СУПЕР учителя спешат на помощь

Александр Малахов • Павел Бибиков
Константин Козеренко



ГЕОМЕТРИЯ

в сюжетах





Аванта

УДК 514
ББК 22.15
М18

Серия «Суперучителя спешат на помощь»
«Супер мұғалімдер көмекке асығады» сериясы
Серия «Простая наука школьникам»
«Оқушыларға қарапайым ғылым» сериясы
Научно-популярное издание
Танымал ғылыми басылым
Для среднего и старшего школьного возраста
орта және жоғарғы мектеп жасына арналған

Александр Игоревич Малахов, Павел Витальевич Бибиков,
Константин Владимирович Козеренко

ГЕОМЕТРИЯ В СЮЖЕТАХ
СЮЖЕТТЕРДЕГІ ГЕОМЕТРИЯ

Художник Светлана Крашенинникова
Дизайн обложки и шрифтовая композиция С. Крашенинниковой
Ведущий редактор Т. Деркач. Художественный редактор Е. Гордеева
Технический редактор Е. Кудиярова. Корректор Р. Низяева. Компьютерная верстка Е. Харченко

Общероссийский классификатор продукции ОК-034-2014 (КПЕС 2008), 58.11.1 — книги, брошюры печатные
Книжная продукция — ТР ТС 007/2011
Подписано в печать 11.12.2024. Дата изготовления: февраль 2025 года. Формат 60x90/16
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Newton. Усл. печ. л. 15,0
Тираж 1500 экз. Заказ №
Тираж 1500 экз. Заказ №

Поставщик, импортер и уполномоченное лицо по принятию претензий:
ООО «Издательство АСТ». 129085, Российская Федерация,
г. Москва, Звездный бульвар, дом 21, строение 1, комната 705, пом. *I*, 7 этаж
Наш электронный адрес: ask@ast.ru Home page: www.ast.ru

Адрес места осуществления деятельности по изготовлению издательской продукции:
123112, Российская Федерация, Москва, Пресненская наб., д. 6, стр. 2,
Деловой комплекс «Империя», 14, 15 этаж

Наш электронный адрес: ask@ast.ru. Home page: www.ast.ru
Мы в социальных сетях. Присоединяйтесь!
www.ast.ru/redactions/avanta
vk.com/ast.deti
vk.com/avantabooks
t.me/astdeti
zen.yandex.ru/astdeti

Өнім өндіру қызметін жүзеге асыру мекенжайы:
123112, Ресей Федерациясы, Мәскеу, Пресненская жағ., 6-үй, 2-құр., «Империя» іскерлік кешені, 14, 15-қабат
«АСТ баспасы» ЖШҚ
Өндіруші: «Издательство АСТ» ЖШҚ 129085, Ресей Федерациясы, Мәскеу, Звездный бульвары,
21-үй, 1-құрылыс, 705-бөлме, *I* үй-жай, 7-қабат
Біздің электрондық мекенжайымыз: www.ast.ru E-mail: ask@ast.ru
Интернет-магазин: www.book24.kz Интернет-дүкен: www.book24.kz
Импортер в Республику Казахстан и Представитель по приему претензий
в Республике Казахстан — ТОО РДЦ Алматы, г. Алматы.
Қазақстан Республикасына импорттаушы және Қазақстан Республикасында
наразылықтарды қабылдау бойынша өкіл — «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ.,
Домбровский көш., 3«а», Б литері, офис 1. Тел.: 8 (727) 251 59 90, 91, факс: 8 (727) 251 59 92 ішкі 107;
E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz, www.book24.kz Тауар белгісі: «АСТ» Өндірілген жылы: ақпан 2025
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген. Сертификаттауға жатады

Малахов А. И., Бибиков П.В., Козеренко К.В.

Геометрия в сюжетах / А.И. Малахов, П.В. Бибиков, К.В. Козеренко. — Москва: Издательство АСТ, 2025. 234 [6], вкл. — (Суперучителя спешат на помощь) (Простая наука школьникам).

