МАТЕМАТИКА

К. Б. Сабитов

Уравнения математической физики

Часть 2

Лаборатория ЗНАНИЙ

УДК 517.95
ББК 22.311
С12

Сабитов К. Б.

С12 Уравнения математической физики : учебник для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / К. Б. Сабитов. — 4-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 258 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-621-6 (Ч. 2)
ISBN 978-5-93208-643-8

В книге дан вывод уравнений математической физики, приведены классические постановки основных задач, аналитические методы их решения, представлены обобщенные по Соболеву решения краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов, вариационный и галеркинский методы решения краевых задач, методы интегральных преобразований, возмущений, автомодельных решений и конечных разностей решения краевых задач уравнений математической физики. В отличие от известных учебников данное пособие содержит новый материал по уравнениям смешанного типа, моделирующим околозвуковые течения.

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.95
ББК 22.311

ISBN 978-5-93208-621-6 (Ч. 2)
ISBN 978-5-93208-643-8

Оглавление

Список некоторых обозначений и сокращений 5

Глава 6. **Обобщенные решения по Соболеву краевых задач для уравнений математической физики** 7

§ 32. Вспомогательные сведения из функционального анализа . 7
1. Необходимые понятия и утверждения (7). 2. Средние функции. Обобщенные производные (11). 3. Пространство Соболева и его свойства (17).

§ 33. Обобщенные решения основных граничных задач для эллиптического уравнения второго порядка 26

§ 34. Обобщенные решения начально-граничных задач для гиперболического уравнения второго порядка. 33
1. Постановка начально-граничных задач (33). 2. Задача на собственные значения для эллиптического оператора второго порядка (34). 3. Вариационные свойства собственных значений и функций спектральной задачи (42). 4. Построение обобщенного решения первой начально-граничной задачи для однородного гиперболического уравнения (43). 5. Построение обобщенного решения первой начально-граничной задачи для неоднородного гиперболического уравнения (47).

§ 35. Обобщенные решения начально-граничных задач для параболического уравнения второго порядка. 49

§ 36. Вариационный метод решения граничных задач для эллиптических уравнений. 54
1. Задача Дирихле (54). 2. Задача Неймана и третья граничная задача (58). 3. Метод Ритца (59).

§ 37. Метод Галеркина решения краевых задач для уравнений математической физики 63
1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона (64). 2. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности (65). 3. Начально-граничная задача для волнового уравнения (67).

Глава 7. **Уравнения смешанного типа** 72

§ 38. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. Единственность решения 73
1. Постановка задачи Трикоми. Принцип экстремума. Единственность решения задачи Трикоми (73). 2. Метод Трикоми доказательства единственности решения задачи (76).

§ 39. Существование решения задачи Трикоми 77

§ 40. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева—Бицадзе в прямоугольной области 87
1. Постановка задачи (87). 2. Единственность решения (88). 3. Существование решения задачи (91). 4. Устойчивость решения (94).
§ 41. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа 95
1. Постановка задачи (95). 2. Единственность решения (96). 3. Существование и устойчивость решения задачи (99).
Глава 8. **Другие методы решения краевых задач для уравнений математической физики** 103
§ 42. Метод интегральных преобразований 103
1. Преобразования Лапласа, Фурье и Меллина (103). 2. Применение интегральных преобразований к решению краевых задач (114).
§ 43. Метод возмущений 122
§ 44. Метод подобия, автомодельные решения 125
§ 45. Метод конечных разностей или сеток 131
Приложение. **Общие сведения о специальных функциях** 145
Введение 145
§ 1. Эйлеровы гамма- и бета-функции 147
1. Свойства гамма-функции (148). 2. Свойства бета-функции (152). 3. Логарифмическая производная гамма-функции (154).
§ 2. Теорема существования и единственности решения начальной задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка 155
§ 3. Поведение решений дифференциальных уравнений второго порядка в особой точке 158
§ 4. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя и свойства функций Бесселя первого рода 160
§ 5. Модифицированные функции Бесселя 181
§ 6. Гипергеометрическое уравнение. Функции Гаусса и их свойства 186
§ 7. Ортогональные многочлены 198
1. Полиномы Лежандра и их свойства (198). 2. Присоединенные функции Лежандра и их свойства (208). 3. Многочлены Эрмита и их свойства (211). 4. Многочлены Лагерра и их свойства (217). 5. Многочлены Якоби и Чебышёва и их свойства (223).
§ 8. Сферические и шаровые функции. Свойства сферических функций 230
Задачи для самостоятельной работы 236
Список литературы 252

Глава 6

Обобщенные решения по Соболеву краевых задач для уравнений математической физики

§ 32. Вспомогательные сведения из функционального анализа

1. Необходимые понятия и утверждения

Будем предполагать, что читатели знакомы с основами функционального анализа. Здесь приведем только те понятия и утверждения, которые необходимы для дальнейшего изложения материала. В основном мы будем иметь дело с гильбертовыми пространствами.

