

А. Т. Кондрин

НАВИГАЦИОННАЯ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ОКЕАНЕ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования



Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами доступен на образовательной платформе «Юрайт», а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

УДК 911.2(075.32)
ББК 26.82я723
К64

Автор:

Кондрин Алексей Трофимович — кандидат географических наук, старший научный сотрудник кафедры океанологии географического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Рецензент:

Добролюбов С. А. — академик РАН, доктор географических наук, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Кондрин, А. Т.

К64 Навигационная гидрометеорология: волновые процессы в океане : учебное пособие для среднего профессионального образования / А. Т. Кондрин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 203 с. — (Профессиональное образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-21340-9

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Океанология», который преподается студентам кафедры океанологии географического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Содержит изложение основ современных знаний о различных типах волн, возникающих в стратифицированном вращающемся океане на сферической Земле. Изложение теории сопровождается примерами расчетов волновых характеристик, позволяющими лучше понять теоретические сведения и представить пространственно-временные масштабы волн в океане. Приведены сведения о фактических характеристиках различных типов волн и их географическом распределении в Мировом океане. Изложение сочетает необходимую строгость с доступностью для студентов географических факультетов.

Соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Рекомендуется для студентов гидрометеорологических специальностей.

УДК 911.2(075.32)
ББК 26.82я723

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-534-21340-9

© Кондрин А. Т., 2025
© ООО «Издательство Юрайт», 2025

Оглавление

Введение.....	5
Тема 1. Морские волны. Классификация и масштабы движения.....	7
1.1. Классификация морских волн.....	7
1.2. Масштабы движения: значение вращения и стратификации	9
Тема 2. Элементы волн	14
Тема 3. Линейная потенциальная теория гравитационных волн на поверхности океана.....	18
3.1. Постановка задачи	18
3.2. Свободные волны бесконечно малой амплитуды	20
3.3. Короткие и длинные волны	23
3.4. Энергия волн	27
Тема 4. Нелинейные эффекты	30
4.1. Нелинейные волны Стокса.....	30
4.2. Кноидальные волны	32
Тема 5. Ветровые волны	36
5.1. Зарождение и развитие ветровых волн. Капиллярные волны	37
5.2. Статистическое описание ветровых волн	42
5.3. Спектральный анализ ветрового волнения	46
5.4. Период повторяемости.....	52
5.5. Волнообразующие факторы и методы расчета элементов ветровых волн.....	54
5.6. Характеристики ветровых волн в океанах и морях и их связь с синоптическими условиями	60
5.7. Аномальные волны (волны-убийцы)	62
5.8. Трансформация ветровых волн при подходе к берегу	68
Тема 6. Приливы	73
6.1. Основные понятия.....	73
6.2. Приливообразующие силы	77
6.3. Потенциал приливообразующей силы	80
6.4. Статическая теория приливов	84
6.5. Динамическая теория приливов.....	88
6.6. Приливы в Мировом океане	95

6.7. Влияние трения на приливы	98
6.8. Гармонический анализ приливов	102
Тема 7. Длинные гравитационные волны.....	109
7.1. Краевые волны Стокса.....	110
7.2. Волны Кельвина.....	112
7.3. Волны Пуанкаре и Свердрупa	117
7.4. Сейши	121
7.5. Длинные волны, возникающие в результате атмосферных воздействий	124
7.6. Цунами.....	140
Тема 8. Внутренние волны	150
8.1. Общие замечания и основные уравнения	150
8.2. Гироскопические волны.....	152
8.3. Внутренние гравитационные волны	154
8.4. Внутренние волны во вращающемся стратифицированном океане.....	157
8.5. Влияние дна и поверхности. Нормальные моды в океане постоянной глубины	160
8.6. Внутренние волны в океане	164
Тема 9. Волны Россби	166
9.1. Планетарные волны Россби	166
9.2. Линейная теория. Средние широты	169
9.3. Планетарные волны в стратифицированном океане.....	174
9.4. Наблюдения.....	178
9.5. Топографические волны	181
Тема 10. Экваториальная динамика.....	188
10.1. Экваториальная β -плоскость	188
10.2. Линейная волновая теория и наблюдения	190
10.3. Эль-Ниньо.....	193
Литература	197

Введение

Волновые движения представляют собой существенную часть динамики океана и атмосферы, поэтому результаты их исследований находят важные приложения в изучении гидрометеорологических процессов различных пространственно-временных масштабов и решении прикладных задач. Волна в водной среде представляет собой непрерывную совокупность упорядоченных колебательных движений частиц относительно среднего положения, охватывающих некоторую область пространства, которая в общем случае зависит от времени. Всем хорошо известны волны на поверхности моря, возникающие в результате действия ветра. Однако ветровые поверхностные волны представляют собой лишь один частный случай из большого разнообразия типов волновых движений, возникающих в океане. Это разнообразие объясняется тем, что реакция океанической среды на возмущающие воздействия включает в себя возникновение нескольких различных по своей природе возвращающих сил, обеспечивающих колебательный процесс. С другой стороны, естественно выделять различные типы волн в зависимости от причин возникновения и пространственно-временных масштабов.

