А. М. ПОПОВ

КУМУЛЯТИВНЫЕ ЗАРЯДЫ

«Инфра-Инженерия»

УДК 531:532:539.1
ББК 24.54
П58

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор
С. М. Мужичек (Гос НИИАС);
доктор физико-математических наук, профессор
С. П. Струнков (НИИ системных исследований РАН)

Попов, А. М.

П58 Кумулятивные заряды : монография / А. М. Попов. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 416 с. : ил., табл.

ISBN 978-5-9729-2239-0

Изложены основные закономерности взрывных процессов и действия взрыва кумулятивного заряда в различных средах. Особое внимание уделено аналитическим расчетам параметров взрыва. Даны методы подобия и размерностей в механике к моделированию взрывов и связанные с ним процессы, рассмотрены критерии моделирования схемы горения.

Для научных работников и специалистов в области теории взрыва и горения.

УДК 531:532:539.1
ББК 24.54

ISBN 978-5-9729-2239-0

© Попов А. М., 2025
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2025
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6
Раздел 1. Физическая картина формирования и движения кумулятивной струи 8
Глава 1. Кумулятивная струя 8
1.1. Предварительные наблюдения 8
1.2. Формирование кумулятивной струи 9
1.3. Активная часть кумулятивного заряда 12
1.4. Действие струи и песта на преграды 14
1.5. Факторы, влияющие на кумулятивное действие 18
1.6. Гидродинамическая теория кумуляции 20
1.7. Модель формирования струи на основе комплексного анализа 25
1.8. Критические условия струеобразования 28
1.9. Разрушение струи и температура разогрева ее элементов 35
1.10. Особенности колебательного процесса в кумулятивной струе 37
Раздел 2. Деформация облицовки малого прогиба выемки кумулятивного заряда 42
Глава 2. Феноменологическая модель деформации и движения облицовки кумулятивной выемки заряда 42
2.1. Виды деформации облицовки кумулятивной выемки заряда 42
2.2. Феноменологическая модель деформации и движения облицовки сферической формы 45
2.3. Особенности деформации желобообразной облицовки 48
2.4. Влияние геометрических размеров на деформацию облицовки 49
2.5. Экспериментальные исследования 55
Глава 3. Активная часть кумулятивного заряда 67
3.1. Управление полем взрыва 67
3.2. Активная часть аксиального кумулятивного заряда 74
3.3. Активная часть удлиненного заряда 78
3.4. Картина выворачивания облицовки 83
3.5. Выворачивание облицовки с натеканием 85
Глава 4. Начальные условия метания 89
4.1. Начальная скорость разлета метаемых элементов 89
4.2. Экспериментальные исследования 94
4.3. Угол разлета 100
4.4. Баллистика метаемых элементов 105
4.5. Особенности баллистики желобообразной облицовки с разной формой поперечника 110
Раздел 3. Элементарная теория взрыва кумулятивного заряда 122
Глава 5. Элементарная теория ударных волн 122
5.1. Предварительные рассуждения 122
5.2. Основные зависимости теории ударных волн 124
5.3. Ударная адиабата 126
5.4. Энтропия газа при ударном сжатии 130
5.5. Диссипация энергии ударной волны 132
5.6. Косые ударные волны 137

Глава 6. Теория детонации кумулятивного заряда 142
6.1. Гидродинамическая теория детонации 142
6.2. Основные соотношения гидродинамической теории детонации кумулятивного заряда 146
6.3. Неустойчивые режимы детонации 151
6.4. Основные соотношения между параметрами на фронте детонационной волны 156
6.5. Уравнения состояния и изоэнтропы продуктов детонации 159
6.6. Термическое уравнение состояния продуктов детонации 163
6.7. Скорость детонации взрывчатых веществ 165
6.8. Определение параметров продуктов детонации за фронтом детонационной волны 171
Глава 7. Отражение продуктов детонации от различных сред 177
7.1. Разлет продуктов детонации с поверхности кумулятивного заряда 177
7.2. Условия на границе двух сред 182
7.3. Отражение падающей детонационной волны от различных сред 183
7.3.1. Отражение детонационной волны от металлической облицовки 183
7.3.2. Отражение от детонационной волны от поверхности жидкости 186
7.3.3. Отражение детонационной волны от поверхности газа 188
7.4. Отражение скользящей детонационной волны от облицовки 190
7.5. Отражение ударной волны от границы двух соударяемых инертных сред 191
7.5.1. Комбинация мягкой и твердой сред 191
7.5.2. Комбинация твердой и мягкой сред 194
Глава 8. Ударные волны в кумулятивных зарядах 196
8.1. Основные зависимости газодинамики для облицовок кумулятивных зарядов 196
8.2. Ударные адиабаты твердых и жидких сред 197
8.3. Уравнения состояния жидких и твердых сред 201
8.4. Ударные волны в пористых средах 207
Раздел 4. Моделирование деформации облицовки кумулятивного заряда 215
Глава 9. Лагранжево и эйлерово представления движения среды 215
9.1. Система отсчет наблюдателя и связанная система отсчета 215
9.2. Сущность точек зрения Лагранжа и Эйлера 217
Глава 10. Основные законы термодинамики и газовой динамики 221
10.1. Понятие о полной, локальной и конвективной производных 221
10.2. Уравнение Эйлера 224
10.3. Уравнение неразрывности 226
10.4. Дифференциальные уравнения движения газа 227
10.5. Уравнение Бернулли 230
10.6. Интеграл Лагранжа 233
Глава 11. Постановка задачи механики сплошной среды 237

11.1. Основные положения 237
11.1.1. Модель сплошной среды в заданной системе координат 238
11.1.2. Исходные уравнения 241
11.1.3. Начальные и граничные условия 243
11.2. Постановка задачи механики идеальной жидкости и газа 246
11.3. Постановка задачи механики упругопластической среды 249
11.4. Двумерное моделирование взрывных процессов аналитическими функциями 257
Глава 12. Основы моделирования быстропротекающих процессов 265
12.1. Общие сведения о численных методах математического моделирования 265
12.1.1. Устойчивость. Корректность. Сходимость 265
12.1.2. Понятие о приближении функций 266
12.1.3. Общие сведения о дифференциальных уравнениях 268
12.1.4. Аппроксимация производных 271
12.1.5. Частные производные 273
12.1.6. Элементы разностных схем 275
12.2. Сетки расчета взрыва заряда в воздухе 285
12.3. Общий подход к моделированию процесса деформации кумулятивной облицовки 291
12.4. Моделирование процесса горения 294
Глава 13. Применение теории подобия на практике 301
13.1. Теорема подобия 301
13.2. Определение критериев подобия 305
13.3. Моделирование взрыва заряда 307
13.4. Моделирование воздушной ударной волны 311
13.4.1. Физическая картина взрыва заряда в воздухе 311
13.4.2. Основные параметры воздушной ударной волны 313
13.5. Моделирование взрыва заряда в воде 320
13.5.1. Физическая картина взрыва в воде 320
13.5.2. Основные параметры подводного взрыва 322
13.6. Параметры взрыва заряда в грунте 324
13.7. Моделирование сложных систем 333
Глава 14. Математическое моделирование процесса деформации облицовки кумулятивной выемки 336
14.1. Расчетная схема деформации 336
14.2. Топология функции $W(z)$, описывающей движение элементов облицовки 339
14.3. Трансверсализация расчетных сеток 348
14.4. Функция сопротивления материала облицовки 349
14.5. Результаты расчетов 351
Приложение 1. Краткий справочник по элементарной математике 370
Приложение 2 392
Приложение 3 403
Библиографический список 404