М18 ISBN 978-5-17-173163-2. (Простая наука школьникам)
ISBN 978-5-17-162309-8. (Суперучителя спешат на помощь)

Книга учителей математики «Второй школы» города Москвы позволит прокачать знания по геометрии. Ведь они постоянно объясняют этот материал своим ученикам, а значит — знают все тонкие места, заковыристые или сложные для понимания современного школьника. Кому, как ни им, раскладывать все по полочкам в твоей голове. Такого нельзя пропустить! Представьте, как вам повезло: любой школьник может прочитать книгу трех суперучителей и получить знания по геометрии из первых рук! Пользуемся моментом — учим геометрию на «пять»!

Для среднего и старшего школьного возраста.

6+

© А.И. Малахов, П.В. Бибиков, К.В. Козеренко, текст, 2025
© ООО «Издательство АСТ», 2025

УДК 514
ББК 22.15


В геометрии нет царского пути.
Евклид

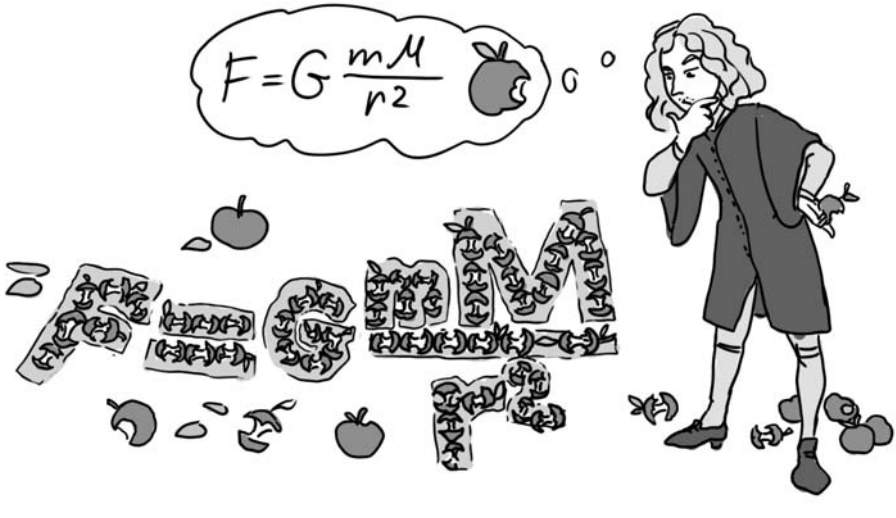
Предисловие

Простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней — домом. Факт сам по себе есть ничто: он имеет значение, лишь поскольку с ним связана идея или поскольку он служит доказательством чего-либо.

Анри Пуанкаре

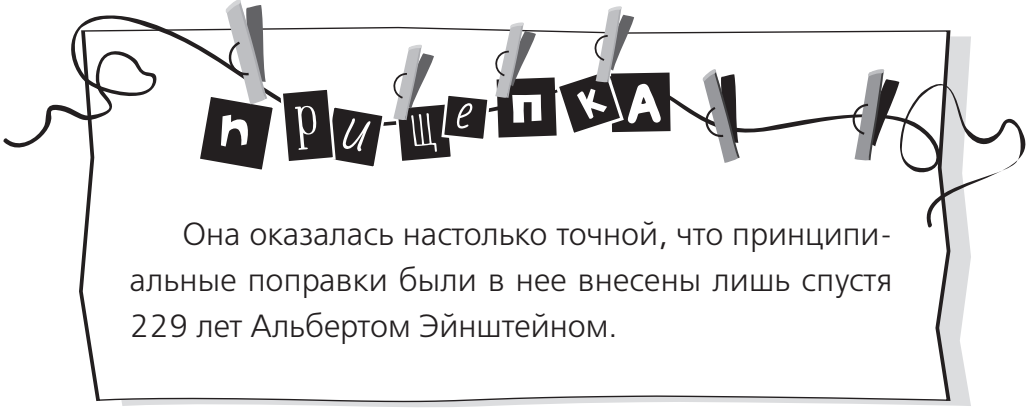
Любое научное исследование начинается с наблюдения.

Всем известен закон всемирного тяготения, открытый в середине XVII века (Буйо, Гук, Ньютон).