Среди причин, вызывающих волновые движения в океане, можно выделить внешние силы, действующие на его границе, и внутренние силы, действующие непосредственно в его толще. На поверхности океана действуют главным образом метеорологические причины, такие как изменения атмосферного давления, напряжение ветра и силы плавучести. На дне океана и берегах периодически возникают локализованные сейсмические возмущения. Во внутренних областях океана действуют объемные силы, обусловленные притяжением и вращением Земли, приливообразующие силы и силы трения.

Классификация морских волн, в основу которой положена природа возвращающей силы, включает поверхностные и внутренние гравитационные волны, приливы, а также планетарные и топографические волны Россби.

Данный курс содержит изложение основ современных знаний о волновых процессах в океане, возникающих под действием гравитации и вращения Земли. В основу изложения положена классификация волн, основанная, с одной стороны, на природе возвращающей силы, а с другой — на характере возбуждающих факторов. С точки зрения геофизической гидродинамики в качестве возвращающей силы в океане доминируют гравитация, вращение Земли и изменение потенци-

ального вихря. Большое внимание уделено гравитационным волнам, которые существуют благодаря действию силы тяжести и представляют собой наиболее широкий класс волновых движений, включающий ветровые и анемобарические волны, штормовые нагоны, приливы, сейши и цунами. Изложена линейная потенциальная теория гравитационных волн на поверхности океана, при этом вводятся важные фундаментальные понятия, которые используются при теоретическом описании динамики волновых движений разных типов.

Описание главных типов волн в океане опирается на простые математические модели, которые позволяют понять их физическую сущность и получить представление об их свойствах. В частности, рассмотрены математические модели длинных гравитационных волн, испытывающих влияние вращения Земли, таких как волны Кельвина и инерционно-гравитационные волны.

Эффекты вращения и стратификации рассмотрены в темах, посвященных внутренним волнам и волнам Россби. Также рассмотрены особенности волновой динамики в тропической зоне, где применяется приближение экваториальной β -плоскости.

Хотя представленные в данном курсе теоретические результаты получены в основном в рамках линейного приближения, существенное внимание уделено нелинейным волнам, таким как волны Стокса, кноидальные волны и солитоны. Изложение теории сопровождается примерами расчетов волновых характеристик, позволяющими лучше понять теоретические сведения и представить пространственно-временные масштабы волн в океане. Кроме того, существенное внимание уделено описанию географических закономерностей в распределении характеристик различных типов волн в Мировом океане.

При подготовке данного курса использовались материалы учебного пособия «Волновые процессы в океане» 2004 г. издания [15]. Однако в настоящем курсе все темы существенно переработаны, исправлены и дополнены, причем ряд параграфов фактически написаны заново. Добавлена новая тема «Нелинейные эффекты», в которой рассмотрены волны Стокса и кноидальные волны. В теме «Ветровые волны» в параграфе «Статистическое описание ветровых волн» существенно переработано и дополнено описание спектрального анализа ветрового волнения. Добавлены также спектральные методы расчета характеристик ветровых волн, а также параграфы «Период повторяемости» и «Аномальные волны (волны-убийцы)». В теме «Приливы» заново написан параграф «Гармонический анализ приливов». Теоретическое описание свободных длинных волн помещено в тему «Длинные гравитационные волны», в которой добавлено описание краевых и анемобарических волн. Существенно переработаны и дополнены параграфы, посвященные штормовым нагонам и цунами. В темах, посвященных внутренним волнам и волнам Россби, полностью переработана теоретическая часть, включая вывод дисперсионных соотношений и задачу о вертикальных модах. Наконец, добавлена новая тема, посвященная особенностям волновой динамики экваториальной зоны.