РАЗДЕЛ 1.
ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА ФОРМИРОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ КУМУЛЯТИВНОЙ СТРУИ

ГЛАВА 1.
КУМУЛЯТИВНАЯ СТРУЯ

1.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Термин «кумуляция» происходит от латинского cumulatio, что означает «скопление» или cumulo – накапливаю. Дословно это слово означает увеличение или усиление какого-либо эффекта за счет наложения или накопления нескольких однородных по своей природе эффектов. На практике кумуляцией (кумулятивным эффектом) называется явление концентрации энергии взрыва заряда взрывчатого вещества (ВВ) в заданном направлении. Это направление определяется специально выполненной в заряде кумулятивной выемкой.

Открытие кумулятивного эффекта взрыва принадлежит русскому военному инженеру М. М. Борескову, который в 1864 г. на практике показал сильное разрушительное действие мин с кумулятивной выемкой в саперных работах. В 1865 г. появился первый капсюль-детонатор с конической кумулятивной выемкой, обладающий повышенной инициирующей способностью.

Первые систематические исследования кумулятивного эффекта были проведены в 1923–1926 гг. профессором М. Я. Сухаревским, который установил зависимость пробивного действия кумулятивных зарядов без облицовки от формы выемки и ряда других факторов. Он впервые высказал гипотезу о физической сущности кумулятивного эффекта, которая заключается в концентрации энергии взрыва в определенном направлении.

Серьезные экспериментальные и теоретические исследования кумуляции принадлежат русским ученым – академику М. Лаврентьеву и профессору Г. И. Покровскому.

Кумулятивные заряды занимают особое место в военной технике. В 1914 г. был получен первый патент на разработку кумулятивного снаряда для поражения бронированной техники. Однако широкое практическое применение кумулятивные заряды получили лишь в период второй мировой войны в боеприпасах, предназначенных для поражения объектов различных типов, особенно бронированных целей и инженерных сооружений.

Рассмотрим кумулятивное действие на примере взрыва цилиндрических зарядов с выемкой и без нее, установленных над стальной плитой конечной толщины (рис. 1.1).

Подрыв заряда без выемки оставит на ней небольшую вмятину. Если заряд начать поднимать над плитой, то глубина вмятины очень быстро уменьшается до нуля. Тот же заряд, который имеет коническую пышку, при подрыве формирует кратер с некоторой глубиной L. С увеличением высоты подрыва h заряда над плитой глубина кратера L сначала резко растет, а затем постепенно падает.

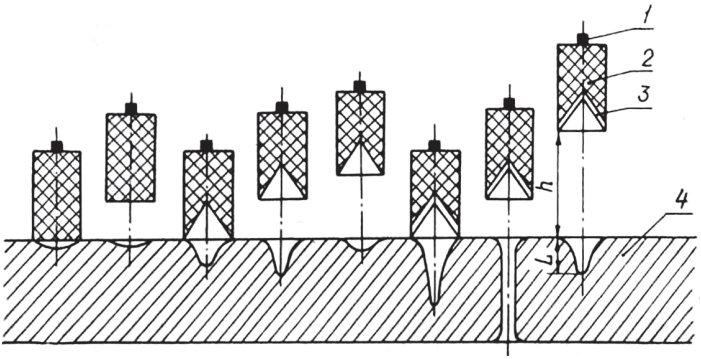


Рис. 1.1. Действие цилиндрических зарядов с выемкой на стальную плиту: 1 – точка инициирования; 2 – заряд ВВ; 3 – облицовка кумулятивной вышки; 4 – стальная плита

Если же стенку выемки заряда облицевать металлическим покрытием, то глубина кратера в плите после подрыва заряда заметно увеличится. По мере удаления такого заряда от стальной плиты глубина кратера будет быстро увеличиваться и на некотором расстоянии в плите образуется сквозное отверстие. Дальнейшее увеличение расстояния между зарядом и броней приведет к уменьшению глубины кратера.

Проделанные выше наблюдения позволяют сделать три важных вывода. Во-первых, наличие в заряде выемки приводит к значительному увеличению пробивного действия заряда, то есть к кумуляции энергии взрыва в сторону выемки. Во-вторых, существует некоторое расстояние от кумулятивного заряда до брони, на котором пробивное действие заряда максимально.

В-третьих, наличие на поверхности, выемки заряда металлической облицовки существенно увеличивает пробивное действие.

1.2. ФОРМИРОВАНИЕ КУМУЛЯТИВНОЙ СТРУИ

Рассмотрим физическую сущность явления кумуляции на примере взрыва цилиндрического заряда с конической выемкой без облицовки (рис. 1.2).

Проводя из точки инициирования *O* взрывные лучи *OA* и *OA'* к точкам поверхности выемки, легко установить, что продукты взрыва со всех точек этой поверхности разлетаются в направлении к оси заряда и соударяются друг с другом. В результате этого происходит их уплотнение и образуется газовый поток, направленный вдоль оси заряда, который носит название **газовой кумулятивной струи** [1, 2, 6]. Наименьшее сечение струи называется **кумулятивным фокусом заряда без облицовки**, а расстояние от основания выемки до фокуса – **фокусным расстоянием** *F*.

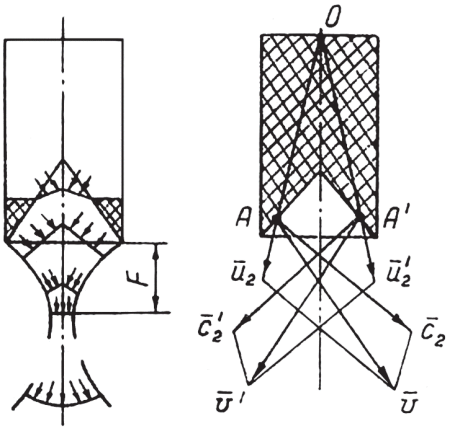


Рис. 1.2. Схема разлета продуктов детонации с конической поверхности выемки заряда

В фокусе имеет место наибольшее уплотнение продуктов взрыва, давление которых достигает миллиона атмосфер, температура – 6–7 тысяч градусов, а скорость движения – до 15 км/с и более. Эти значения параметров продуктов детонации намного превосходят параметры во фронте детонационной волны.

На расстояниях, больших фокусного, газовая струя быстро рассеивается вследствие радиального расширения сжатых до большого давления продуктов взрыва и резко тормозится.

Покрытие поверхности кумулятивной выемки металлической облицовкой определенной толщины существенно усиливает кумулятивный эффект. Под воздействием продуктов взрыва металлическая облицовка выемки обжимается и ускоряется к ее оси. Обжатие облицовки происходит последовательно, начиная с ее вершины, при этом метание металла в различных сечениях происходит почти по нормали к образующей облицовки.