В своем фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» (1687) Исаак Ньютон установил эквивалентность этого закона трем эмпирическим законам, сформулированным Иоганном Кеплером в 1609 году и описывающим движение планет в Солнечной системе. Чтобы получить и аккуратно изложить этот результат, Ньютон сформулировал основные принципы, связанные с понятиями массы, силы, ускорения, — так, например, появились три закона Ньютона. Тем самым Ньютон построил полноценную математическую модель гравитационного взаимодействия.

Но отправной точкой послужили именно законы Кеплера. Как он смог эти законы сформулировать? Основой послужили наблюдения его учителя Тихо Браге (1546—1601), которые он скрупулезно проводил в течение нескольких десятилетий (практически невооруженным глазом!).



прищепка

Нужно заметить, что нам несколько повезло с нашей планетной системой: в ее центре одиночная звезда, поэтому закономерность движения планет можно уловить невооруженным взглядом, что и сделал Кеплер. Что может быть в иных случаях можно прочитать, например, в замечательном рассказе А. Азимова «Приход ночи».

Пять лет (с 1831 по 1836 год) провел в кругосветном путешествии на корабле «Бигль» только что окончивший университет Чарлз Дарвин. Большую часть времени тогда еще молодой натуралист провел на берегу, наблюдая и исследуя геологию и животный мир. Эти (и не только) наблюдения легли в основу труда «Происхождение видов», который, будучи впервые изданным 24 ноября 1859, года перевернул наше представление о развитии живого на Земле и заложил основу эволюционного учения — краеугольного камня всей современной биологической науки.

Серия наблюдений: принцип относительности (1632, Галилео Галилей), измерение скорости света (1676, Олаф Ремер), несостоятельность теории эфира (1881, 1887, Альберт Майкельсон, Эдвард Морли) — привела Анри Пуанкаре, а затем и Альберта Эйн-

штейна к созданию специальной (1905), а впоследствии и общей теории относительности (1916), которые принципиальным образом изменили наше представление о пространстве и времени и уже на протяжении ста лет остаются основополагающими теориями, описывающими глобальное устройство видимой Вселенной. Этот список может быть продолжен сколь угодно далеко.

Ошибочным было бы полагать, что математика как наука устроена принципиально иным образом. Наблюдения и эксперимент первичны и в математических исследованиях. Но что наблюдает математик? Пользуясь названием известной книги, мы бы ответили, что математик наблюдает числа и фигуры (а еще алгебраические многообразия, дифференциальные уравнения, стохастические интегралы и многое другое, с чем вы, дорогой читатель, познакомитесь, если продолжите свое математическое образование). К сожалению, при обучении математике эти соображения зачастую остаются в тени. У школьников складывается впечатление, что образовательный процесс состоит из заучивания большого набора случайных, никак друг с другом не связанных и ничем не мотивированных фактов, которые сваливаются на них с неба. О каком формировании интуиции и вкуса тут можно говорить? Какое представление складывается у учащихся о математике в таком случае?

Особенно остро эти проблемы стоят в геометрии. Обычно в преподавании основное внимание уделяется отработке базовых навыков и умений: заметить равные треугольники, вычислить угол с помощью суммы углов треугольника, доказать параллельность прямых и т. д. Подавляющее большинство таких задач являются «одноходовками» и не способствуют развитию геометрической культуры у школьников. Еще одной чертой задач, часто предлагаемых в курсе геометрии (особенно в 7–8 классах), является их «вычурность». Кроме того, нередко учитель просто формулирует задачу, не уделяя внимания вопросам типа «откуда эта задача взялась», «как она связана с другими задачами» и уж тем более «как догадаться до формулировки этой самой задачи». Таким образом мы не строим дом — мы собираем кучу камней.