Тема 1

МОРСКИЕ ВОЛНЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ И МАСШТАБЫ ДВИЖЕНИЯ

1.1. Классификация морских волн

В большинстве случаев в океане наблюдаются *прогрессивные волны*, которые представляют собой движущиеся возмущения равновесного состояния среды. В случае ветровых волн на поверхности моря такие возмущения являются периодическими отклонениями уровня от положения равновесия, происходящими в разных точках пространства с различными фазами. В результате возникают движущиеся друг за другом волновые гребни и впадины. В замкнутых или частично замкнутых водоемах могут возникать *стоячие волны*. Для них характерно наличие неподвижных узловых линий, на которых отсутствуют вертикальные колебания, и пучностей, где эти колебания максимальны.

В зависимости от вертикальной структуры выделяются *поверхностные* и *внутренние волны*. Волны называются поверхностными, если обусловленные ими колебания частиц воды достигают наибольшей амплитуды на поверхности моря и с глубиной быстро затухают. В стратифицированном океане существуют внутренние волны, амплитуда которых в толще воды больше (обычно гораздо больше), чем на ее поверхности.

С физической точки зрения наиболее обоснованной представляется классификация волновых движений в океане в зависимости от природы возвращающей силы, поддерживающей колебательный процесс. В океанической среде существуют пять основных факторов, создающих возвращающие силы: упругость, поверхностное натяжение, гравитация, вращение Земли и изменение равновесной потенциальной завихренности, связанное с изменениями глубины и географической широты. С этими факторами и соответствующими возвращающими силами связаны пять основных типов океанических волн — звуковые, капиллярные, гравитационные, гироскопические и волны Россби (планетарные и топографические).

Звуковые (акустические) волны существуют благодаря сжимаемости морской воды. Эти волны составляют предмет изучения акустики океана и здесь не рассматриваются.

Капиллярные волны связаны с силой поверхностного натяжения на границе раздела «вода — воздух». Это высокочастотные, очень короткие волны с длинами от сотых до десятых долей сантиметра и периодами, измеряемыми сотыми долями секунды. Капиллярные волны образуют рябь на поверхности воды и играют важную роль в процессе зарождения более крупных гравитационных ветровых волн.

Гравитационные волны существуют благодаря возвращающему действию силы тяжести. К ним относятся довольно короткие ветровые волны с длинами от десятков до сотен метров и периодами в несколько секунд. В результате нелинейного взаимодействия ветровых волн возникают *инфрагравитационные волны* с периодами порядка нескольких минут, играющие важную роль в динамике прибрежной зоны. При прохождении интенсивных крупномасштабных барических систем (циклонов) генерируются длинные *анемобарические волны* и *штормовые нагоны*. В открытом море их высота незначительна, однако в прибрежной зоне такие волны вносят существенный вклад в повышение уровня моря, приводящее иногда к катастрофическим наводнениям. В результате атмосферных воздействий в замкнутых водоемах возникают стоячие волны — *сейши*. Подводные землетрясения и извержения вулканов возбуждают волны *цунами*, которые, набегая на берег, также могут производить катастрофические разрушения в прибрежной зоне. Цунами, анемобарические волны и сейши обладают периодами от нескольких минут до нескольких часов и длинами порядка сотен километров. Штормовые нагоны характеризуются временным масштабом порядка суток. Важнейшую роль в динамике океана играют *приливные волны*, возбуждаемые приливообразующими силами Луны и Солнца. В прибрежной зоне эти волны создают относительно медленные регулярные колебания уровня с преобладающим полусуточным периодом, амплитуда которых может достигать нескольких метров.

Гироскопические волны связаны с отклоняющей силой Кориолиса, возникающей в результате вращения Земли. Примером периодических движений, в которых гироскопический эффект проявляется в чистом виде, могут служить инерционные колебания. Эти колебания обладают инерционным периодом, а движения частиц воды происходят в горизонтальной плоскости. По этой причине сила тяжести не может действовать как возвращающая. Другой пример гироскопических волн — внутренние волны во вращающемся океане при отсутствии стратификации. Следует отметить, что длинные гравитационные волны с периодами порядка нескольких часов, в сущности, представляют собой смешанные гравитационно-гироскопические (или инерционно-гравитационные) волны, так как в этом случае эффекты гравитации и вращения действуют совместно.

Волны Россби (планетарные и топографические) обладают большими периодами от нескольких суток до месяцев. В динамике этих волн доминирующую роль играет эффект изменения потенциального вихря вследствие изменения параметра Кориолиса с широтой (планетарные волны Россби) либо изменения глубины (топографические волны Россби). Эти волны проявляются в виде медленных колебаний крупномасштабных течений.