Скорость обжатия облицовки так велика, что силы внутреннего трения и вязкости в металле оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с инерционными массовыми силами. В результате этого металл облицовки, находящийся в твердом состоянии, ведет себя практически как несжимаемая жидкость.

По мере приближения к оси облицовки кумулятивной выемки происходит увеличение толщины поперечного сечения обжатой облицовки. Таким образом, металлическая облицовка, имея вначале форму воронки, как бы схлопывается, стекаясь к оси выемки.

При схлопывании облицовки вдоль ее оси частицы металла внутренней поверхности облицовки выплескиваются в сторону основания выемки с очень большой скоростью, образуя тонкую металлическую струю. Основная же часть материала облицовки образует в хвостовой части струи сравнительно медленно движущийся утолщенный металлический стержень – так называемый **пест**.

Точками на рис. 1.3 условно показано распределение металла облицовки в кумулятивной струе и песте. Так из металла в точках 5 и 6 облицовки (см. рис. 1.3) образуются головная часть струи 5' и хвостовая часть песта 6'. Металл из точек 1, 2, 9 и 10 облицовки переходит соответственно в хвост струи (точки 1', 9') и голову песта (точки 2', 10').

Такое характерное распределение металла облицовки между кумулятивной струей и пестом связано с текучестью металла. Этот факт подтвержден опытным путем, в котором на внутреннюю или наружную поверхности стального конуса гальваническим путем наносился тонкий слой меди.

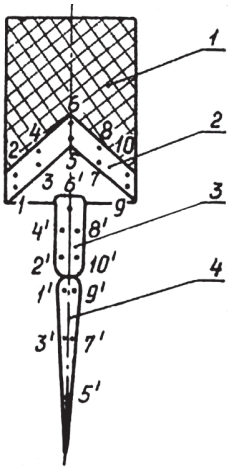


Рис. 1.3. Характер распределения материала облицовки в кумулятивной струе и песте:
1 – заряд ВВ; 2 – облицовка; 3 – пест; 4 – кумулятивная струя

После взрыва такого заряда медь обнаруживалась соответственно либо только в струе, либо только в песте, что являлось подтверждением характера распределения металла облицовки.

Процесс обжатия металлической облицовки, образование песта и кумулятивной струи показан на рис. 1.4.

До определенного момента времени $t_3 > t_2$ пест и струя составляют единое целое. Однако вследствие существенной разницы в скоростях их движения на некотором расстоянии от заряда они разделяются ($t_4 > t_3$).

Так как плотность металла облицовки существенно больше, чем плотность продуктов детонации заряда, а его коэффициент объемного расширения в сравнении с газообразными продуктами взрыва очень мал, то, следовательно, устойчивость и дальность эффективного действия металлической кумулятивной струи значительно выше, чем газовой.

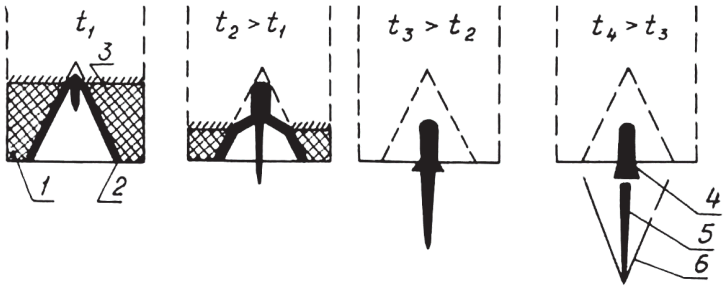


Рис. 1.4. Стадии процесса формирования кумулятивной струи и песта:
1 – заряд ВВ; 2 – металлическая облицовка; 3 – детонационная волна;
4 – пест; 5 – кумулятивная струя; 6 – баллистическая волна

1.3. АКТИВНАЯ ЧАСТЬ КУМУЛЯТИВНОГО ЗАРЯДА

В образовании кумулятивной струи принимает участие не вся масса заряда, а только та ее часть, продукты взрыва которой разлетаются в сторону кумулятивной выемки. Эта масса называется **активной частью** кумулятивного заряда, и ее можно определить, например, при гипотезе о мгновенной детонации.

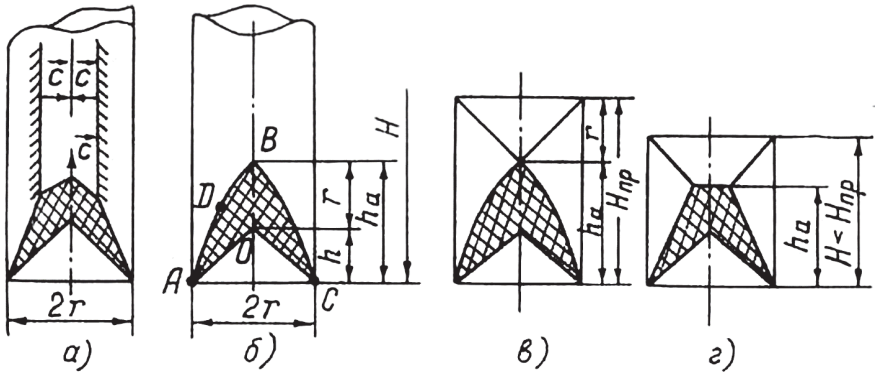


Рис. 1.5. Схема образования активной части кумулятивного заряда

Для примера рассмотрим цилиндрический заряд бесконечной высоты с выемкой конической формы (рис. 1.5). В таком заряде волны разрежения, которые определяют разлет продуктов детонации заряда взрывчатого вещества (ВВ), движутся в глубину заряда со всех его поверхностей одновременно и с одинаковой скоростью $\vec{c}$.

На рис. 1.5, *а* показано текущее положение фронтов волн разрежения в некоторый момент времени. Ясно, что геометрическим местом точек их пересечения является линия *AB* и *BC* (рис. 1.5, *б*). Каждая точка *D*, принадлежа-

щая этой кривой, находится на равном удалении от соответствующих поверхностей заряда.

Таким образом, активная часть заряда ограничена объемом с сечением *ABCO*, примыкающим непосредственно к выемке. Поскольку волны разрежения, движущиеся от вершины выемки *O* и боковой поверхности заряда, к моменту их встречи проходят одинаковые расстояния, равные радиусу заряда *r*, то высота активной части будет равна

$$h_a = h + r,$$

где h – высота выемки.

Из рис. 1.5, *в* видно, что h_a у зарядов большой высоты является постоянной величиной и не будет изменяться при уменьшении высоты заряда до некоторого предельного значения

$$H_{\text{пр}} = h + 2r.$$

Дальнейшее уменьшение высоты заряда ($H < H_{\text{пр}}$) приводит к уменьшению массы активной части заряда (рис. 1.5, *г*). Однако при уменьшении высоты заряда масса активной части сокращается медленнее, чем масса всего заряда. Это обстоятельство позволяет в кумулятивных зарядах без заметного уменьшения кумулятивного эффекта иногда использовать заряды высотой $H < H_{\text{пр}}$.