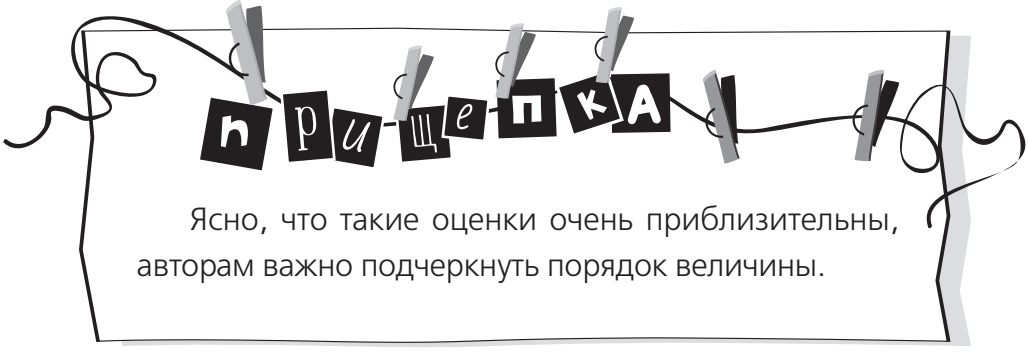
В преподавании геометрии в 7–8 классах особенно ярко выделяется отсутствие глубоких и содержательных результатов, последовательно осваивая которые школьники могли бы существенно повысить как свой уровень владения материалом, так и свои навыки выстраивать сложные многоходовые рассуждения, используя весь арсенал имеющихся у них средств; развить свою математическую культуру. Кроме того, на примере этого освоения школьники могут познакомиться с отличительными чертами математики как науки.

В 9 классе и далее в старшей школе ученики, как правило, уже достаточно подготовлены технически к

решению сложных и содержательных задач. Однако отметим следующее: курс обучения планиметрии продолжается 3 года (с 7 класса), увеличим этот период до 4 лет (в старшей школе достаточно много времени уходит на стереометрию). В учебном году 34 учебных недели. Сколько задач (именно задач, а не упражнений) решает ученик в среднем за одну учебную неделю? Предположим, что около 5. Итого получаем, что за весь курс ученик решает 680 задач.

Общее же количество задач, потенциально предлагаемых для решения, на порядок выше. Поэтому возникает необходимость качественного отбора задач, причем не только на одно занятие/тему, но в целом для всего курса. Разумеется, мы не претендуем на полный список, но предлагаем некоторые примеры такого отбора.

На наш взгляд, приводимые далее сюжеты помогут восполнить обозначенные пробелы.



Ясно, что такие оценки очень приблизительны, авторам важно подчеркнуть порядок величины.

Ключевые принципы нашего подхода к отбору и композиции материала:

1) принцип сюжетности — задачи формируются не вокруг темы, но вокруг общего сюжета (общей конструкции или общей задачи);

2) принцип естественности — движение читателя по сюжету происходит с помощью естественных (насколько это возможно) переходов;

3) принцип дополнения — дорога, по которой мы идем, лежит не в стороне от основного курса теории (принятого, например, в учебнике А. Погорелова), а, наоборот, расширяет, дополняет, углубляет и связывает между собой материал всего курса.

В заключение мы хотим выразить благодарность ученикам 7 «А», 7 «Г» и 8 «В» классов лицея «Вторая школа» 2016/2017 учебного года. В совместном общении с ними мы работали над изложением идей и наблюдений книги.





СЮЖЕТ 1.
ОКРУЖНОСТЬ ЭЙЛЕРА

Окружность Эйлера — одна из жемчужин элементарной геометрии. Она вскрывает закономерность в положении самых важных и фундаментальных замечательных точек в треугольнике и дает начало целой серии исследований, связанных с более сложными объектами и понятиями. Кроме того, доказательства соответствующих утверждений не требуют никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса, и во многих физико-математических классах и кружках окружность Эйлера изучается столь же основательно, как вписанные углы, теоремы Чевы и Менелая и т. д.

Как правило, окружность Эйлера изучается в 9 классе, редко раньше (отметим, правда, что в учебнике А. Погорелова окружность Эйлера приводится в конце §6 8 класса). Считается, что для понимания доказательств соответствующих теорем школьники уже должны хорошо владеть самыми разнообразными фактами и понятиями из курса геометрии: вписанными углами, гомотетией, подобием и т. д. При этом теоремы об окружности Эйлера преподносятся как финальный результат. То есть эти утверждения оторваны от самого процесса освоения нового материала, они лишь следствие, причем находящееся где-то в стороне от школьного курса, нужное лишь в силу своей красоты и, может быть, применения в олимпиадных задачах.

