Г. А. Угольницкий

Лекции по теории игр

учебное пособие

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮФУ
РОСТОВ-НА-ДОНУ·ТАГАНРОГ

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18 я73
У26

Печатается по решению кафедры прикладной математики и программирования Южного федерального университета (протокол №10 от 01 июня 2023 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, директор Института прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН *В. В. Мазалов*;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и исследования операций Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета *Д. Б. Рохлин*

Угольницкий, Г. А.

У26 Лекции по теории игр : учебное пособие / Г. А. Угольницкий ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2023. – 339 с.
ISBN 978-5-9275-4361-8

В учебном пособии рассматриваются модели конфликтов, описываемые и исследуемые с помощью математической теории игр. Математическая формализация играет ведущую роль в становлении конфликтологии как междисциплинарного направления исследований и практической работы по разрешению конфликтов.

Книга ориентирована в первую очередь на студентов магистратуры и аспирантуры по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Компьютерные и информационные науки», «Информатика и вычислительная техника», однако будет полезна также для направлений подготовки «Политология», «Психология», «Конфликтология», «Менеджмент», может служить справочником для руководителей и практических специалистов в указанных областях.

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18 я73

ISBN 978-5-9275-4361-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 1.
ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В первой части учебного пособия изложены модели игр в нормальной форме и связанные с ними принципы оптимальности коллективных решений, дающие математическое описание взаимно приемлемых компромиссов.

В том редком случае, когда у каждого участника конфликта есть наилучшая стратегия, игроки могут независимо прийти к равновесию в доминантных стратегиях. Другим принципом оптимальности при изолированном поведении является выбор осторожных стратегий, при котором каждый участник рассчитывает на худшее для себя развитие конфликта. Классическая теория игр с нулевой суммой (антагонистических конфликтов) Неймана-Моргенштерна рассматривается как частный случай базовой модели игры в нормальной форме. Самым распространенным принципом формализации компромисса при независимом поведении игроков является равновесие Нэша, устойчивое против индивидуальных отклонений (лекция 1).

В лекции 2 рассматриваются модельные игры двух лиц с континуальными множествами стратегий и непрерывными функциями выигрыша, для которых находятся равновесия Нэша. Обсуждаются вопросы устойчивости равновесий Нэша и процедуры итеративного их нахождения (так называемые процедуры нащупывания по Курно). Специфический принцип оптимальности в теории игр – равновесие Штакельберга, описывающее рациональное поведение при наличии иерархии между игроками. В лекции 2 вводятся некоторые понятия теории иерархических игр (в частности, борьба за лидерство), требуемые для дальнейшего изложения. Подробнее иерархические игры изучаются в третьей части книги.

Допущение определенного взаимодействия между участниками конфликта позволяет изучать стабильные соглашения различного типа (лекция 3). В частности, обобщением равновесия Нэша служит сильное равновесие, устойчивое против групповых отклонений и обеспечивающее свою стабильность автоматически. В целом, стабильность соглашений обеспечивается с помощью взаимных угроз (сценария предостережений). Отдельно рассматривается случай игр двух лиц, для которого можно получить более сильные результаты, в том числе классификацию игр.

В лекции 4 дается введение в теорию смешанных расширений игр в нормальной форме, обобщающих соответствующие детерминированные понятия на случай, когда стратегии могут выбираться с определенными вероятностями.

Лекция 5 посвящена очень активно изучаемым в последнее время сетевым играм, находящим разнообразные приложения в сфере телекоммуникаций, вычислительных систем, организации дорожного движения и т.д. Рассматриваются понятия равновесия Вардропа как основного принципа оптимальности для этого класса игр и цены анархии.

Лекция 1. Основные понятия игр в нормальной форме. Равновесие Нэша

Математическая теория игр изучает модели поведения в условиях конфликта и неопределенности. Первая часть учебного пособия посвящена наиболее изученным и распространенным играм в нормальной форме (стратегическим играм). Покажем место этих игр в системе моделей принятия решений, используя два естественных признака классификации – число субъектов принятия решений и число критериев, которыми они руководствуются.

Хорошо известна классическая постановка задачи оптимизации

$$f(x) \to \max, \quad x \in X, \tag{1.1}$$

смысл которой – поиск максимума (или минимума) целевой функции f на множестве X. В этом случае имеется один субъект принятия решения, цель которого – максимизация единственного критерия оптимальности (целевой функции).

А если у субъекта несколько критериев оптимальности (как обычно бывает в жизни)? Моделью принятия решения в этом случае служит задача многокритериальной оптимизации

$$f_j(x) \to \max, \quad x \in X, \quad j \in M. \tag{1.2}$$

Однако, не менее распространена и другая постановка задачи принятия решений – наличие нескольких субъектов, каждый из которых стремится максимизировать свою целевую функцию – это и есть игра в нормальной форме

$$f_i(x) \to \max, \quad x_i \in X_i, \quad i \in N. \tag{1.3}$$

Естественным обобщением моделей (1.2) и (1.3), в свою очередь, служат игры с векторными функциями выигрыша, в которых каждый игрок имеет несколько критериев оптимальности. Таким образом, получаем классификацию моделей принятия решений по указанным признакам (табл.1.1).

Таблица 1.1

Классификация моделей принятия решений

Число критериев / Число субъектов	Один	Несколько
Один	Задача (скалярной) оптимизации	Задача многокритериальной (векторной) оптимизации
Несколько	Игры в нормальной форме	Игры в нормальной форме с векторными функциями выигрыша

Модель (1.3) – так называемая игра в нормальной форме – служит предметом рассмотрения в первой части книги. Дадим более точное

Определение 1.1. Игрой в нормальной форме называется набор

$$G = \langle N,\ \{X_i\}_{i \in N},\ \{u_i\}_{i \in N} \rangle. \tag{1.4}$$

Здесь $N = \{1, 2, ..., n\}$ – конечное множество так называемых *игроков* – субъектов принятия решения (участников конфликта), имеющих свои цели (интересы) и определенные возможности их достижения (реализации).