Из рис. 1.5 следует также, что погонная масса активной части заряда ВВ в сечениях у вершины металлической облицовки больше, чем у ее основания. Поэтому головные элементы кумулятивной струи, образующиеся из вершины облицовки, имеют большую скорость, чем хвостовые, которые формируются из металла, примыкающего к основанию облицовки.

Благодаря градиенту скоростей, направленному вдоль струи, кумулятивная металлическая струя в процессе движения растягивается. В результате начальная длина кумулятивной струи, примерно равная длине образующей кумулятивной облицовки, может увеличиться в несколько раз без разрушения целостности струи.

Такое большое растяжение струи объясняется тем, что на начальной стадии движения струи инерционные силы уравновешиваются силами сцепления между частицами металла. С этой точки зрения высокая пластичность металла является положительным фактором. При достижении некоторой предельной степени растяжения, зависящей от материала облицовки и скорости струи, последняя разрушается на отдельные элементы.

Ориентировочные данные: для кумулятивных зарядов скорость головной части струи достигает 10–11 км/с, а хвостовой части – 2–3 км/с. Масса кумулятивной струи в среднем составляет 6–20 % от массы облицовки, а диаметр в самой толстой ее хвостовой части не превышает 10–15 % от диаметра основания облицовки. Пест движется со скоростью 500…1000 м/с, а его диаметр по длине практически не меняется и составляет около 25…30 % диаметра основания облицовки.

Путем улавливания кумулятивной струи в некоторых не плотных средах и последующего металлографического анализа установлено, что в процессе пласти-

ческих деформаций облицовки, связанных с формированием струи, температура ее может достигать 900–1000 °С, однако плавления металла облицовки при этом не происходит.

Специальные металлографические исследования струи и песта в различных сечениях позволяют обнаружить вытягивание и ориентацию структурных составляющих металла в осевом направлении. Более жесткая ориентация и вытянутость микроструктур увеличиваются по мере приближения к оси песта. Этот факт является косвенным подтверждением того, что в процессе схлопывания облицовки и образования струи и песта металл течет, причем его внутренние слои имеют большую скорость по сравнению с наружными.

Особый практический интерес представляет собой формирование кумулятивной струи с плоской симметрией. Такая струя, называемая кумулятивным ножом, образуется при взрыве удлиненных кумулятивных зарядов произвольной длины, желобообразная облицовка которых имеет относительно большой прогиб и маленькую толщину. Физика процесса формирования кумулятивных ножей в поперечном сечении удлиненного заряда мало отличается от изложенного выше процесса формирования осесимметричной струи. Однако процесс обжатия продуктами взрыва материала желобообразной облицовки с плоской симметрией происходит менее интенсивно, чем такое же обжатие осесимметричной облицовки.

При своем движении кумулятивный нож, так же как и осесимметричная струя, на некотором расстоянии от заряда разрушается на отдельные фрагменты.

1.4. ДЕЙСТВИЕ СТРУИ И ПЕСТА НА ПРЕГРАДЫ

Обладая высокой скоростью движения и малым диаметром в поперечном сечении, кумулятивная струя способна пробивать толстые бронированные преграды.

При соударении струи с броней в месте их контакта образуются высокие давления, при которых можно пренебречь прочностным сопротивлением металла и рассматривать броню и струю как несжимаемые жидкости. В результате в броне образуется слегка конический кратер, по поверхности которой растекается материал кумулятивной струи.

Процесс пробития брони кумулятивной струей, так же как и процесс образования струи, хорошо описывается гидродинамической теорией, которая состоит в вымывании определенного объема брони при одновременном срабатывании кумулятивной струи (рис. 1.6).

Линия *ABC* на рис. 1.6 является следом поверхности раздела металла струи и брони. Рассматривается стационарный процесс внедрения струи в преграду. Найдем скорость перемещения линии раздела струи и преграды (скорость образования кратера u, скорость движения струи ϑ_c), считая материалы струи и преграды несжимаемым.

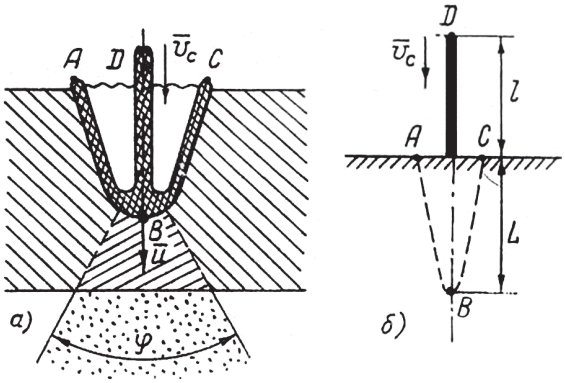


Рис. 1.6. Схема действия кумулятивной струи по прегради: а – конечной; б – полубесконечной толщины

Обозначим плотности материалов струи и преграды (брони) через $\rho_с$ и $\rho_б$ соответственно. Согласно уравнению Бернулли [2] давление на линии раздела в точке *B* со стороны струи запишется в виде

$$P_с = \frac{\rho_с (\vartheta_с - u)^2}{2}, \tag{1.1}$$

где $(\vartheta_с - u)$ – скорость движения струи относительно линии раздела.

Давление в той же точке со стороны металла брони равно

$$P_б = \frac{\rho_б u^2}{2}. \tag{1.2}$$

Из условия стационарности движения струи $P_б = P_с$, тогда согласно соотношениям (1.1) и (1.2) находим

$$\rho_с (\vartheta_с - u)^2 = \rho_б u^2.$$

Разрешая это выражение относительно *u*, будем иметь

$$u = \frac{\vartheta_с}{1 + \sqrt{\rho_б / \rho_с}}. \tag{1.3}$$

Если предположить, что $\rho_с = \rho_б$, то из (1.3) получим

$$u = \frac{\vartheta_с}{2}.$$

Таким образом, в случае движения струи в прегради с одинаковыми плотностями скорость образования кратера в прегради в два раза меньше скорости кумулятивной струи.

Определим максимальную глубину *L* кратера, образованного струей в полубесконечной прегради. С одной стороны, максимальное время проникания

струи в преграду будет равно времени движения линии раздела до дна выемки, то есть

$$t_{\text{пр}} = \frac{L}{u}. \tag{1.4}$$

С другой стороны, это время должно равняться времени срабатывания струи, которое в свою очередь равно длине струи l, поделенной на скорость $(\vartheta_{\text{с}} - u)$ расхода материала струи, равной скорости сближения точек D и B (рис. 1.6, *а*):

$$t_{\text{пр}} = \frac{l}{(\vartheta_{\text{с}} - u)}. \tag{1.5}$$

Приравнивая правые части выражений (1.4) и (1.5) и разрешая относительно L, находим

$$L = \frac{l}{\frac{\vartheta_{\text{с}}}{u} - 1}.$$

После подстановки отношения скоростей из выражения (1.3) получим формулу

$$L = l\sqrt{\frac{\rho_{\text{с}}}{\rho_{\text{б}}}}, \tag{1.6}$$

которая носит название **формулы Лаврентьева**.

Из нее следует, что глубина проникания струи в преграду с заданной плотностью $\rho_{\text{б}}$ зависит только от длины кумулятивной струи l и ее плотности $\rho_{\text{с}}$: не зависит от скорости движения струи $\vartheta_{\text{с}}$.

