Е.Л. Столов

Рзговоры с ИИ об алгебре и геометрии

2025

Предисловие

Обсуждение тем, связанных с ИИ, в компьютерной индустрии стало самым модным трендом в последнее время. Получены выдающиеся достижения в обработке изображений, создании текстов и ответов на запросы. Проблемы образования также не остались встороне.В данной книге мы остановимся лишь на одном аспекте — применение ИИ для текущего контроля усвоения материала студентами. Традиционный способ такого контроля сводится к выполнению заданий в аудитории и проверке домашних заданий. С появлением большого количества реализаций обученных нейронных сетей последний подход становится неактуальным, если задача сводится к решению различных численных примеров. Контроль над выполнением таких работ приходится переносить в аудиторию. Существует и другой тип заданий, для выполнения которых не нужно проводить большие вычисления, а для решения необходимо владеть теоретическим материалом. Это различные виды тестов. Эти же тесты можно использовать на экзамене для выставления финальной оценки за пройденный курс. Автор книги многие годы читал курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в Казанском федеральном университете. Сборник из некоторых таких тестов можно найти на Avito, введя запрос «Тесты по алгебре и геометрии для вузов». Работа по созданию тестов проводилась задолго до появления современных систем ИИ. На первый взгляд, с предоставлением свободного доступа к нейронным сетям создание упомянутых тестов становится бессмысленным. Достаточно сделать запрос на создание теста. Вопрос о качестве созданных тестов оставим встороне, поскольку нет простого критерия для оценки свойств теста. Это можно сделать, только имея большую статистику под рукой. Как человеку, имеющему большой опыт в разработке тестов, мне было интересно проследить, каким образом алгоритм подходит к поиску ответов.

В качестве нейронной сети была выбрана сеть YandexGPT-5.1. С большей частью представленных задач сеть справилась очень хорошо. Однако для тех случаев, когда приходится рассматривать редко встречающиеся ситуации, мощности алгоритма оказалось недостаточно. Еще хуже обстоят дела, когда требуется геометрическое воображение. Это следствие способа обучения сети на большом числе примеров, а не создания понимания трехмерной среды обитания человека. Результаты некоторых экспериментов представлены ниже. Автор копировал с экрана вывод работы алгоритма и добавлял небольшие комментарии.Речь идет о тех задачах, с которыми сеть не смогла справиться.

Все замечания по содержанию книги можно отправлять автору по адресу ystolov@list.ru.

Оглавление

1 Примеры тестов по алгебре **3**
1.1 Изменение знака определителя при изменении знака диагонального элемента 3
1.2 Матрица с элементами равными ± 1 6
1.3 Сумма двух ортогональных матриц 8
1.4 Два решения линейной системы уравнений 11
1.5 Две матрицы с общим множеством собственных векторов . . 14

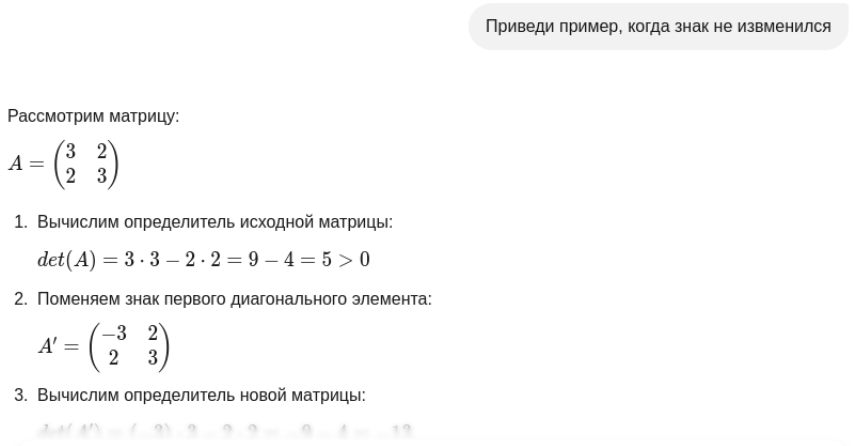
2 Примеры тестов по геометрии **18**
2.1 Точка касания трех окружностей 19
2.2 Парабола и гиперболический параболоид 21
2.3 Вектора с началом внутри тетраэдра и концами в вершинах этого тетраэдра 23

Глава 1

Примеры тестов по алгебре

1.1 Изменение знака определителя при изменении знака диагонального элемента

Этот эксперимент является скорее курьёзом, хотя демонстрирует логику работы алгоритма. Вопрос формулировался следующим образом Имеется вещественная симметрическая матрица. Что произойдет со знаком определителя матрицы, если один из элементов главной диагонали поменяет знак. Ответ был правильным: определитель поменяет знак либо знак останется прежним. Следующий запрос "Привести пример, когда знак не изменится". И тут сеть повела себя достаточно странно.



$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. Определитель исходной матрицы:

   $det(B) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 16 - 4 = 12 > 0$

8. Поменяем знак первого диагонального элемента:

   $B' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

9. Определитель новой матрицы:

   $det(B') = (-4) \cdot 4 - 2 \cdot 2 = -16 - 4 = -20$

10. Поменяем знак второго диагонального элемента:

    $B'' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

11. Определитель:

    $det(B'') = 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 = -16 - 4 = -20$

При изменении знака:

$D' = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$det(D') = (-6) \cdot 6 - 4 \cdot 4 = -36 - 16 = -52$

Финальный пример, где знак не меняется:

$E = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$det(E) = 8 \cdot 8 - 6 \cdot 6 = 64 - 36 = 28 > 0$

При изменении знака:

$E' = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$det(E') = (-8) \cdot 8 - 6 \cdot 6 = -64 - 36 = -100$

Правильный пример, где знак не меняется

Спросите о чём угодно

Рис. 1.1: Решение задачи об изменении знака определителя алгоритмом

Алгоритм проявил полное непонимание теории определителей. В примере матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ он сначала меняет первый диагональных элемент, а потом – второй, не понимая, что определитель останеися прежним. В конце концов алгоритма просто повис. Вероятно, в процессе обучения такой вопрос не прозвучал, поэтому и правильный ответ не появился.