1.2. Масштабы движения: значение вращения и стратификации

Масштабы представляют собой порядки величин физических переменных, используемых при изучении того или иного геофизического процесса. Основные масштабы при изучении движений в геофизической гидродинамике — время T , длина L , скорость V . При изучении волн различного типа в большинстве случаев нас интересуют их период, длина и скорость распространения. Например, короткие ветровые волны с периодом около 5 с распространяются со скоростью примерно 9 м/с и имеют длину около 50 м. Эти величины в данном случае и можно принять в качестве масштабов явления T , V и L . Другой пример — это волны цунами, которые относятся к длинным волнам. В этом случае в открытом океане в качестве характерных масштабов можно принять следующие величины: $T \sim 500$ с, $V \sim 700$ км/ч, $L \sim 100$ км. В некоторых случаях представляют интерес орбитальные скорости движения частиц воды, участвующих в волновом движении. В случае коротких ветровых волн $V \sim 1$ м/с, для цунами в открытом океане эта величина примерно равна нескольким сантиметрам в секунду.

Земля вращается вокруг собственной оси с периодом, равным одним суткам (солнечные сутки равны 24 ч, звездные — 23 ч 56 мин 4,1 с). Если Ω — угловая скорость вращения Земли, то в случае солнечных суток $\Omega = 7,2685 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, а в случае звездных суток $\Omega = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Очевидно, что вращение Земли оказывает существенное влияние на движение воды в океане, если временной масштаб изменений движения T приблизительно равен или превосходит 24 ч. Рассмотрим масштабы скорости U и длины L движения. Если частица, движущаяся со скоростью U , преодолевает расстояние L за время, превышающее период вращения Земли или сравнимое с ним, можно также ожидать, что траектория движения подвергается влиянию вращения. Например, при $L \geq 100$ км и $U \leq 1$ м/с, что справедливо для многих геофизических явлений в океане, таких как крупномасштабные течения и длинные волны, это условие выполняется. Влияние вращения Земли выражается в возникновении отклоняющей силы Кориолиса, действующей на движущиеся тела. Горизонтальные составляющие ускорения Кориолиса, если считать

вертикальную скорость намного меньшей, чем горизонтальная, равны $(2\Omega v \sin \varphi, 2 |v \sin \varphi|)$, или $(-fv, fu)$, где $f = 2\Omega \sin \varphi$ есть параметр Кориолиса, определяющий отклоняющую силу вращения Земли. С другой стороны, параметр Кориолиса часто называют инерционной частотой, с которой связано понятие инерционного периода $\frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \sin \varphi}$. Например, на широте 30° этот период равен

24 ч, на широте 45° — 17 ч. Таким образом, при оценке значения вращения в геофизических движениях временной масштаб последних необходимо сравнивать также с инерционным периодом.

Плотностная неоднородность, или стратификация, атмосферы и океана характеризуется тремя масштабами, которые играют важную роль при анализе многих задач геофизической гидродинамики. К этим масштабам относятся средняя плотность ρ_0 , характерное изменение плотности $\Delta\rho$ и вертикальное расстояние H , соответствующее такому изменению плотности. В океане важную роль, конечно, играет и общая глубина воды. В состоянии равновесия океан устойчиво стратифицирован, т. е. плотность воды в нем возрастает с глубиной. Вертикальный столб устойчиво стратифицированной воды находится в состоянии минимальной потенциальной энергии. Однако движения вод непрерывно нарушают это равновесие, поднимая более тяжелую воду и опуская легкую. При этом происходит увеличение потенциальной энергии за счет энергии кинетической. Стратификация оказывает существенное влияние на движение жидкости, если ее возмущение потребляет значительную часть кинетической энергии либо кинетической энергии недостаточно для возмущения стратификации. Наконец, если изменения потенциальной энергии происходят за счет очень малой части кинетической энергии, стратификация мало влияет на поток.

Рассмотрим фундаментальные уравнения гидродинамики на вращающейся Земле для невязкой жидкости [20]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.1b)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g, \quad (1.1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.1d)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0. \quad (1.1e)$$

Здесь u, v, w — составляющие скорости по осям x, y, z соответственно; $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$; $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$; $\rho_0(z)$ и $p_0(z)$ — вертикальное распределение плотности и давления жидкости в невозмущенном состоянии; $\rho'(x, y, z, t)$ и $p'(x, y, z, t)$ — возмущение плотности и давления, причем $\rho'(x, y, z, t) \ll \rho_0(z)$, $p'(x, y, z, t) \ll p_0(z)$. Гравитационное ускорение g есть постоянная величина, параметр Кориолиса $f = 2\Omega \sin \phi$ зависит от широты или принимается постоянным. Уравнение (1.1с) не содержит адвективных членов, так как в геофизических задачах вертикальная скорость обычно намного меньше горизонтальной и в вертикальном направлении доминируют сила тяжести и градиента давления. Производная $\partial w / \partial t$ сохранена, так как она важна при изучении коротких внутренних волн. Уравнение импульса по вертикали принимает вид