Однако более детальные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что бронебойное действие струи зависит в некоторой степени от скорости струи, от сжимаемости металла, струи и брони, а так же от механической прочности брони [1.1].

Если скорость кумулятивной струи меньше так называемой **критической скорости**, то процесс проникания ее в броню прекращается. Критическая скорость, при которой нарушается гидродинамическая модель (будет рассмотрена ниже), зависит от прочностных свойств преграды и материала струи.

Так, например, при пробитии прочной стальной брони критическая скорость равна 2400 и 2200 м/с соответственно для стальной и медной кумулятивных струй.

Поскольку вдоль кумулятивной струи существует градиент скорости, то бронебойным действием обладает не вся кумулятивная струя, а лишь часть ее, имеющая скорость выше критической и образующая так называемую **эффективную длину струи**.

В связи с этим бронебойное действие металлической кумулятивной струи сильно зависит от расстояния между основанием кумулятивной выемки и преградой

в момент подрыва заряда. Как было показано выше, существует некоторое оптимальное расстояние, на котором бронепробиваемость наибольшая. Это расстояние называется **фокусным для кумулятивного заряда с металлической выемкой**.

При меньшем расстоянии до преграды, чем фокус, струя не успевает достаточно растянуться; на расстоянии, большем фокусного, головные элементы струи до соударения с преградой распадаются на отдельные части. Рассеивание отдельных частиц относительно оси струи приводит к уменьшению бронепробиваемости (рис. 1.7).

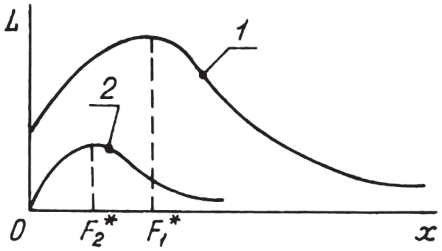


Рис. 1.7. Зависимости глубины проникания *L* кумулятивной струи в преграду: 1 – металлической; 2 – газовой струи

Уместно напомнить, что фокусное расстояние имеется и у газовой (рис. 1.2) кумулятивной струи (кривая 2 на рис. 1.7). Однако фокусное расстояние для газовой кумулятивной струи имеет другой смысл, чем у заряда с металлической облицовкой.

Таким образом, при использовании формулы (1.6) в нее следует подставлять не всю длину струи, а только длину ее эффективной части $l_{эф}$. Для кумулятивных зарядов с конической выемкой и с облицовкой из стали эффективная длина кумулятивной струи составляет примерно $3l_0$, где l_0 – длина образующей кумулятивной выемки.

При достижении струей тыльной стороны преграды за ней образуется поток так называемых вторичных осколков. Они образуются из частиц преграды и кусочков разрушенной кумулятивной струи. За преградой вторичные осколки летят в виде конуса с углом φ при вершине порядка 40–60 градусов (рис. 1.6, *а*).

Элементы струи, проникающие сквозь пробоину, имеют сравнительно большую скорость и обладают сильным зажигательным и инициирующим действием. Кроме того, за сквозной пробоиной элементы струи образуют воздушную ударную волну, которая также обладает некоторым запреградным действием.

Следует заметить, что при сквозном пробивании брони кумулятивная струя отрывается от песта, который не проникает в забронеевое пространство и, как правило, застревает в пробоине, так как его диаметр значительно больше диаметра струи и пробоины.

1.5. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА КУМУЛЯТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Бронепробивное действие кумулятивных зарядов зависит от целого ряда конструктивно-технологических факторов, а также от условий воздействия струи на броню.

Свойства ВВ, применяемых в кумулятивных зарядах, такие, как удельная энергия взрыва, скорость детонации и т. п., оказывают существенное влияние на эффективность кумулятивного действия. Применение более мощных ВВ, характеризуемых большими скоростями детонации, обеспечивают повышение кумулятивного эффекта, благодаря формированию более скоростных кумулятивных струй.

Из параметров кумулятивной выемки наибольшее влияние на кумулятивное действие оказывают относительная высота выемки $\frac{h}{d}$ и угол 2α при ее вершине (рис. 1.5). Увеличение относительной высоты конической кумулятивной выемки (уменьшение угла 2α) приводит к увеличению скорости струи и ее длины.

Однако увеличение $\frac{h}{d}$ сверх некоторого оптимального значения приводит к потере устойчивости струи, которая имеет очень большой градиент скорости и быстро рвется на части. На практике в кумулятивных зарядах конической формы оптимальное отношение $\frac{h}{d}$ лежит в диапазоне 1...1,5, при этом угол при вершине конуса выемки равен 40...50 градусов.

Форма выемки и материал облицовки оказывают заметное влияние на величину фокусного расстояния кумулятивного заряда. Фокусное расстояние для медной облицовки выше, чем для стальной, из-за большого допустимого растяжения струи. Низкие конические воронки из-за меньшего градиента скорости по длине струи имеют большее фокусное расстояние, чем высокие.

Существует оптимальное значение толщины облицовки δ, при котором достигается максимальное бронепробивное действие. Если толщина облицовки слишком мала, ее масса оказывается недостаточной для формирования нормальной кумулятивной струи.

При излишне толстой облицовке отношение ее массы к массе активной части кумулятивного заряда становится выше некоторого предельного значения, при котором прекращается формирование струи. Оптимальное отношение толщины облицовки к диаметру выемки конической формы лежит в пределах 3–4 %.

Для увеличения градиента скорости по длине струи применяются воронки переменной толщины, более толстые у основания и менее толстые у вершины конуса, при средней толщине, равной оптимальной.

Форма фронта детонационной волны в районе кумулятивной выемки, влияя на характер обжатия воронки, существенно сказывается на эффективности кумулятивного заряда. С целью уменьшения массы кумулятивного заряда его высоту делают небольшой, не намного больше высоты воронки.

В этом случае для улучшения условий обжатия облицовки между кумулятивной воронкой и детонатором устанавливают линзы из инертных материалов (текстолит, картон, дерево и т. п.), назначение которых сформировать фронт детонационной волны заданного профиля.

Внешняя оболочка кумулятивного заряда в некоторых случаях может оказать заметное влияние на бронепробиваемость. Массивные оболочки (с толщиной более 2–3 мм) приводят к некоторому увеличению активной массы заряда и, следовательно, несколько увеличивают скорость обжатия особенно у основания выемки.

Благодаря увеличению эффективной длины струи, бронепробиваемость кумулятивных зарядов при этом может увеличиться на 10–12 %.

Кумулятивное действие в сильной степени зависит от качества технологии изготовления заряда: однородности заряда (равномерность плотности и состава, отсутствие внутренних дефектов), точности установки детонатора, точности геометрических размеров заряда, однородности материала облицовки и др.

Следующим фактором, резко снижающим кумулятивный эффект, является вращение кумулятивного заряда. Например, при стрельбе вращающимися со скоростью до 20 000 об/мин артиллерийскими снарядами с кумулятивным зарядом их бронебойное действие по сравнению с невращающимися снарядами снижается до 60 %.