В различных конфликтных ситуациях в качестве игроков могут выступать хозяйствующие субъекты (индивидуальные предприниматели, предприятия, объединения), политические субъекты (избиратели, партии, движения), частные лица и т.д. Каждый игрок $i \in N$ имеет множество допустимых *стратегий* X_i. Элемент $x_i \in X_i$ (допустимая стратегия игрока i) – это конкретное действие, совершаемое игроком. После того, как все игроки из множества N выбрали свои допустимые стратегии, образуется вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ – игровая *ситуация* (*исход* игры). Множество всех игровых ситуаций есть $X = X_1 \times ... \times X_n$. Удобно следующее обозначение: $x_{N \setminus i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$, т.е. вектор допустимых стратегий всех игроков из множества N, кроме игрока i.

Наконец, в модели (1.4) для каждого игрока $i \in N$ определена *функция выигрыша* $u_i : X \to R$, сопоставляющая каждой ситуации $x \in X$ некоторое вещественное число $u_i(x)$ – выигрыш игрока i в ситуации x. Содержательно это число может означать прибыль (убытки), доход (затраты), число голосов на выборах и т.п.

В случае двух игроков $(N=\{1,2\})$ очень удобно представлять игру в виде матрицы, строки которой обозначают стратегии первого игрока, столбцы – стратегии второго, а в каждой клетке содержатся два числа – выигрыши игроков в ситуации, образованной соответствующими стратегиями. В качестве первой модельной игры рассмотрим знаменитый

Пример 1.1 (игра «Дилемма заключенного»)

	A	M
A	1, 1	3, 0
M	0, 3	2, 2

Здесь $X_1 = X_2 = \{A, M\}$, т.е. каждый игрок имеет две стратегии – A («агрессия») и M («миролюбие»). Соответственно, $u_1(A,A)=u_2(A,A)=1$, $u_1(A,M)=3$, $u_2(A,M)=0$, $u_1(M,A)=0$, $u_2(M,A)=3$, $u_1(M,M)=u_2(M,M)=2$.

Проведем предварительный анализ «дилеммы заключенного». Видно, что каждому игроку выгоднее выбирать агрессивную стратегию по сравнению с миролюбивой: как бы ни отвечал партнер, выигрыш в этом случае оказывается больше. Поэтому при изолированном поведении, рассчитывая только на себя, каждый участник конфликта будет вести себя агрессивно (это подтверждается практикой), и возникнет ситуация (A, A), в которой оба партнера получают по 1. Но есть ситуация (M, M), в которой каждый участник конфликта может получить 2! Оказывается, что для попадания в эту ситуацию нужна кооперация.

Не менее знаменит следующий пример.

Пример 1.2 (игра «Семейный спор»).

	Ф	*Б*
Ф	2, 1	0, 0
Б	0, 0	1, 2

Здесь предварительный анализ указывает на другую проблему. Ясно, что нужно выбирать стратегии, ведущие к ситуациям с ненулевыми выигрышами $(Ф,Ф)$ и $(Б,Б)$. Но эти ситуации неравнозначны для участников конфликта: первый предпочел бы $(Ф,Ф)$, а второй – $(Б,Б)$. Поскольку игра симметрична, то при изолированном поведении участники конфликта не смогут предпочесть одно решение другому: для конструктивного компромисса вновь требуется кооперация или что-то еще.

Основным постулатом теории игр в нормальной форме считается следующее утверждение: **интересы каждого игрока целиком и полностью описываются стремлением максимизировать свою функцию выигрыша** (так называемый *постулат экономической рациональности*). Принятие этого постулата оставляет за рамками модели (1.4) такие мотивы человеческого поведения, как следование традиционным образцам, действия в состоянии аффекта, месть, глупость и т.д., но зато позволяет построить содержательную математическую теорию в экономике, политике, управлении организациями, разрешении конфликтов.

Подчеркнем специфику модели игры в нормальной форме (1.4) с учетом постулата экономической рациональности. Каждый игрок стремится максимизировать свою функцию выигрыша u_i, но при этом он может распоряжаться только одной переменной $x_i \in X_i$, в то время как u_i зависит от векторной переменной $x = (x_i, x_{N\setminus i})$. Поэтому результат максимизации будет зависеть не только от действия игрока i, но и от действий всех остальных игроков из множества $N \setminus \{i\}$.

Именно это обстоятельство предопределяет необходимость поиска компромисса при принятии решения в игровых моделях конфликта, а с математической точки зрения – наличие ряда подходов к определению разрешения конфликта (принципов оптимальности).

Рассмотрение теоретико-игровых принципов оптимальности начнем с простейшего случая изолированного поведения, когда игроки действуют независимо от интересов других игроков (в частности, могут просто их не знать).

Определение 1.2. Стратегия x_i *доминирует* стратегию y_i $(x_i \succ y_i)$, если

$$\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i} \;\; u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \ge u_i(y_i, x_{N\setminus i}), \qquad \exists x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i} \;\; u_i(x_i, x_{N\setminus i}) > u_i(y_i, x_{N\setminus i}).$$

Обозначим через $Д_i$ множество *недоминируемых* стратегий i-го игрока.

Лемма 1.1. Пусть множество X_i компактно, функция u_i непрерывна. Тогда множество $Д_i$ не пусто.

Определение 1.3. Стратегия x_i называется *доминантной* для игрока i, если $\forall y_i \in X_i \ \forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i} \ u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{N\setminus i})$.

Обозначим множество доминантных стратегий игрока i через D_i. Если для всех игроков $i \in N$ множество D_i не пусто, то существует хотя бы одна ситуация $x \in D_1 \times ... \times D_n$, называемая *равновесием в доминантных стратегиях* в игре (1.4).

Преимущества доминантной стратегии очевидны, поэтому вполне естественно принять равновесие в доминантных стратегиях в качестве принципа оптимальности (решения игры) при изолированном поведении игроков. Но всегда ли можно реализовать этот принцип оптимальности?