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} - \rho_0 g - \rho' g.$$

В левой части опускаем член $\rho' \frac{\partial w}{\partial t}$ ввиду его малости. Далее $-\frac{\partial p_0}{\partial z} - \rho_0 g = 0$, так как в невозмущенном состоянии справедливо условие гидростатики. Учитывая эти замечания, получаем (1.1с). Эти пять уравнений для пяти переменных u, v, w, p и ρ' образуют замкнутую систему уравнений и представляют собой основу геофизической динамики жидкости.

Члены уравнений импульса (1.1а) и (1.1б) имеют следующие масштабы:

$$\frac{U}{T}, \frac{U^2}{L}, \frac{U^2}{L}, \frac{WU}{H}, \Omega U, \frac{P}{\rho_0 L}.$$

Первый из них характеризует локальное ускорение, второй и третий — горизонтальную адвекцию, четвертый — вертикальную адвекцию, пятый — ускорение Кориолиса, шестой член — силу градиента давления.

Динамика геофизической жидкости во многих случаях изучает движения, в которых вращение есть важный фактор и в данной последовательности масштабов выражается членом ΩU . Деление на ΩU с целью оценки важности всех остальных членов по сравнению с членом Кориолиса дает следующий ряд безразмерных отношений:

$$\frac{1}{\Omega T}, \frac{U}{\Omega L}, \frac{U}{\Omega L}, \frac{WL}{UH} \cdot \frac{U}{\Omega L}, 1, \frac{P}{\rho_0 \Omega L U}.$$

С точки зрения динамики волновых процессов, прежде всего длинных волн, наиболее важны первые два отношения. Первое отношение

$$Ro_T = \frac{1}{\Omega T} \quad (1.2)$$

называется *временным числом Россби*, которое характеризует отношение локального изменения скорости во времени к ускорению Кориолиса. Следующее число

$$Ro = \frac{U}{\Omega L}, \quad (1.3)$$

которое позволяет оценить отношение горизонтального адвективного ускорения к ускорению Кориолиса, называется *числом Россби*. По порядку величины оба этих числа в случае длинных волн меньше или равны единице. В зависимости от значений этих чисел получаются решения для длинных волн различного типа: длинные гравитационные волны, измененные влиянием вращения, и волны Россби. Отношение силы градиента давления к силе Кориолиса $P/\rho_0\Omega LU$ по порядку величины равно единице. Действительно, основное установившееся состояние равновесия в геофизической гидродинамике характеризуется балансом этих сил. Тогда для соответствующих масштабов можно записать

$$P \approx \rho_0\Omega LU. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) записаны без учета сил трения, так как диссипативные члены в уравнении импульса могут быть пренебрежимо малыми, но их необходимо сохранить при изучении пограничных слоев, поверхностного и придонного.

Два члена в правой части уравнения (1.1с) имеют масштабы

$$\frac{P}{H}, g\Delta\rho,$$

и отношение последнего к первому равно, учитывая (1.4),

$$\frac{gH\Delta\rho}{P} = \frac{gH\Delta\rho}{\rho_0\Omega LU} = \frac{U}{\Omega L} \cdot \frac{gH\Delta\rho}{\rho_0 U^2} = Ro \cdot \frac{gH\Delta\rho}{\rho_0 U^2}.$$

Это приводит к еще одному безразмерному отношению

$$Ri = \frac{gH\phi}{\rho_0 U^2}. \quad (1.5)$$

Оно называется *числом Ричардсона*. Для геофизических потоков оно может быть намного меньше, иметь тот же порядок или быть намного больше, чем единица, в зависимости от того, имеют ли эффекты стратификации незначительное, важное или доминирующее значение.

Тема 2

ЭЛЕМЕНТЫ ВОЛН

При теоретическом описании колебаний жидкости широко используется понятие гармонической, плоской волны. Волны называются **плоскими**, если все жидкие частицы, участвующие в волновом движении, синхронно перемещаются в параллельных плоскостях, описывая одинаковые траектории. В общем случае гармоническую волну можно представить в виде

$$\zeta = A \cos(lx + my - \sigma t + \varphi_0), \quad (2.1)$$

где ζ — возмущение свободной поверхности; A — амплитуда волны; l и m — составляющие волнового вектора $\mathbf{k} = i\mathbf{l} + j\mathbf{m}$; σ — круговая частота (рад/с); φ_0 — начальная фаза.