Рассмотрим угловую скорость ω цилиндрического элемента струи среднего радиуса r, образовавшегося им элемента облицовки, находящегося на расстоянии R от оси вращения (рис. 1.8). Зная угловую скорость заряда ω_0, согласно уравнению закона сохранения момента количества движения запишем

$$\omega_0 R^2 = \omega r^2$$

откуда следует, что

$$\omega = \omega_0 \frac{R^2}{r^2}.$$

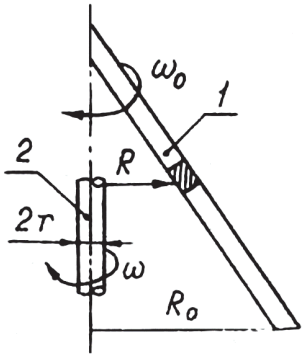


Рис. 1.8. Схема вращения облицовки 1 и кумулятивной струи 2

Таким образом, угловая скорость отдельных сечений струи увеличивается по мере удаления их от головной части. При $R = R_0$ угловая скорость хвостовой части струи будет максимальной. Неравномерность распределения угловых скоростей по длине струи приводит к ее скручиванию.

Под воздействием центробежных сил увеличивается также диаметр струи и соответственно уменьшается ее средняя плотность. При этом происходит разрушение струи на отдельные элементы. Вредное влияние вращения на кумулятивный эффект усиливается при наличии асимметрии заряда. Возникающие при этом центробежные силы искривляют струю и приводят к ее быстрому разрушению.

На пробивное действие кумулятивного заряда значительно влияют также условия встречи с преградой – угол встречи, скорость встречи, расстояние до преграды в момент срабатывания заряда.

1.6. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КУМУЛЯЦИИ

Для объяснения явления формирования кумулятивной струи из металла облицовки и установления его основных закономерностей была разработана гидродинамическая теория кумуляции. Основы этой теории были заложены в 1945 г. М. А. Лаврентьевым и независимо от него американскими учеными Г. Тейлором, Г. Биркгофом. В дальнейшем гидродинамическая теория была развита их учениками и последователями [2, 1.2].

В основе гидродинамической теории кумуляции лежат два важных допущения:

• при взрыве заряда облицовка кумулятивной выемки мгновенно приобретает импульс, который в каждой точке направлен перпендикулярно к ее поверхности;

• материал облицовки рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость.

На основе принятых допущений, пользуясь общими законами механики, получим основные уравнения гидродинамической теории кумуляции. Для этого обратимся к схеме стационарного течения идеальной несжимаемой я жидкости в поле силы тяжести (рис. 1.9).

Из закона сохранения массы следует, что через любое сечение площадью S рассматриваемой трубки жидкости за равные промежутки времени τ протекает одинаковое количество несжимаемой жидкости.

Тогда, обозначив ее плотность через ρ, а скорости течения жидкости через сечения с площадями S_1 и S_2 соответственно через υ_1 и υ_2, запишем

$$\rho\upsilon_1 S_1\tau = \rho\upsilon_2 S_2\tau,$$

что дает

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2.$$

Иначе говоря, произведение скорости течения жидкости на площадь поперечного сечения для рассматриваемой трубки тока сохраняется неизменной. Это

утверждение называется законом неразрывности и обычно для несжимаемой жидкости записывается в виде

$$\upsilon S = \text{const}. \tag{1.7}$$

Из формулы (1.7) следует, что через сечение с меньшей площадью трубки тока жидкость течет быстрее и наоборот.

По закону сохранения энергии работа A, затрачиваемая на изменение скорости υ и высоты h течения жидкости массой m, равна сумме изменения потенциальной и кинетической энергий, то есть

$$A = mg\,(h_2 - h_1) + m\,(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)/2, \tag{1.8}$$

где g – ускорение силы тяжести.

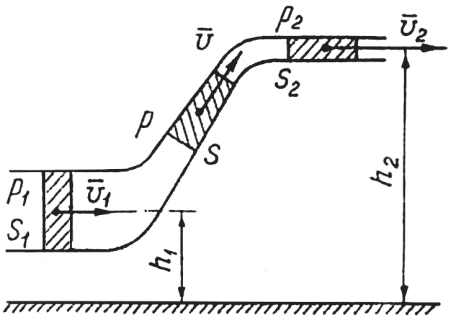


Рис. 1.9. Течение идеальной несжимаемой жидкости

Работа внешних сил давления, равная произведению силы на перемещение $\upsilon\tau$, определяется как разность работ, совершаемых внешними силами. Тогда, записывая выражение для работы в виде

$$A = F\upsilon\tau = pS\upsilon\tau$$

и используя уравнение неразрывности (1.7), с учетом формулы (1.8), можно записать

$$p_1 - p_2 = \rho g\,(h_2 - h_1) + \rho\,(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)/2, \tag{1.9}$$

в котором $\rho = m/S\upsilon\tau$.

Пренебрегая разностью $(h_2 - h_1)$ ввиду ее малости и перенося в одну сторону слагаемые с одинаковыми индексами, из (1.9) получим уравнение Бернулли в виде

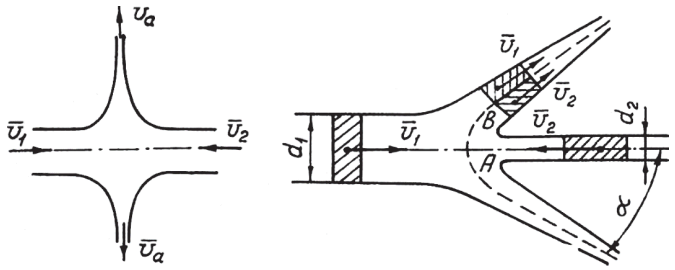
$$p + \rho\upsilon^2/2 = \text{const}, \tag{1.10}$$

которое описывает стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости.

Рассмотрим картину соударений двух струй жидкости (рис. 1.10). В результате столкновения этих струй образуется расходящийся поток жидкости, который называется пеленой.

Обозначим скорость, плотность и диаметр первой струи соответственно υ_1, ρ_1 и d_1, а второй – соответственно υ_2, ρ_2 и d_2. На практике могут иметь место два случая. Если диаметры струй и скорости движения жидкости в них одинаковы, то в процессе их соударения пелена образуется в плоскости, перпендикулярной осям струй (рис. 1.10, *а*).

Если же при одной и той же скорости жидкости диаметр одной из струй будет больше, например, $d_1 > d_2$, или, при одинаковых диаметрах скорость жидкости в одной из струй будет больше, например $\upsilon_1 > \upsilon_2$, то образующая пелена будет приобретать вид конической воронки, характеризующейся некоторым углом α (рис. 1.10, *б*).



а) б)

Рис. 1.10. Соударение двух струй:
а – $d_1 = d_2$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_a$; б – $d_1 > d_2$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_a$

Считая жидкости идеальными и несжимаемыми, а движение их стационарным, определим соотношение между скоростями υ_1 и υ_2.