Определение 1.4. Стратегии x_i и y_i *эквивалентны* $(x_i \sim y_i)$, если $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i} \ u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = u_i(y_i, x_{N\setminus i})$.

Лемма 1.2. Пусть $Д_i \neq \varnothing$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1) $D_i \neq \varnothing$;

2) все стратегии из множества $Д_i$ эквивалентны;

3) $D_i = Д_i$.

Заметим, что лемма 1.2 определяет дихотомическое разбиение всех игр в нормальной форме. В первый класс этого разбиения попадают игры, для которых $\forall i \in N \ D_i \neq \varnothing$. В этом случае в качестве принципа оптимальности (решения игры) можно брать равновесие в доминантных стратегиях, а в качестве элементов этого равновесия – любые недоминируемые (они же доминантные) стратегии.

В играх второго класса $\exists i \in N \ D_i = \varnothing$: тогда равновесие в доминантных стратегиях не существует, и приходится искать иные подходы к разрешению конфликта. Конечно, игр второго класса намного больше.

Вернемся к игре «Дилемма заключенного» (пример 1.1). Заметим вновь, что ситуация (M, M) не является равновесием в доминантных стратегиях, но в этой ситуации оба игрока получают б**о**льшие выигрыши, чем при выборе доминантной стратегии A.

Определение 1.5. Ситуация x *оптимальна по Парето* $(x \in PO)$, если не существует такой ситуации y, что $\forall i \in N \ u_i(y) \geq u_i(x) \quad \exists i \in N \ u_i(y) > u_i(x)$.

Таким образом, ситуация оптимальна по Парето, если не существует другой ситуации, в которой каждый игрок получает не меньший выигрыш, а хотя бы один – строго больший. Очевидно, в «Дилемме заключенного» множество Парето–оптимальных ситуаций $PO = \{(A, M), (M, A), (M, M)\}$. Заметим, что при изолированном поведении игроки в «Дилемме заключенного» не смогут попасть в более выгодную для обоих участников ситуацию $(M, M) \in PO$: каждый побоится выбрать стратегию M, так как партнер может выбрать A. Дело в том, что оптимальность по Парето – это уже кооперативный принцип оптимальности, требующий обмена информацией между участниками конфликта.

Еще один подход к построению принципа оптимальности при изолированном поведении – осторожность (расчет на худшее).

Определение 1.6. Стратегия x_i *осторожная* для игрока i, если

$$\inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = \sup_{y_i \in X_i} \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}).$$

Величина $\alpha_i = \sup_{y_i \in X_i} \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i})$ называется *гарантированным выигрышем* i-го игрока. Таким образом, выбор осторожной стратегии гарантирует игроку i выигрыш, не меньший α_i (если остальные игроки не будут играть против него, то он может получить и больше). Обозначим через P_i множество осторожных стратегий игрока i.

Лемма 1.3. Пусть X_i компактно, u_i непрерывна. Тогда P_i не пусто, компактно и пересекается с множеством $Д_i$.

Определение 1.7. Игра в нормальной форме *несущественна*, если нет исхода x, для которого

$$\forall i \in N \;\; u_i(x) \geq \alpha_i; \;\; \exists i \in N \;\; u_i(x) > \alpha_i.$$

Основным примером несущественных игр являются так называемые *игры с нулевой суммой,* с рассмотрения которых началось построение общей теории игр. В этом частном случае конфликт антагонистический: в нем участвуют два игрока, и выигрыш одного равен проигрышу другого (отсюда название класса игр). Поэтому модель конфликта можно записать в виде

$$G_0 = \langle X_1, X_2, u \rangle, \tag{1.5}$$

где X_1, X_2 – множества стратегий игроков, $u = u_1 = -u_2$ – функция выигрыша. Соответственно, в каждом поле платежной матрицы достаточно указывать одно число – выигрыш первого игрока, равный проигрышу второго.

Пример 1.3 (игра на пальцах).

	Один	Два
Один	0	-1
Два	1	0

В этой нехитрой игре участники одновременно показывают один или два пальца. Если показаны одинаковые числа, то оба игрока не получают ничего, если же различные, то показавший меньшее число платит рубль показавшему большее.

Очевидно, что первый игрок должен показывать два пальца (это доминантная стратегия); в силу симметрии так же поступит второй, и исходом игры будет ситуация (два, два). Заметим, что указанные стратегии являются также осторожными стратегиями игроков. В общем случае в антагонистической игре осторожные стратегии игроков могут быть заданы следующим образом:

$$x_1 \in P_1(u) \Leftrightarrow \inf_{y_2 \in X_2} u(x_1, y_2) = \sup_{y_1 \in X_1} \inf_{y_2 \in X_2} u(y_1, y_2) = \alpha,$$

$$x_2 \in P_2(-u) \Leftrightarrow \sup_{y_1 \in X_1} u(y_1, x_2) = \inf_{y_2 \in X_2} \sup_{y_1 \in X_1} u(y_1, y_2) = \beta.$$

Числа α (верхняя цена игры) и β (нижняя цена игры) являются соответственно максимальным гарантированным выигрышем игрока 1 и минимальным гарантированным проигрышем игрока 2. Легко показать, что справедливо неравенство

$$\alpha \le \beta\,. \tag{1.6}$$

Если выполняется равенство $\alpha = \beta = \gamma$, то величина γ называется *ценой игры*. Если в (1.6) строгое неравенство, то игра не имеет цены.

Теорема 1.1. Пусть $G_0 = \langle X_1, X_2, u \rangle$ – игра двух лиц с нулевой суммой, X_1, X_2 – компакты, u непрерывна. Тогда G_0 несущественна тогда и только тогда, когда она имеет цену.

Определение 1.8. Седловая пара в игре двух лиц с нулевой суммой $G_0 = \langle X_1, X_2, u \rangle$ – это такая ситуация $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, что

$$\forall (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2 : u(y_1, x_2) \le u(x_1, x_2) \le u(x_1, y_2).$$

Обозначим через S множество (возможно, пустое) седловых пар.