Мы знакомим читателя с другими подходами к изложению этих теорем. Во–первых, они предполагают знакомство с окружностью Эйлера уже в 7 классе. Во-вторых, для нас важен не только сам результат, но и путь к нему, поскольку на этом пути естественно возникают классические конструкции геометрии 7 класса: свойства прямоугольного и равнобедренного треугольников, средние линии и высоты в треугольнике, теорема об описанной окружности и другие. Но, самое главное, у нас теорема об окружности Эйлера будет дальше «работать». Опираясь на нее, мы получим ряд замечательных доказательств классических результатов. Поэтому представленные ниже сюжеты могут служить дополнительной мотивацией для изучения этих конструкций.

Необходимо отметить, что естественность не всегда подразумевает краткость, т. е. неверно было бы говорить, что полученное нами доказательства являются оптимальным с точки зрения «длины» пути. Представьте, что вам нужно добраться из пункта A в пункт B и существует несколько путей. Мы выбираем путь, так сказать, по реке — он наверняка более извилист и протяжен, чем путь по суше, но в отличие от последнего естественно сформирован ландшафтом.

Ниже мы приведем два подхода к исследованию объектов, связанных с окружностью Эйлера. Для знакомства с **первым подходом** надо знать:

- признаки равенства треугольников;
- признаки и свойства равнобедренного треугольника;
- определение и свойства параллельных прямых;
- сумму углов треугольника;
- признаки и свойства прямоугольного треугольника.

Для освоения **второго подхода** потребуется теорема об описанной окружности и теорема о точке пересечения высот в треугольнике. Мы надеемся, что даже читателю, знакомому с фактами этого сюжета, будет интересно и полезно познакомиться с такими подходами. Изложение разбито на большое количество, как нам кажется, простых шагов. При этом каждый следующий шаг мотивирован: объяснено, откуда что берется.

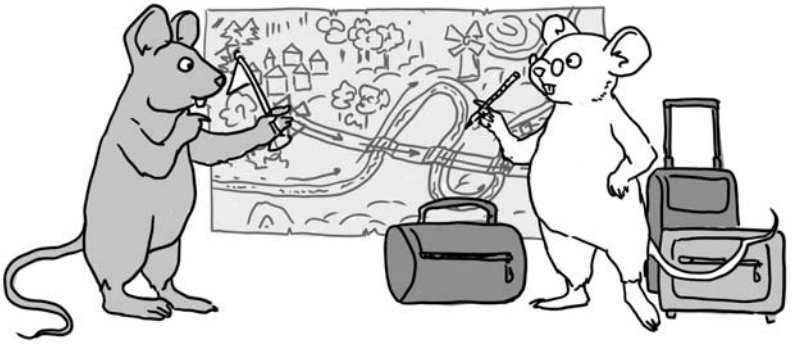
прищепка

При написании этого и всех других сюжетов авторы руководствовались моделью реальных научных исследований.

На двух следующих страницах приведено содержание данной главы в виде картинок. Аналогичным образом устроено содержание и каждого последующего сюжета.

Зафиксируем также стандартные обозначения.

- M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника;
- H_A, H_B, H_C — основания высот;
- H — точка пересечения высот;
- E_A, E_B, E_C — середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой H.





СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

СЮЖЕТ 1. ОКРУЖНОСТЬ ЭЙЛЕРА 12



1.1. Четыре точки на одной окружности 17
1.2. Пять точек на одной окружности 26
1.3. Девять точек на одной окружности 30
1.4. Острый и тупой углы 35

СЮЖЕТ 2. БИССЕКТРИСЫ, ВЫСОТЫ И ТОЧКИ W 37



2.1. Биссектрисы и высоты 41
2.2. Точки WA и WA 43
2.3. Высоты и биссектрисы 50
2.4. Основания биссектрис 56
2.5 W-треугольники 61

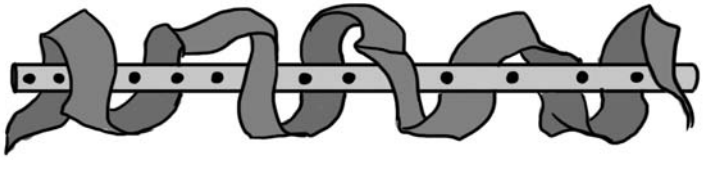
2.6. Добавление: формула Карно 63
2.6.1 Пять радиусов 66
2.6.2. Теорема Фейербаха 68