Из условия стационарности движения (1.10) следует, что граница раздела жидкостей (на рис. 1.10 линия *AB*) неподвижна и давление на нее со стороны первой струи равно давлению со стороны второй. Тогда из формулы (1.10) можно записать

$$\rho_1\upsilon_1^2/2 = \rho_2\upsilon^2/2,$$

откуда искомое соотношение между скоростями струй имеет вид

$$\upsilon_1 = \upsilon_2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \qquad (1.11)$$

Из формулы (1.11) видно, что если плотности струй одинаковы, то равны и их скорости движения. Для несжимаемой жидкости сталкивающиеся струи и жидкость в пелене движутся с одинаковой скоростью.

Таким образом,

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_a. \qquad (1.12)$$

В рассмотренной выше схеме соударения струй предполагается, что несжимаемая жидкость движется без внутреннего трения, следовательно, никаких

потерь энергии в струях и пелене не происходит, а стало быть, и процесс образования пелены протекает без изменения энтропии.

Отсюда следует, что этот процесс натекания струй полностью обратим, то есть движение жидкости можно направить в обратную сторону. В этом случае из жидкости, вливаемой в пелену, образуются две струи с диаметрами d_1 и d_2.

Этот подход и был положен в основу гидродинамической теории кумуляции взрыва заряда с конической выемкой, покрытой металлической облицовкой. В динамике процесса взрыва облицовка в исходном состоянии рассматривается в качестве пелены, а струя и пест – две струи разного диаметра, образующиеся из пелены.

Пусть под действием продуктов взрыва каждый элемент A облицовки получает начальную скорость метания $\overline{\vartheta_0}$, направление которой перпендикулярно образующей облицовки (рис. 1.11).

Разложим этот вектор на две составляющие так, чтобы одна из них $\overline{\vartheta_м}$ была направлена вдоль оси Ox, а другая $\overline{\vartheta_а}$ – вдоль образующей облицовки. Ясно, что $\overline{\vartheta_м}$ характеризует скорость метания облицовки в направлении, параллельном продольной оси заряда, а $\overline{\vartheta_а}$ – скорость пластического течения металла, имеющего плотность ρ, вдоль образующей облицовки.

Из рис. 1.11 можно записать соотношение для скоростей $\upsilon_а$ и $\upsilon_м$

$$\upsilon_а = \upsilon_0 \mathrm{ctg}\alpha;$$

$$\upsilon_м = \upsilon_0 \frac{1}{\sin\alpha}, \qquad (1.13)$$

где α – угол между образующей конической облицовки и ее осью.

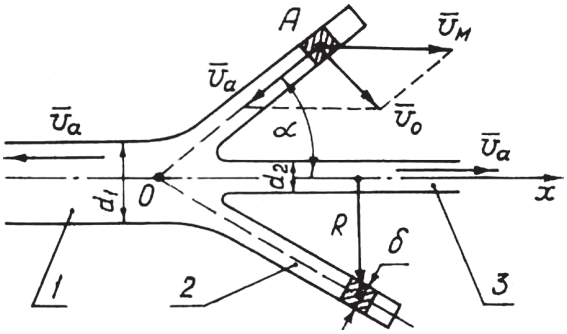


Рис. 1.11. Схема образования кумулятивной струи и песта:
1 – пест; 2 – облицовка; 3 – кумулятивная струя

Очевидно, что скорость кумулятивной струи $\upsilon_с$ и песта $\upsilon_п$ относительно неподвижной системы координат равны

$$\upsilon_с = \upsilon_м + \upsilon_а;$$

$$\upsilon_п = \upsilon_м - \upsilon_а.$$

Подставив в эти соотношения значения $\upsilon_м$ и υ_a из (1.13), после элементарных преобразований получим

$$\upsilon_c = \upsilon_0 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

$$\upsilon_п = \upsilon_0 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (1.14)$$

Таким образом, чем меньше величина угла полураствора α кумулятивной выемки, тем выше скорость кумулятивной струи и ниже – песта.

За время t из облицовки массой m_0 в пест и струю перейдут массы

$$m_п = \frac{\pi d_п^{\,2}}{4}\,\upsilon_a t\rho \text{ и } m_c = \frac{\pi d_c^{\,2}}{4}\,\upsilon_a t\rho$$

соответственно.

По закону сохранения массы можно записать

$$m_0 = m_c + m_п. \qquad (1.15)$$

Воспользуемся законом сохранения количества движения. Поскольку на материал облицовки не действуют никакие внешние силы, то в проекции на ось Ox изменение количества движения замкнутой системы должно равняться нулю

$$m_c\upsilon_a - m_п\upsilon_a - m_0\upsilon_a\cos(\pi + \alpha) = 0. \qquad (1.16)$$

Используя соотношение (1.15), определим

$$m_c = \frac{m_0(1-\cos\ \alpha)}{2} = m_0 \sin^2 \alpha / 2;$$
$$m_п = \frac{m_0(1+\cos\ \alpha)}{2} = m_0 \cos^2 \alpha / 2. \qquad (1.17)$$

Разделив соотношения (1.17) одно на другое и разрешив относительно mc, получим

$$m_c = m_п \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, чем меньше угол полураствора конуса α выемки, тем меньшая часть массы металла облицовки переходит в струю.

Выражая массы m_c и $m_п$ через площади поперечного сечения струй, их длины $\upsilon_a\tau$ и плотность жидкости и учитывая формулу (1.15) для общей массы m_0, из (1.16) находим

$$d_п^2 - d_c^2 = (d_п^2 + d_c^2)\cos\alpha. \qquad (1.18)$$

Для определения диаметров $d_п$ и d_c по заданной величине угла α необходимо составить еще одно уравнение. Для этой цели рассмотрим произвольный элемент B облицовки толщиной δ на некотором расстоянии R от оси кумулятивной струи (рис. 1.11).

Если материал облицовки несжимаем, то объем металла, проходящего за время t через сечения песта и струи, должен быть равен объему металла, который перешел в них из конической облицовки. Тогда можно записать

$$\frac{\pi}{4}(d_{\text{п}}^2 + d_{\text{с}}^2)\,\upsilon_{\text{a}} t = 2\pi R\delta\upsilon_{\text{a}} t.$$

Решая это уравнение совместно с (1.18), находим значения диаметров кумулятивной струи и песта

$$\begin{aligned} d_{\text{с}} &= 2\sqrt{R\delta}\sqrt{1-\cos\alpha} = 2\sqrt{R\delta}\sin(\alpha/2); \\ d_{\text{п}} &= 2\sqrt{R\delta}\sqrt{1+\cos\alpha} = 2\sqrt{R\delta}\cos(\alpha/2) \end{aligned} \qquad (1.19)$$

или значения радиусов струи $r_{\text{с}}$ и песта $r_{\text{п}}$:

$$\begin{aligned} r_{\text{с}} &= \sqrt{R\delta}\sin(\alpha/2); \\ r_{\text{п}} &= \sqrt{R\delta}\cos(\alpha/2). \end{aligned}$$

Принимая во внимание характер формирования кумулятивной струи из материала облицовки постоянной толщины и соотношения (1.19), можно сделать вывод о переменном сечении струи по ее длине, а именно: толщина кумулятивной струи уменьшается от ее хвостовой части до головной.

Полученные формулы позволяют дать лишь качественную оценку основных параметров струи и песта, и в количественном отношении являются весьма приближенными. При их выводе не учитывались неравномерность распределения импульса взрывной нагрузки (скорости обжатия) вдоль образующей облицовки и ряд других важных факторов.