Определение 1.9. Если набор гарантированных выигрышей оптимален по Парето, то осторожные стратегии называются *оптимальными*.

Теорема 1.2. Пусть $G_0 = \langle X_1, X_2, u \rangle$ – игра двух лиц с нулевой суммой. Если G_0 имеет цену, то исход является парой оптимальных стратегий тогда и только тогда, когда это седловая пара: $S = P_1(u) \times P_2(-u)$. Если G_0 не имеет цены, то $S = \varnothing$.

Таким образом, ключевая характеристика игр двух лиц с нулевой суммой – наличие или отсутствие цены игры. Если цена существует, то бесспорное решение игры дает пара оптимальных стратегий, которые определяются двумя эквивалентными способами: изолированно (как осторожные стратегии) и одновременно обоими игроками (как седловые пары). Если же цены нет, то нет и рациональной рекомендации по разрешению антагонистического конфликта в классе чистых стратегий. В этом случае приходится использовать так называемые смешанные стратегии (см. лекцию 4).

Теперь предположим, что игрок i, рассматривая возможность выбора стратегии y_i вместо x_i, не учитывает реакции остальных игроков на это изменение, т.е. считает, что выбор $x_{N \setminus i}$ останется неизменным. Это предположение вполне естественно при большом числе участников конфликта (отдельная фирма i в экономике, отдельный избиратель i в политике и т.п.) и приводит к самому распространенному принципу оптимальности для игр в нормальной форме, за разработку которого его автор Джон Нэш был в 1994 году удостоен Нобелевской премии по экономике.

Определение 1.10. Ситуация x есть *равновесие Нэша* в игре $G = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle$, если

$$\forall i \in N \ \ \forall y_i \in X_i \ \ u_i(x) \geq (y_i, x_{N \setminus i}). \tag{1.7}$$

Таким образом, в ситуации равновесия Нэша никому из игроков не выгодно отклоняться от равновесной стратегии, если остальные также этого не делают. Эту особенность равновесия Нэша можно охарактеризовать как устойчивость по отношению к индивидуальным отклонениям (стратегическую устойчивость). Именно это важнейшее свойство обусловливает распространенность равновесия Нэша как принципа оптимальности при некооперативном поведении.

В частности, равновесия Нэша обладают еще одним полезным свойством.

Определение 1.11. Ситуация x игры $G = \langle N, \{x_i\}_{i\in N}, \{u\}_{i\in N} \rangle$ называется *индивидуально рациональной*, если

$$\forall i \in N \quad u_i(x) \geq \alpha_i = \sup_{y_i \in X_i} \inf_{y_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, y_{N\setminus i}). \tag{1.8}$$

Обозначим через IR множество индивидуально рациональных ситуаций в игре G.

Лемма 1.4. Все равновесия Нэша индивидуально рациональны.

Доказательство: $x \in NE \Rightarrow u_i(x) \geq u_i(y_i, x_{\hat{i}}) \ \ \forall y_i \in X_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_i(x) \geq \sup_{y_i \in X_i} u_i(y_i, x_{\hat{i}}) \geq \sup_{y_i \in X_i} \inf_{y_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}} u_i(y_i, y_{\hat{i}}) = \alpha_i \Rightarrow x \in IR.$$

В то же время, равновесие Нэша (как и любой другой принцип оптимальности в теории игр) имеет ряд недостатков.

Во-первых, в некоторых играх равновесие Нэша не существует (пример 1.4).

Пример 1.4.

	A2	*B2*
A1	5, 5	8, 2
B1	9, 1	2, 8

Во-вторых. могут существовать два равновесия Нэша, неравноценные для игроков, и тогда непонятно, какое из них выбирать (пример 1.2 "Семейный спор").

В-третьих, равновесие может оказаться доминируемой стратегией. Это показано в примере 1.1 ("Дилемма заключенного") или в следующем примере.

Пример 1.4.

	L	*C*	*R*
T	1, 1	0, 1	0, 1
M	0, 0	1, 0	0, 1
B	1, 0	0, 1	1, 0

В этой игре (T, L) – единственная ситуация, равновесная по Нэшу. Однако для первого игрока стратегия T доминируется стратегией B, а для второго игрока стратегия L доминируется стратегией R. После исключения доминируемых стратегий остается игра с нулевой суммой, в которой нет седловой пары.

Упражнения

1.1. Выписать множества допустимых стратегий и функции выигрыша игроков в игре «Семейный спор» (пример 1.2).

1.2. Найти множества недоминируемых стратегий обоих игроков в играх «Дилемма заключенного» и «Семейный спор» (примеры 1.1, 1.2).

1.3. Найти равновесие в доминантных стратегиях в игре «Дилемма заключенного». Существует ли равновесие в доминантных стратегиях в игре «Семейный спор»? А Парето-оптимальные исходы?

1.4. Доказать лемму 1.2.

1.5. Найти равновесия в доминантных стратегиях, Парето-оптимальные ситуации и осторожные стратегии в играх «Дилемма заключенного» и «Семейный спор», а также игре «Услуга за услугу»:

	Б	*Н*
Б	1 1	0 1
Н	1 0	0 0

1.6. Выяснить, являются ли существенными игры «Дилемма заключенного», «Семейный спор», «Услуга за услугу».

1.7. В следующих играх найти: ситуации равновесия по Нэшу; Парето-оптимальные ситуации; осторожные стратегии игроков.

	C	D
A	3 5	4 1
B	2 3	1 0

а

	C	D
A	2 3	3 2
B	4 1	5 6

б

1.8. Найти равновесия по Нэшу в следующих играх. Будут ли они оптимальными по Парето?

