

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Тверской филиал

Е.Е. Фомина, И.Л. Кислова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ MS EXCEL

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Тверь 2019

УДК 378
ББК 74.5
Ф76

Авторы:

Фомина Е.Е., кандидат технических наук, доцент кафедры гуманитарных и естественно-научных дисциплин Тверского филиала РАНХиГС

Кислова И.Л., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры гуманитарных и естественно-научных дисциплин Тверского филиала РАНХиГС

Рецензент:

Михно Г.А., кандидат технических наук, доцент кафедры математического моделирования и вычислительной математики Тверского государственного университета

Ф76 **Фомина, Е.Е., Кислова, И.Л.** Решение задач линейного программирования в табличном процессоре MS Excel. Учебное пособие для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.04 Государственное и муниципальное управление / Е.Е. Фомина, И.Л. Кислова. Второе издание, перераб. и доп. – Тверь: Тверской филиал РАНХиГС, 2019. – 68 с.

ISBN 978-5-94789- -

Учебное пособие предназначено для студентов направлений подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.04 Государственное и муниципальное управление, обучающихся как на очном, так и на заочном отделениях, изучающих дисциплины «Информационные технологии в управлении», «Информационные технологии в менеджменте» и «Информационные технологии в управлении фирмой».

Рекомендовано к изданию кафедрой гуманитарных и естественно-научных дисциплин Тверского филиала РАНХиГС
Протокол от 25 сентября 2019 года № 1

ББК 74.5

© Е.Е. Фомина, И.Л. Кислова, 2019
© Тверской филиал РАНХиГС, 2019
© Макет ООО «Издательство «Триада», 2019

ISBN 978-5-94789- -

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 5

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ MS EXCEL 8

2.1. Максимизация прибыли предприятия 8

2.2. Максимизация годового дохода 20

Задачи для самостоятельного решения 30

2.3. Специальные задачи линейного программирования 32

2.3.1. Задача целочисленного программирования 32

2.3.2. Транспортная задача 33

2.3.3. Задача о назначениях 43

Задачи для самостоятельного решения 45

3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 46

3.1. Анализ полученных оптимальных решений 46

3.2. Теоремы двойственности 47

3.3. Задача оптимального использования ресурсов 48

Задачи для самостоятельного решения 58

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ 60

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ 61

6. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 67

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 68

1. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В общем виде постановка задачи математического программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции:

$$f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$$

при условиях:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots m,$$

где f и g_i – заданные функции, а b_i – некоторые действительные числа.

Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования.

Если все функции f и g_i – линейные, то соответствующая задача является ***задачей линейного программирования*** **(*ЗЛП*)**.

Если хотя бы одна из указанных функций – нелинейная, то соответствующая задача является ***задачей нелинейного программирования***.

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

К задачам линейного программирования сводится широкий круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены задачи выпуклого программирования. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы задачи квадратичного программирования. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений либо некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования (ЗЛП) ставится следующим образом:

Необходимо найти вектор $X(x_1, x_2, \ldots x_n)$, максимизирующий линейную форму:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

и удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где b_j, c_j, $j = 1, \ldots, n$ – действительные числа.

Линейная функция $f(X)$ называется ***целевой функцией задачи***.

Условия (2) называются ***функциональными***, а (3) – ***прямыми ограничениями задачи***.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, будем называть ***планом***, или ***допустимым решением ЗЛП***.

Все допустимые решения образуют область определения задачи линейного программирования, или ***область допустимых решений***.

Допустимое решение, максимизирующее целевую функцию $f(X)$, называется ***оптимальным планом задачи***.

Будем считать, что ЗЛП записана в канонической форме, если ее целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные неотрицательные.

Для решения ЗЛП существует универсальный метод – метод последовательного улучшения плана, или симплекс-метод, который состоит из двух вычислительных процедур: симплекс-метода с естественным базисом и симплекс-метода с искусственным базисом (М-метод).

Выбор конкретной вычислительной процедуры осуществляется после приведения исходной задачи к каноническому виду задачи линейного программирования (КЗЛП):

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1, m}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n};\ b_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}$$

В теории линейного программирования показано, что оптимальное решение ЗЛП связано с угловыми (крайними) точками многогранника решений, которым отвечают опорные планы (неотрицательные базисные решения системы уравнений КЗЛП). Каждый из опорных планов определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний C_m.

Решение ЗЛП симплекс-методом «вручную» подробно рассмотрено в [1], [5] и др.

ЗЛП широко применяются в экономике и управлении. На практике хорошо зарекомендовали себя следующие модели, относящиеся к оптимизационным:

- определения оптимальной производственной программы;
- определение оптимального смешивания компонентов;
- определение оптимального раскроя;
- определение оптимального размещения предприятий некоторой отрасли на определенной территории;
- формирования оптимального портфеля ценных бумаг;
- транспортные задачи.

Менеджер, как лицо, ответственное за принятие решений, должен уметь использовать известные модели.

Огромный вклад в развитие и применение ЗЛП внес наш соотечественник Леонид Витальевич Канторович, за что в 1975 г. был удостоен Нобелевской премии по экономике.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ MS EXCEL

2.1. МАКСИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Постановка задачи

Для выпуска 4 видов продукции требуется сырье, рабочее время и оборудование.

Для выпуска одной единицы продукции 1-го вида необходимо 3 ед. сырья, 22 ед. рабочего времени и 10 ед. оборудования.

Для выпуска одной единицы продукции 2-го вида необходимо 5 ед. сырья, 14 ед. рабочего времени и 14 ед. оборудования.

Для выпуска одной единицы продукции 3-го вида необходимо 2 ед. сырья, 18 ед. рабочего времени и 8 ед. оборудования.

Для выпуска одной единицы продукции 4-го вида необходимо 4 ед. сырья, 30 ед. рабочего времени и 16 ед. оборудования.

Прибыль от продажи одной единицы продукции 1-го вида – 30 руб., 2-го вида – 25 руб., 3-го вида – 8 руб., 4-го вида – 16 руб.

Ресурсы ограничены: имеется 60 ед. сырья, 400 ед. рабочего времени и 120 ед. оборудования.

А. Какое количество продукции каждого вида необходимо выпустить, чтобы максимизировать прибыль предприятия?

Б. Все ли продукты вошли в оптимальный план или существуют убыточные? На сколько нужно увеличить прибыль от продажи одной единицы убыточной продукции, чтобы она вошла в оптимальный план?

В. Каковы интервалы устойчивости для прибыли за одну единицу продукции каждого вида? Изменится ли оптимальное решение, если прибыли от продажи одной единицы продукции 4-го вида увеличить на 15 ед., 33 ед.? Уменьшить на 10 ед.?

Г. Какие ресурсы являются дефицитными? Как изменится оптимальное решение, если ресурс оборудования увеличить на 1 ед., уменьшить на 100 ед., 50 ед.?

Для удобства сведем данные задачи в следующую таблицу (табл. 1).