Предположим, что все частицы перемещаются в вертикальных плоскостях, параллельных координатной плоскости xOz , причем ось Oz направлена вверх. В этом случае движение носит двумерный характер, и гармоническая волна может быть представлена в виде

$$\zeta = A \cos(kx - \sigma t + \varphi_0), \text{ или } \zeta = A \sin(kx - \sigma t + \varphi_0), \quad (2.1a)$$

где k — волновое число. Профиль гармонической волны показан на рис. 2.1.

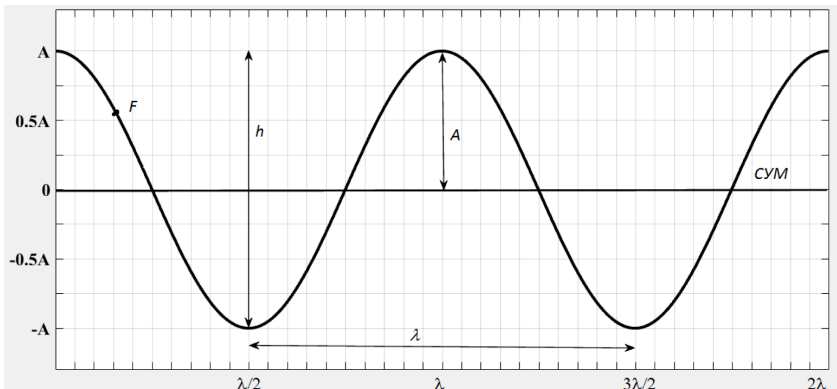


Рис. 2.1. Профиль гармонической волны:

СУМ — средний уровень моря

Расстояние по вертикали h между вершиной (гребнем) и подошвой волны, равное удвоенной амплитуде A , называется высотой волны. Длина волны λ есть расстояние между ее двумя последовательными гребнями или подошвами. Выражение $kx - \sigma t$ представляет собой фазу волны, которая определяет состояние колебательного процесса в данной точке x в момент времени t , например, отклонение частицы воды от положения равновесия. Очевидно, что расстояние λ по оси Ox соответствует изменению фазы на 2π , т. е. $k\lambda = 2\pi$, откуда получаем $k = 2\pi/\lambda$. Периодом τ называется промежуток времени, в течение которого частица воды совершает полное колебание. Таким образом, в фиксированной точке за время τ фаза также изменяется на 2π , откуда получаем $\sigma = 2\pi/\tau$.

Рассмотрим произвольную точку профиля F (см. рис. 2.1), отклонение которой от положения равновесия равно $\zeta(x, t)$. Величина $\zeta(x, t)$ остается постоянной, если точка F будет жестко привязанной к профилю волны, но не связанной с той или иной индивидуальной частицей воды. В этом случае фаза также остается постоянной, т. е.

$$kx - \sigma t = \text{const.} \quad (2.2)$$

Последнее условие означает, что с течением времени координата x точки F перемещается в положительном направлении оси Ox . Приведенные рассуждения справедливы для любой другой точки профиля, поэтому можно заключить, что весь профиль волны, не меняя своей формы, перемещается в положительном направлении оси Ox . Скорость этого перемещения легко получить, если продифференцировать (2.2) по t . Получаем

$$k \frac{dx}{dt} - \sigma = 0,$$

откуда

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma}{k}. \quad (2.3)$$

Величина c называется фазовой скоростью, или скоростью распространения прогрессивной волны. Так как $\sigma = 2\pi/\tau$, а $k = 2\pi/\lambda$, получаем

$$A = \frac{\sigma}{k} = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (2.4)$$

В реальном море колебания поверхности воды в области действия ветра носят ярко выраженный неупорядоченный характер. При внимательном рассмотрении наблюдаются волны различные по длине и периоду с очень изменчивыми впадинами и гребнями,

распространяющиеся в разных направлениях. Такое неупорядоченное движение можно рассматривать как результат наложения простых гармонических волн с различными длинами, периодами и амплитудами. В дальнейшем мы увидим, что скорость распространения волн в общем случае зависит от их длины, т. е. волновые движения обладают дисперсией. Например, в случае поверхностных ветровых волн фазовая скорость растет с ростом длины. Поэтому можно ожидать, что волны с течением времени разделятся на различные группы, причем каждая группа будет состоять из волн, имеющих почти одинаковую длину.