Согласно полученным выше формулам, чем меньше угол полураствора выемки α , тем тоньше струя (1.19) и тем выше ее скорость (1.14). Продолжая уменьшать угол, можно теоретически получать сколько угодно большие скорости струи.

Этот вывод на практике не подтверждается: при малых углах α наблюдается резкое снижение пробивного действия струи (вплоть до полной его потери), а скорость ее движения перестает увеличиваться. Таким образом, для данного материала облицовки существует критическое значение минимального угла полураствора конуса облицовки, ниже которого кумулятивная струя не образуется.

Кроме того, в случае превышения угла α некоторого предельного значения, что имеет место в облицовках малого прогиба, формирование кумулятивной струи также не происходит, и она движется вместе с пестом, образуя компактный элемент. Иначе говоря, облицовка, сильно деформируясь, стремится принять форму «ядра».

1.7. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУИ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Другая схема формирования кумулятивной струи при тех же допущениях была предложена академиком М. А. Лаврентьевым [1.2].

На основе теории конформных отображений рассматривается картина стационарного процесса растекания пелены идеальной жидкости с асимптотическим углом полураствора α. Жидкость в пелене имеет плотность ρ и растекается на две струи с разными диаметрами (рис. 1.12).

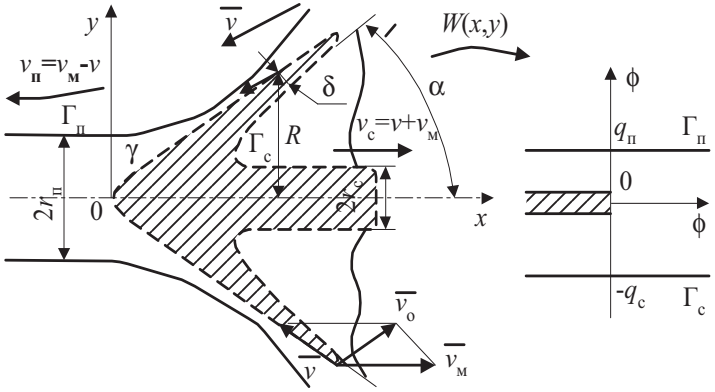


Рис. 1.12. Схема стационарного процесса растекания пелены жидкости с асимптотическим углом полураствора α

Необходимо определить диаметры струй и распределение скоростей в потоках.

Поскольку течение идеальной несжимаемой жидкости в рассматриваемой схеме является установившимся, то согласно теории комплексного анализа количество движения расходящихся струй опишем двумя комплексными потенциалами:

$$f_{\text{п}}(z) = \varphi_{\text{п}} + i\psi_{\text{п}}; \quad f_{\text{c}}(z) = \varphi_{\text{c}} + i\psi_{\text{c}},$$

где $z = x + iy$ – плоскость, на которой рассматривается движение струй.

В силу симметрии этих потоков относительно оси $0x$ достаточно рассмотреть их части, лежащие на верхней полуплоскости. Эти части функции $f_{\text{п}}$ и f_{c} конформно отображают на горизонтальные полосы с ширинами, равными соответствующим расходам жидкости в струях

$$q_{\text{п}} = v_{\text{п}} r_{\text{п}} \text{ и } q_{\text{c}} = v_{\text{c}} r_{\text{c}}.$$

Функции $f_{\text{п}}$ и f_{c} определены с точностью до постоянных слагаемых, которые можно выбрать так, чтобы искомыми полосами в плоскости потенциала $W = \varphi + i\psi$ служили полосы

$$\{0 < \psi < q_{\text{п}}\} \text{ и } \{-q_{\text{c}} < \psi < 0\}$$

с выброшенным разрезом и точка разветвления потоков $Z = X + IY = 0$ при обоих отображениях переходила в точку $W = \varphi + i\psi = 0$ (рис. 1.12).

Для решения поставленной задачи необходимо найти кривые $\Gamma_{\text{п}}$ и $\Gamma_{\text{с}}$, описывающие внешние контуры струй, разделяющую кривую γ, а также отображения $f_{\text{п}}(z)$ и $f_{\text{с}}(z)$ так, чтобы вдоль кривых $\Gamma_{\text{п}}$ и $\Gamma_{\text{с}}$, переходящих в прямые $\psi = q_{\text{п}}$ и $\psi = -q_{\text{с}}$ плоскости $W = \varphi + i\psi$, выполнялись соответственно условия

$$\left|df_{\text{п}}(z)/dz\right| = v_{\text{п}}; \left|df_{\text{с}}(z)/dz\right| = v_{\text{с}},$$

имеющие смысл производной комплексного потенциала.

Очевидно, что вдоль кривой γ, которая при отображении переходит в положительную ось 0φ, необходимо положить соотношение

$$\left|f_{\text{п}}'(z)\right| = \left|f_{\text{с}}'(z)\right|.$$

Заметим еще, что при отображениях $f_{\text{п}}(z)$ и $f_{\text{с}}(z)$ отрицательная и положительная полуоси 0x переходят соответственно в верхнюю и нижнюю границы разреза вдоль отрицательной оси 0φ, так что

$$\arg f_{\text{п}}'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0;$$
$$\arg f_{\text{с}}'(x) = -\pi \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Данную задачу можно существенно упростить, если вместо $f_{\text{п}}(z)$ и $f_{\text{с}}(z)$ ввести в рассмотрение их обратные функции $g_{\text{п}}(W)$ и $g_{\text{с}}(W)$ через следующие соотношения:

$$\begin{aligned} G_{\text{п}}(W) &= \ln g_{\text{п}}'(W); \\ G_{\text{с}}(W) &= \ln g_{\text{с}}'(W). \end{aligned} \tag{1.20}$$

В этом случае функции $G_{\text{с}}(W)$ и $G_{\text{п}}(W)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

• вдоль прямых $\psi = q_{\text{п}}$ и $\psi = -q_{\text{с}}$ соответственно

$$\operatorname{Re} G_{\text{п}}(W) = \ln v_{\text{п}}; \operatorname{Re} G_{\text{с}}(W) = \ln v_{\text{с}};$$

• вдоль положительной полуоси 0φ:

$$\operatorname{Re} G_{\text{с}}(W) = \operatorname{Re} G_{\text{п}}(W); \operatorname{Im} G_{\text{с}}(W) = \operatorname{Im} G_{\text{п}}(W); \tag{1.21}$$

• нижней и верхней границах отрицательной полуоси 0φ соответственно

$$\operatorname{Im} G_{\text{с}}(W) = \pi; \operatorname{Im} G_{\text{п}}(W) = 0.$$

Из соотношений (1.21) видно, что функция $G_{\text{с}}(W)$ является аналитическим продолжением функции $G_{\text{п}}(W)$ через положительную полуось 0φ, и следовательно, функция

$$G_{\text{п}}(W) = \begin{cases} G_{\text{п}}(W) & \text{при} \quad 0 < \psi < q_{\text{п}}, \\ G_{\text{с}}(W) & \text{при} \quad q_{\text{с}} < \psi < 0 \end{cases} \tag{1.22}$$