac{4a^2}{9}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a^2 \geqslant \dfrac{9}{4}, \\ a^2 \geqslant 9, \end{cases}$$

т. е. $a^2 \geqslant 9$ и, значит, $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Пример 9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$a\cos 2x + |a|\cos 4x + \cos 6x = 1 \tag{1}$$

является корнем уравнения

$$2\sin x \cos 2x + \sin 5x = 2\sin 2x \cos 3x \tag{2}$$

и, наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

Решение. Уравнение (2) не содержит параметра, поэтому целесообразно начать именно с его решения. Преобразовав в сумму произведение в правой части уравнения, получим

$$2\sin x \cos 2x + \sin 5x = \sin 5x - \sin x,$$

откуда $2\sin x(\cos 2x + 0{,}5) = 0$, и, значит, $\sin x = 0$ (откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) или $\cos 2x = -0{,}5$ (откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$). Все найденные корни можно записать в более компактном виде (например, рассмотрев соответствующие им точки единичной окружности): $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, нужно найти все значения параметра a, при каждом из которых корнями уравнения (1) являются числа $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, и только они. Подставим $x = \frac{\pi n}{3}$ в уравнение (1):

$$a\cos\frac{2\pi n}{3} + |a|\cos\frac{4\pi n}{3} + \cos 2\pi n = 1.$$

Поскольку при любом $n \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\cos 2\pi n = 1, \quad \cos\frac{4\pi n}{3} = \cos\frac{2\pi n}{3} \neq 0$$

(что легко доказать, воспользовавшись единичной окружностью, применив перебор или формулы приведения), получим $a+|a|=0$, откуда $a \leqslant 0$. Следовательно, если числа $x=\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, являются корнями уравнения (1), то $a \leqslant 0$. Но из этого вовсе не следует, что при $a \leqslant 0$ уравнение (1) не имеет других корней. Поэтому нужно рассмотреть, какие корни имеет уравнение (1) при $a \leqslant 0$. В этом случае оно принимает вид $a\cos 2x - a\cos 4x + \cos 6x = 1$. Применив формулы разности косинусов и косинуса удвоенного аргумента, после упрощений получим $2a\sin 3x \sin x - 2\sin^2 3x = 0$, откуда либо $\sin 3x = 0$, либо $a\sin x - \sin 3x = 0$. Корнями уравнения $\sin 3x = 0$ являются числа $x=\frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$, совпадающие с корнями уравнения (2). Уравнение $a\sin x - \sin 3x = 0$ преобразуется к виду $a\sin x - 3\cos^2 x \sin x + \sin^3 x = 0$, откуда

$$\sin x(a - 3\cos^2 x + \sin^2 x) = 0.$$

Из последнего уравнения получим, что либо $\sin x = 0$, либо $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$. Корни уравнения $\sin x = 0$ принадлежат множеству чисел $x=\frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$. Значит, чтобы уравнение (1) не имело других корней, кроме этих чисел, нужно чтобы либо уравнение $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$ вовсе не имело корней, либо его корнями были только числа $x=\frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$. Если $x=\frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$, то либо $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ (и тогда $a=0$; ясно, что при $a=0$ других корней нет), либо $\cos^2 x = 1$ (что при $a \leqslant 0$ невозможно). Уравнение $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$ не имеет корней, если либо $\frac{a+1}{4} < 0$ (откуда $a < -1$), либо $\frac{a+1}{4} > 1$ (что при $a \leqslant 0$ невозможно). Таким образом, требование задачи выполнено, только если $a=0$ или $a<-1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\}$.

Упражнения к § 1.2

1. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 - (a-5)x^2 - 5ax = 0$ имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + 2(a+3)x^2 + 12ax = 0$ имеет ровно два различных корня.