СЮЖЕТ 3. ТРЕУГОЛЬНИКИ ЭЙЛЕРА 70
3.1. H -треугольник и свойства ортоцентра 74



3.2. Степени свободы треугольников Эйлера 84
3.2.1. Середины и основание высоты.
Невырожденный случай 87
3.2.2. Основания высот и середины.
Невырожденный случай 89
3.2.3. M, H и E. Невырожденный случай 91
3.2.4. Прямоугольники Эйлера.
Вырожденный случай. 93
3.2.5. Окружности, связанные с высотами 97
3.2.6. Дельтоид и совпадающие индексы 99

СЮЖЕТ 4. ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА 103
4.1. Центр окружности Эйлера 107



4.2. Параллелограммы Эйлера. 109

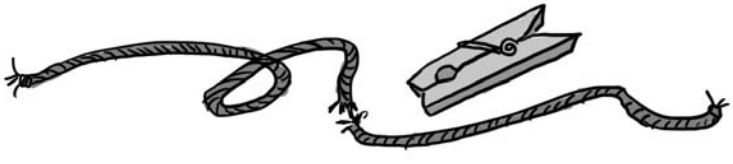
4.3. Точка пересечения медиан треугольника 111
4.4. Биссектрисы и прямая Эйлера. 118

СЮЖЕТ 5. ОКРУЖНОСТЬ АПОЛЛОНИЯ 121



5.1. Биссектрисы и пропорциональные отрезки . . . 125
5.2. Координаты в геометрии 129
5.3. Пучок окружностей Аполлония. 134
5.4. Окружности Аполлония в треугольнике 137
5.5. Снова точки W 139
5.6. Касательные и секущие. 144
5.7. Снова ортотреугольник. 149
5.8. Задача Фаньяно и теорема синусов. 154

СЮЖЕТ 6. ВОКРУГ ГОМОТЕТИИ 161



6.1. Основные свойства гомотетии. 166
6.2. Гомотетия в трапеции 174
6.2.1. Подобные трапеции
и среднее геометрическое 175
6.2.2. Среднее гармоническое. 177
6.3. Гомотетия и прямая Эйлера. 180

6.4. Гомотетия и окружность Эйлера 185
Об одной композиции гомотетий 190
6.5. Гомотетия и пара окружностей 192
6.5.1. Общие касательные 193
6.5.2. Параллельные диаметры и лемма Евклида . . . 195
6.5.3. Связь с биссектрисами
и окружностью Аполлония 202
6.6. Композиция гомотетий 203
6.6.1. Формулировка и доказательство 203
6.6.2. Теорема о трех колпаках 207
6.7. Гомотетия и касающиеся окружности
и прямые 211
6.7.1. Параллельные секущие и касательные 211
6.7.2. Лемма Архимеда 213
6.7.3. Одна задача с IMO 216
6.8. Теорема Дезарга 218
6.8.1. Формулировка и доказательство 219
6.8.2. Птолемеева ось треугольника 221
Решение задач главы 6 230





Считай, что тебе повезло.
Будь ты «технарь» или «гуманитарий» — приличная оценка по геометрии тебе обеспечена. Раз три учителя, да что там, **СУПЕРУЧИТЕЛЯ**, взялись за дело, то разобраться даже в таком сложном предмете получится точно!

Не лейте слезы, ученики, засучивайте рукава, настраивайте головы, открывайте книгу — давайте вместе справимся с **ГЕОМЕТРИЙ**!

ПОПРОБУЙТЕ — И ВСЁ ПОЛУЧИТСЯ!

Эта книга поможет вам разобраться с окружностями, мы будем ходить вокруг да около с биссектрисами и высотами, узнаем, кто такой Эйлер и что он придумал, а также чем его окружности отличаются от окружности Аполлония. Нам потребуются треугольники, прямые, прямоугольники, параллелограммы и многое другое.

УЧИМ ГЕОМЕТРИЮ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ СУПЕРУЧИТЕЛЕЙ!



Присоединяйтесь к нам!
www.ast.ru/redactions/avanta
vk.com/ast.deti
vk.com/avantabooks
t.me/astdeti
zen.yandex.ru/astdeti

Аванта

ISBN 978-5-17-162309-8
9 785171 623098