Рассмотрим простейший случай, когда движение может быть описано как результат суперпозиции двух прогрессивных волн равной амплитуды, частоты и волновые числа которых имеют близкие значения [52]:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= A \cos(kx - \sigma t), \\ \zeta_2 &= A \cos((k + \delta k)x - (\sigma + \delta \sigma)t),\end{aligned}$$

где $\delta \sigma$ и δk считаются малыми величинами. Сложение этих волн дает

$$\begin{aligned}\zeta(x, t) &= \zeta_1 + \zeta_2 = \\ &= 2A \cos\left(\left(k + \frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\sigma + \frac{\delta \sigma}{2}\right)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\delta kx - \delta \sigma t)\right) = \\ &= B \cos\left(\left(k + \frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\sigma + \frac{\delta \sigma}{2}\right)t\right).\end{aligned}$$

Так как δk и $\delta \sigma$ малы, то в последнем выражении функция B изменяется намного медленнее, чем $\cos\left(\left(k + \frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\sigma + \frac{\delta \sigma}{2}\right)t\right)$. По-

этому $\zeta(x, t)$ представляет собой в каждый момент времени модулированную по амплитуде синусоиду (рис. 2.2). Из выражения

$B = 2A \cos\left(\frac{\delta kx - \delta \sigma t}{2}\right)$ следует, что контур, изображенный пункти-

ром, движется вправо со скоростью $\frac{\delta \sigma}{\delta k}$. Приведенные рассуждения

показывают, что в процессе распространения волны с близкими периодами и длинами формируют группы — волновые пакеты. Внутри каждой группы отдельные волны движутся с присущей им фазовой скоростью, которая в большинстве случаев превышает скорость перемещения группы. При этом амплитуда волны минимальна в задней и передней частях группы и максимальна в ее середине.

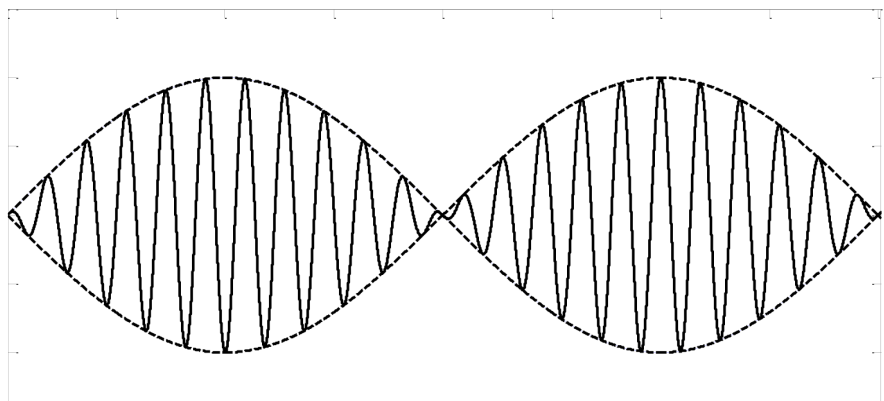


Рис. 2.2. Группы волн

В общем случае групповая скорость c_g определяется выражением

$$c_g = \frac{d\sigma}{dk}. \quad (2.5)$$

Так как $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ и $c = \frac{\sigma}{k}$, то выражение (2.5) можно переписать в виде

$$c_g = \frac{d(kc)}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (2.6)$$

В векторном виде

$$\mathbf{c}_g = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial k_1}, \frac{\partial \sigma}{\partial k_2}, \frac{\partial \sigma}{\partial k_3} \right), \quad (2.7)$$

где k_1, k_2, k_3 — составляющие волнового вектора по осям Ox, Oy, Oz соответственно.

Тема 3

ЛИНЕЙНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим свободные гравитационные волны на поверхности несжимаемой, невязкой жидкости без учета вращения Земли. В этом случае уравнения движения в форме Эйлера имеют вид [22, 26]

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\rho} p_x, \quad (3.1a)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{1}{\rho} p_y, \quad (3.1b)$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z - g, \quad (3.1c)$$

а уравнение неразрывности записывается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = u_x + v_y + w_z = 0. \quad (3.1d)$$

Здесь индексы при переменных означают операцию дифференцирования, например, $u_x = \partial u / \partial x$ и т. д. Пренебрежение силами трения (невязкая жидкость) применимо для волн, период которых много меньше времени затухания. Для большинства океанских волн это приближение хорошо выполняется. Исключение из уравнений членов, связанных с вращением Земли, применимо в том случае, когда частота процесса много больше инерционной частоты $f = 2\omega \sin \varphi$, где ω — угловая частота вращения Земли; φ — географическая широта. Для многих классов волн (ветровые волны, зыбь, анемобарические волны, цунами) с периодами от нескольких секунд до нескольких десятков минут это условие вполне справедливо.