а)

	B_1	B_2
A_1	3 1	1 2
A_2	1 2	1 1

б)

	B_1	B_2
A_1	5 2	8 2
A_2	8 5	2 5

1.9. Провести анализ и интерпретацию для координационных игр (к ним относится и игра "Семейный спор")

а)

	SB	*CC*
SB	1 1	0 0
CC	0 0	1 1

б)

	SB	*CC*
SB	1 1	0 0
CC	0 0	2 2

а также игры "Дуэль"

	У	*Н*
У	1 1	0 2
Н	2 0	-1 -1

1.10. Выяснить вопрос о существовании цены в следующих играх:

-2	5	-3
-1	0	-1
-3	2	-2

а

1	0	0
0	2	0
0	0	3

б

1.11. Выполнить следующие задания: а) провести анализ игры "Орел и решка"

	О	*Р*
О	1 -1	-1 1
Р	-1 1	1 -1

Представить ее как антагонистическую игру. Существуют ли в ней седловые точки?

б) формализовать и проанализировать игру "камень-ножницы-бумага".

1.12. Рассмотреть следующий пример. Какие проблемы возникают при практическом использовании решений этой игры?

	L	*R*
T	9 10	8 9.9
B	10 10	-1000 9.9

Лекция 2. Устойчивость равновесий Нэша. Равновесие Штакельберга

В предыдущей лекции были рассмотрены матричные игры, в которых множества стратегий игроков дискретны и конечны. Изучим теперь случай, когда множества стратегий континуальны, а функции выигрыша непрерывны на соответствующих множествах ситуаций.

Теорема 2.1 (*Нэш*). Пусть для любого $i \in N$ множество стратегий X_i выпукло и компактно, а функция выигрыша u_i непрерывна и вогнута по x_i на X_i для всех $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Тогда множество NE равновесий Нэша игры $G = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} \right\rangle$ не пусто и компактно.

Для вычисления множества NE необходимо решить систему уравнений

$$u_i\left(x^*\right) = \max_{x_i \in X_i} u_i\left(x_i, x^*_{N\setminus i}\right). \qquad (2.1)$$

Если x_i – внутренняя точка множества X_i и функция u_i дифференцируема по x_i, то условия (2.1) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial u_i\left(x^*\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in N. \qquad (2.2)$$

Таким образом, для нахождения равновесия Нэша в этом случае надо решить систему (2.2).

Специфическая разновидность игр порождается наличием иерархии на множестве участников конфликта. Дадим предварительные сведения из теории иерархических игр, необходимые для дальнейшего изложения (подробнее см. часть 3). Рассмотрим иерархическую игру двух лиц в нормальной форме

$$G = \left\langle X_1, X_2, u_1, u_2 \right\rangle, \qquad (2.3)$$

где индексом 1 обозначен ведущий игрок (Ведущий), а индексом 2 – подчиненный (Ведомый), в соответствии с рис. 2.1.

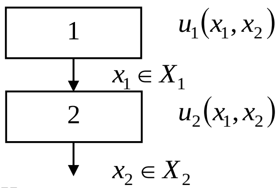

Рис. 2.1. Иерархическая игра двух лиц

Иерархия игроков означает право первого хода Ведущего. В силу постулата экономической рациональности иерархия гарантирует Ведущему выбор Ведомым своей стратегии из множества оптимальной реакции, или оптимальных ответов:

$$R_2(x_1) = \left\{ x_2 \in X_2 : u_2(x_1, x_2) = \sup_{y_2 \in X_2} u_2(x_1, y_2) \right\}. \tag{2.4}$$

Это обстоятельство весьма существенно: поскольку $\forall x_1 \in X_1 \quad R_2(x_1) \subseteq X_2$, а во многих практических случаях множество $R_2(x_1)$ состоит из единственной точки, то иерархия позволяет Ведущему предвидеть рациональный выбор Ведомого и использовать это в своих интересах в ходе конфликта.

Обозначим

$$BR_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times R_2(x_1)\} \tag{2.5}$$

график оптимальных реакций Ведомого на выбор Ведущим стратегии x_1. Наиболее распространенной концепцией оптимальности решения иерархической игры двух лиц (рис. 2.1) является 1-равновесие по Штакельбергу

$$(x_1, x_2) \in BR_2 : u_1(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in BR_2} u_1(y_1, y_2) \tag{2.6}$$

(аналогично определяется 2-равновесие по Штакельбергу).

Заметим, что величину S_1 выигрыша Ведущего в равновесии по Штакельбергу можно определить как

$$S_1 = \sup_{y_1 \in X_1} \sup_{y_2 \in R_2(x_1)} u_1(y_1, y_2), \tag{2.7}$$

что соответствует предположению о благожелательности Ведомого по отношению к Ведущему. Иначе говоря, если множество $R_2(x_1)$ содержит более одного элемента, то согласно (2.6) предполагается выбор Ведомым наиболее благоприятной для Ведущего стратегии из этого множества (для самого Ведомого все стратегии из $R_2(x_1)$ эквивалентны, $x_1 \in X_1$).

Таким образом, концепция равновесия по Штакельбергу основана на «оптимистической» оценке Ведущим мотивов поведения Ведомого – противоположный «пессимистический» подход лежит в основе распространенного в отечественной литературе принципа гарантированного результата Ю.Б. Гермейера (лекция 11). Максимальный гарантированный результат Ведущего в иерархической игре (2.3) есть

$$\gamma_1 = \sup_{y_1 \in X_1} \inf_{y_2 \in R_2(x_1)} u_1(y_1, y_2), \tag{2.8}$$

Пример 2.1. Рассмотрим игру «Услуга за услугу» из упражнения 1.6 как иерархическую. Тогда $S_1 = S_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Отметим, что в равновесии Нэша стратегии игроков представляют собой оптимальные ответы на равновесные стратегии других игроков:

$$x_i^{NE} = R_i(x_{N\setminus i}^{NE}),\ i \in N. \tag{2.9}$$

Если равновесные по Нэшу ситуации также оптимальны по Парето, то в игре возникает борьба за лидерство, что затрудняет выбор решения.

Пример 2.2 (игра «Дуэль»).