Поле скорости при движении такой жидкости под действием силы тяжести удовлетворяет условию потенциальности, т. е.

$$\text{rot}\mathbf{V} = (v_z - w_y, u_y - v_x, w_x - u_z) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь ось Oz направлена вверх; x, y — горизонтальные координаты; u, v, w — компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$ по осям x, y, z . Равенство (3.2) означает, что существует потенциал скорости ϑ , определяемый условиями

$$u = -\vartheta_x, v = -\vartheta_y, w = -\vartheta_z. \quad (3.3)$$

Подстановка условий (3.3) в уравнение неразрывности (3.1d) приводит к уравнению Лапласа для потенциала скорости

$$\Delta\vartheta = \vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \vartheta_{zz} = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, поле скоростей определяется одной функцией, а именно его потенциалом ϑ , который удовлетворяет уравнению Лапласа (3.4), что существенно упрощает задачу.

Предположим, что жидкость ограничена поверхностью S , причем любая частица, находящаяся на этой поверхности в некоторый момент времени, на ней остается всегда. Пусть поверхность задана уравнением $S(x, y, z; t) = 0$, тогда должно выполняться условие

$$\frac{dS}{dt} = uS_x + vS_y + wS_z + S_t = 0. \quad (3.5)$$

Свободная поверхность, форма которой заранее неизвестна, может быть задана уравнением $z = \zeta(x, y; t)$. Для любой частицы жидкости на такой поверхности $S = z - \zeta(x, y; t) = 0$. Тогда из (3.5) следует кинематическое условие

$$\vartheta_x \zeta_x + \vartheta_y \zeta_y + \vartheta_z + \zeta_t = 0 \text{ на } S. \quad (3.6)$$

Условие потенциальности поля скорости позволяет также получить из уравнений движения закон Бернулли, из которого следует динамическое условие на свободной поверхности

$$g\zeta - \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{P_0}{\rho} = 0 \text{ на } S, \quad (3.7)$$

где P_0 — атмосферное давление; ρ — плотность; g — ускорение свободного падения. При изучении свободных поверхностных гравитационных волн атмосферное давление в большинстве случаев может считаться постоянной величиной. Тогда, не теряя общности, последнее слагаемое в (3.7) можно отбросить. С физической точки зрения такая возможность объясняется тем, что в результате отбра-

сывания постоянного давления на поверхности давление в каждой точке внутри жидкости изменится на постоянную величину, что не может изменить поля скорости. Окончательно динамическое условие (3.7) может быть записано в виде

$$g\zeta - \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = 0. \quad (3.8)$$

На твердых границах задается условие равенства нулю скорости по нормали к поверхности, т. е. условие непротекания

$$v_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, задача изучения поверхностных гравитационных волн в несжимаемой, идеальной жидкости сводится к определению из уравнения Лапласа (3.4) потенциала скорости Φ , удовлетворяющего на твердых границах условию непротекания (3.9) и двум граничным условиям (3.6) и (3.8) на свободной поверхности $z = \zeta(x, y; t)$.

Сформулированная таким образом задача с математической точки зрения очень сложна. Это объясняется нелинейностью граничных условий и тем, что область, в которой необходимо определить потенциал скорости, заранее неизвестна, так как ограничена свободной поверхностью, форму которой мы и должны найти. Для упрощения этой задачи необходимо принять дополнительные гипотезы, которые приводят к приближенным теориям.

Одна из таких гипотез состоит в том, что амплитуда волн считается малой величиной по сравнению с их длиной. На этом предположении основана теория волн бесконечно малой амплитуды. Если далее предположить, что глубина моря мала по сравнению с длиной волны, то мы получим теорию длинных волн, которая была развита главным образом в ходе исследований приливных колебаний.

3.2. Свободные волны бесконечно малой амплитуды

Теория волн бесконечно малой амплитуды основывается на предположении, что возвышение свободной поверхности ζ , скорость частиц воды и их производные есть малые величины. Это предположение позволяет линеаризовать граничные условия (3.6) и (3.8) и применить их на фиксированной поверхности $z = 0$, что существенно упрощает задачу:

$$\zeta_t + \Phi_z = 0, \quad (3.10)$$

$$g\zeta - \Phi_t = 0. \quad (3.11)$$