	У	Н
У	1; 1	1-ε; 2
Н	2; 1-ε	0; 0

Легко показать, что в этой игре $NE = \{(H, У), (У, H)\}$, причем обе эти ситуации также оптимальны по Парето. Поэтому каждый игрок стремится реализовать «наступательную» стратегию H, но если он видит такую же решимость со стороны противника, то вынужден «уступить» (выбрать стратегию $У$) во избежание попадания в катастрофическую ситуацию (H, H). Очевидно, борьба за лидерство возникает также в игре «Семейный спор».

Определение 2.1. В игре двух лиц G имеет место *борьба за лидерство*, если не существует такой ситуации x, для которой

$$u_i(x) \geq S_i,\quad i = 1,2, \tag{2.10}$$

где S_i – выигрыш игрока i в равновесии по Штакельбергу (2.7).

Лемма 2.1. Пусть игра G имеет по крайней мере две оптимальных по Парето и равновесных по Нэшу ситуации x^1, x^2 с различными векторами выигрышей:

$$\left(u_1(x^1), u_2(x^1)\right) \neq \left(u_1(x^2), u_2(x^2)\right). \tag{2.11}$$

Тогда в игре G имеет место борьба за лидерство.

Доказательство. Заметим, что в силу (2.9) $NE = BR_1 \cap BR_2$. Тогда по определению величины S_i имеем $x \in NE \Rightarrow u_i(x) \leq S_i$, $i = 1,2$. Если в игре G нет борьбы за лидерство, то найдется ситуация x, для которой справедлива формула (2.10), что означает $u_i(x^1) \leq S_i \leq u_i(x)$, $u_i(x^2) \leq S_i \leq u_i(x)$, $i = 1,2$. Поскольку x^1 и x^2 оптимальны по Парето, то все четыре неравенства должны обратиться в равенства, что противоречит предположению формулы (2.11).

Рассмотрим в качестве иллюстраций несколько моделей *дуополии*, т.е. экономической конкуренции двух фирм на рынке однородного товара.

Пример 2.3 (*дуополия Курно*). Две фирмы производят одинаковый товар в объемах $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$. Таким образом, множества стратегий игроков имеют вид $Q_1 = Q_2 = [0, \infty)$. Выпуск единицы товара требует затрат в размере $c > 0$. Цена на товар обратно пропорциональна суммарному объему выпуска: $p - q_1 - q_2$, где $p > c$. Тогда функции выигрыша можно записать в виде

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c - q_1 - q_2)q_1 \to \max, \; u_2(q_1, q_2) = (p - c - q_1 - q_2)q_2 \to \max .$$

Формула (2.2) приводит к системе уравнений

$$p - c - q_2 - 2q_1 = 0, \; p - c - q_1 - 2q_2 = 0,$$

откуда находим равновесие Нэша

$$q_1^{NE} = q_2^{NE} = \frac{p-c}{3} \tag{2.12}$$

Выигрыши игроков в этой ситуации равны

$$u_1^{NE} = u_2^{NE} = \frac{(p-c)^2}{9}. \tag{2.13}$$

Найдем теперь равновесие Штакельберга. При заданном объеме выпуска первой фирмы (Ведущего) вторая фирма (Ведомый) решает задачу оптимизации $u_2(q_2) = (p - c - q_1 - q_2)q_2 \to \max, \quad q_2 \geq 0$, решение которой есть $R_2(q_1) = q_2(q_1) = (p - c - q_1)/2$. Подставляя это выражение в функцию выигрыша Ведущего, получаем задачу оптимизации $\frac{1}{2}(p - c - q_1)q_1 \to \max, \quad q_1 \geq 0$, решение которой есть $q_1 = (p-c)/2$. Таким образом, равновесие Штакельберга в дуополии Курно имеет вид

$$q_1^{ST} = \frac{p-c}{2}, q_2^{ST} = \frac{p-c}{4}, \tag{2.14}$$

а выигрыши игроков в этой ситуации равны

$$u_1^{ST} = \frac{(p-c)^2}{8}, u_2^{ST} = \frac{(p-c)^2}{16}. \tag{2.15}$$

Наконец, найдем оптимальное по Парето коллективное решение. Для этого удобно обозначить $\bar{q} = q_1 + q_2, \bar{u} = u_1 + u_2$. Тогда очевидно, что Парето-оптимальные ситуации доставляют максимум суммарной функции суммарного аргумента $\bar{u}(\bar{q}) = (p - c - \bar{q})\bar{q}$, откуда находим множество Парето-оптимальных ситуаций $\bar{q}^{PO} = (p-c)/2$:

$$PO = \{(q_1, q_2) : q_1 + q_2 = (p-c)/2\}. \tag{2.16}$$

При этом суммарный выигрыш игроков равен $\bar{u}(\bar{q}^{PO}) = \frac{(p-c)^2}{4}$. Наиболее естественно выбрать в качестве окончательного решения игры симметричный Парето-оптимальный исход

$$q_1^{PO} = q_2^{PO} = \frac{p-c}{4}, \tag{2.17}$$

в котором выигрыши игроков также одинаковы:

$$u_1^{PO} = u_2^{PO} = \frac{(p-c)^2}{8}. \tag{2.18}$$

Соберем результаты (2.12)–(2.18) в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Сравнительный анализ принципов оптимальности в дуополии Курно

	Равновесие Нэша	Равновесие Штакельберга	Оптимум Парето
Решение игры	$\left(\frac{p-c}{3}, \frac{p-c}{3}\right)$	$\left(\frac{p-c}{2}, \frac{p-c}{4}\right)$	$\left(\frac{p-c}{4}, \frac{p-c}{4}\right)$
Выигрыш первого игрока	$u_1^{NE} = \frac{(p-c)^2}{9}$	$u_1^{ST} = \frac{(p-c)^2}{8}$	$u_1^{PO} = \frac{(p-c)^2}{8}$
Выигрыш второго игрока	$u_2^{NE} = \frac{(p-c)^2}{9}$	$u_2^{ST} = \frac{(p-c)^2}{16}$	$u_2^{PO} = \frac{(p-c)^2}{8}$
Суммарный выигрыш	$\bar{u}^{NE} = \frac{2(p-c)^2}{9}$	$\bar{u}^{ST} = \frac{3(p-c)^2}{16}$	$\bar{u}^{PO} = \frac{(p-c)^2}{4}$

Таким образом, в этой модели $\bar{u}^{PO} > \bar{u}^{NE} > \bar{u}^{ST}$, $u_1^{PO} = u_1^{ST} > u_1^{NE}$, $u_2^{PO} > u_2^{NE} > u_2^{ST}$. Кроме того, можно вычислить показатели $PA = \frac{\bar{u}^{NE}}{\bar{u}^{PO}} = \frac{8}{9}, \frac{\bar{u}^{ST}}{\bar{u}^{PO}} = \frac{3}{4}$, характеризующие общесистемные потери эффективности при изолированном и иерархическом поведении соответственно по сравнению с кооперацией игроков (потери тем больше, чем больше дробь отличается от единицы). Величина PA называется *ценой анархии*.

Пример 2.4 (дуополия Бертрана). Пусть теперь стратегиями фирм служат не объемы выпуска, а цены на единицу товара $p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0$. Таким образом, множества стратегий игроков $P_1 = P_2 = [0, \infty)$. После объявления цен на рынке складывается спрос на каждый товар

$$Q_1(p_1, p_2) = q - p_1 + kp_2,\ Q_2(p_1, p_2) = q - p_2 + kp_1,$$

где $q > 0$ – начальный спрос, а коэффициент $k < 2$ отражает взаимозаменяемость товаров. Если затраты на производство единицы товара по-прежнему равны $c > 0$, то функции выигрыша игроков можно записать как

$$u_1(p_1, p_2) = (q - p_1 + kp_2)(p_1 - c) \to \max,\quad u_2(p_1, p_2) = (q - p_2 + kp_1)(p_2 - c) \to \max .$$

Здесь формула (2.2) приводит к системе уравнений

$$q + c - 2p_1 + kp_2 = 0,\quad q = c - 2p_2 - kp_1 = 0,$$

откуда находим равновесие Нэша $p_1^{NE} = p_2^{NE} = \dfrac{q+c}{2-k}$.

Выигрыши игроков в этой ситуации равны $u_1^{NE} = u_2^{NE} = \left[\dfrac{q - c(1-k)}{2-k}\right]^2$.

Пример 2.5 (дуополия Хотеллинга). В этой модели учитывается местоположение фирм на рынке. В простейшем случае линейного рынка фирмы располагаются в точках x_1, x_2 отрезка $[0,1]$. Фирмы объявляют цены $c_1 > 0, c_2 > 0$ на один и тот же товар. Отдельный покупатель, находящийся в точке $x \in [x_1, x_2]$, сравнивает общие затраты на покупку в i-й фирме $L_i(x) = c_i + |x - x_i|,\ i = 1,2$, и выбирает ту из них, где суммарные затраты меньше. Тогда все покупатели разбиваются на два множества $[0, x)$ и $(x,1]$ тех, кто предпочитает фирму 1 или 2 соответственно. Граница x, разделяющая эти множества, определяется из условия $L_1(x) = L_2(x)$. Пусть без ограничения общности $x_1 < x < x_2$, тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}.$$

Функции выигрыша игроков можно записать в виде

$$u_1(c_1, c_2) = c_1 x = c_1\left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}\right] \to \max,\quad u_2(c_1, c_2) = c_2(1 - x) = c_2\left[1 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_2 - c_1}{2}\right] \to \max$$

Формула (2.2) приводит к системе уравнений

$$\frac{c_2 - c_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_1}{2} = 0,\quad 1 - \frac{c_2 - c_1}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_2}{2} = 0,$$

откуда находим равновесие Нэша $c_1^{NE} = \dfrac{2 + x_1 + x_2}{3},\quad c_2^{NE} = \dfrac{4 - x_1 - x_2}{3}$.

Выигрыши игроков в этой ситуации равны

$$u_1^{NE} = \frac{(2 + x_1 + x_2)^2}{18},\quad u_2^{NE} = \frac{(4 - x_1 - x_2)^2}{18}.$$

Равновесие Нэша можно интерпретировать как результат итерационного процесса, в котором каждый игрок максимизирует свой выигрыш, полагая стратегии остальных игроков фиксированными.

Пример 2.6 (устойчивость в дуополии Курно с назначением выпусков).

Рассмотрим модель Курно в следующем виде. Два игрока поставляют на рынок некоторые количества x_1 и x_2 одного и того же товара, цена на который определяется как $p(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$. Введем два различных предположения о функции затрат: а) постоянные затраты на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства: затраты на производство y единиц равны $\frac{y}{2}$ для обоих игроков; б) убывающие затраты на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства: затраты на производство y единиц равны $\frac{y}{2} - \frac{3y^2}{4}$ для обоих игроков. Максимальные производственные возможности обоих игроков равны $\frac{1}{2}$ (поэтому цена и затраты неотрицательны). В случае а) получаем следующую игру: $X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $u_i(x_1, x_2) = x_i(1 - x_1 - x_2) - \frac{x_i}{2}$, $i = 1,2$. Как известно, $NE = BR_1 \cap BR_2$. Для нахождения множества $R_2(x_1)$ нужно найти множество точек максимума функции $u_2(x_1, x_2)$ по x_2 при фиксированном x_1, т.е. решить уравнение $\frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$, откуда $x_2(x_1) = \frac{1}{4} - \frac{x_1}{2}$ – это и есть множество $R_2(x_1)$. Аналогично $R_1(x_2) = \left\{x_1 \in X_1 : x_1 = \frac{1}{4} - \frac{x_2}{2}\right\}$. Поэтому множество $NE = BR_1 \cap BR_2$ есть множество решений системы уравнений $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} - \frac{x_2}{2} \\ x_2 = \frac{1}{4} - \frac{x_1}{2} \end{cases}$, откуда находим единственную ситуацию равновесия Нэша $NE = \left\{\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)\right\}$.

Процедура нащупывания по Курно начинается из произвольной ситуации (x_1^0, x_2^0), причем каждый игрок последовательно использует наилучший ответ на стратегию партнера:

$$(x_1^0, x_2^0) \to (x_1^1, x_2^0) \in BR_1 \to (x_1^1, x_2^1) \in BR_2 \to \ldots \to (x_1^t, x_2^{t-1}) \in BR_1 \to (x_1^t, x_2^t) \in BR_2 \to \ldots \quad (2.19)$$

На рис. 2.2а) изображены две последовательности вида (2.19). Легко убедиться, что для любой начальной ситуации последовательность (2.19) сходится к ситуации $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, которая называется устойчивым равновесием Нэша.

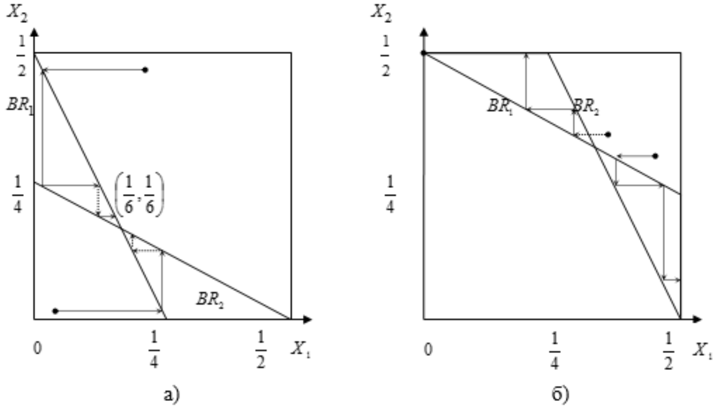

Рис. 2.2. Процедура нащупывания по Курно:
а) устойчивое равновесие Нэша; б) локально устойчивое и неустойчивое равновесие Нэша

Теперь рассмотрим случай б) убывающих затрат на выпуск единицы продукции. Получаем игру в нормальной форме

$$X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right],\ u_i(x_1, x_2) = x_i(1 - x_1 - x_2) - \frac{1}{2}x_i + \frac{3}{4}x_i^2,\ i = 1,2.$$

Можно показать, что в этой игре $R_j(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x_i \le \frac{1}{4}, \\ 1 - 2x_i, & \frac{1}{4} \le x_i \le \frac{1}{2}, \end{cases}$ $i, j = 1,2$.

Тогда получаем $NE = BR_1 \cap BR_2 = \left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}$. Из рис. 2.2б видно, что для любой ситуации $(x_1^0, x_2^0) \ne \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ последовательность (2.19) всегда сходится к $\left(\frac{1}{2},0\right)$ или $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. В этом случае естественно говорить, что $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ – неустойчивое равновесие Нэша, а $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},0\right)$ – локально устойчивые равновесия.

Определение 2.2. Пусть в игре в нормальной форме $G = \langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\rangle$ для всех $i \in N$ и всех $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$ существует единственная функция $r_i(x_{N\setminus i})$ такая, что

$$(r_i(x_{N\setminus i}), x_{N\setminus i}) \in BR_i. \tag{2.20}$$

С любой ситуацией $x^0 \in X$ связана процедура *одновременного нащупывания по Курно*, т.е. последовательность

$$x_i^t = r_i\left(x_{N\backslash i}^{t-1}\right),\ i \in N,\ t = 1, 2, \ldots \tag{2.21}$$

Равновесие Нэша x^{NE} *устойчиво* (глобально) в игре G, если для любой начальной ситуации $x^0 \in X$ последовательность (2.21) сходится к x^{NE}.

Равновесие Нэша *локально устойчиво* в игре G, если для каждого $i \in N$ существует окрестность V_i точки x_i^{NE} такая, что на множестве $V = V_1 \times \ldots \times V_n$ выполнено (2.20) и ситуация x^{NE} устойчива в усеченной игре $\langle N, \{V_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} \rangle$.

В противном случае равновесие Нэша *неустойчиво*.

Пример 2.7 (реклама в маркетинговом канале). Рассмотрим простой канал распределения, включающий производителя M и оптовика R. Пусть M выбирает маркетинговое усилие $a_M \geq 0$ на национальном уровне, а R – усилие $a_R \geq 0$ на локальном уровне. Реклама относится к некоторому бренду производителя. Предположим, что затраты на рекламу описываются квадратичными функциями $C_M(a_M) = \dfrac{w_M}{2} a_M^2$, $C_R(a_R) = \dfrac{w_R}{2} a_R^2$, а спрос на продукцию бренда при оптовых продажах равен

$$D(a_M, a_R) = \alpha + \beta(a_M + a_R),$$

где α, β – положительные параметры. В отсутствие рекламных усилий спрос находится на базовом уровне α. Предельная эффективность вложений в рекламу для обоих игроков равна β. Пусть цена производителя p_M и потребительская цена p_R фиксированы. Тогда задачи оптимизации для участников канала имеют вид

$$\max_{a_M \geq 0}\{J_M(a_M, a_R) = p_M[\alpha + \beta(a_M + a_R)] - \frac{w_M}{2} a_M^2\},$$

$$\max_{a_R \geq 0}\{J_R(a_M, a_R) = p_R[\alpha + \beta(a_M + a_R)] - \frac{w_R}{2} a_R^2\}.$$

Для иллюстрации проблемы неэффективности канала сравним координированные и некоординированные исходы. В некоординированном случае фирмы принимают решения одновременно и независимо, что приводит к равновесию Нэша. В координированном случае участники канала приходят к соглашению о максимизации суммарной прибыли, действуя как один игрок.

Начнем с некоординированного случая, считая, что $a_M > 0, a_R > 0$. Условия равновесия Нэша имеют вид