В гильбертовом пространстве H для любой пары элементов u и v определено скалярное произведение (u, v), удовлетворяющее известным аксиомам. В качестве нормы элемента u берется число $||u|| = \sqrt{(u, u)}$. По определению пространство H является полным и сепарабельным. В пространстве H помимо сходимости по норме (сильной сходимости) рассматривают и слабую сходимость. Последовательность u_n элементов из H называется слабо сходящейся в H к элементу u, если $(u_n - u, v) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого элемента $v \in H$. Последовательность u_n не может слабо сходиться к двум различным элементам H. Если u_n сходится к u в норме H, то она сходится к u слабо. Обратное утверждение не верно.

Множество $E \subset H$ называется компактным в H, если всякая бесконечная последовательность элементов из E содержит в себе сходящуюся подпоследовательность. Если пределы всех таких подпоследовательностей принадлежат E, то E называется компактным в себе. Аналогично вводятся понятия слабой компактности и слабой компактности в себе в H. Имеет место следующий признак слабой компактности в H

Утверждение 1. *Замкнутое ограниченное множество в H слабо компактно в себе.*

Линейным функционалом l на H называется линейная непрерывная числовая функция $l(u)$, определенная для любого $u \in H$. Линейность l означает, что для любых элементов u_1 и u_2 из H и любых чисел λ и μ имеет место равенство

$$l(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda l(u_1) + \mu l(u_2).$$

Непрерывность $l(u)$ означает, что $l(u_n) \to lu$, если $u_n \to u$ по норме H.

Известно, что непрерывность линейного функционала $l(u)$ эквивалентна его ограниченности, т. е. существует постоянная $C > 0$, такая, что при всех $u \in H$ имеет место неравенство

$$|l(u)| \leqslant C||u||. \tag{1}$$

Для линейных функционалов на H справедливо следующее.

Утверждение 2 (Теорема Рисса). *Для любого линейного ограниченного функционала l на H существует единственный элемент $v \in H$, такой, что для всех $u \in H$ имеет место равенство*

$$l(u) = (u, v).$$

При этом величину $\|v\|$ называют нормой $\|l\|$ линейного функционала l. Норма $\|l\|$ находится по формуле

$$\|l\| = \sup_{H \in H} \frac{|l(u)|}{\|u\|}$$

и является нижней гранью значений постоянной C из неравенства (1).

Пусть функция $f(x)$ определена в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и K — множество точек области Ω, таких, что функция $f(x)$ равна нулю в некоторой окрестности каждой из точек K. Тогда множество $\Omega \setminus K$ называется *носителем функции* $f(x)$ и обозначается через $\operatorname{supp} f$.

Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначают класс бесконечно дифференцируемых в Ω функций, имеющих компактный носитель. Такие функции называются *финитными*, или *пробными функциями.* Если Ω — ограниченная область, то любая функция $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль во всех точках Ω, принадлежащих некоторой окрестности ее границы. Если $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$, то функция $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равно нулю вне некоторой конечной области и бесконечно дифференцируема в любой точке $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, множество измеримых по Лебегу функций $u(x)$, определенных на Ω, для которых интеграл Лебега

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Такое множество функций образует полное линейное нормированное пространство с нормой

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \tag{2}$$

т. е. *банахово пространство.*

Для функций из $L_p(\Omega)$ справедливы следующие замечательные неравенства.

Пусть $p > 1$ и обозначим через $q = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и для функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, $v(x) \in L_q(\Omega)$ имеет место неравенство Гёльдера

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)||v(x)|\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^q\,dx\right)^{1/q}. \qquad (3)$$

Если $p = 2$, то $q = 2$ и неравенство (3) переходит в неравенство Коши—Буняковского

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)||v(x)|\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (4)$$

Пусть $u(x) \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$. Тогда имеет место неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx \leqslant C_1 \left[\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \left(\int\limits_{\partial\Omega} u\,ds\right)^2\right], \qquad (5)$$

и неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx \leqslant C_2 \left[\left(\int\limits_{\Omega} u\,dx\right)^2 + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right], \qquad (6)$$

где C_i, $i = 1, 2,$ — положительные постоянные, зависящие только от меры области Ω.

Измеримая функция $u(x)$ называется *локально интегрируемой* (*суммируемой*) в Ω, если для любой подобласти Ω_1, такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, существует конечный интеграл

$$\int\limits_{\Omega_1} |u(x)| dx < \infty.$$

Класс таких функций обозначим $L_{1,loc}(\Omega)$.

Пусть функции $u_k(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ —

единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ (т. е. $N_i = \cos(N, x_i)$). Тогда справедлива из курса математического анализа формула Гаусса—Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) N_k\, dS, \tag{7}$$

где dS — элемент площади поверхности $\partial\Omega$.

Из формулы (7) вытекает формула интегрирования по частям. Пусть $u(x),\ v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} v\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} uvN_i dS, \tag{8}$$

Действительно, полагая в формуле (7) $u_k(x) = 0$ при $k \neq i$ и $u_i = uv$, получим (8).

2. Средние функции. Обобщенные производные

Ядром усреднения называется функция $\omega_h(x)$, заданная на $\mathbb{R}^n$, где $h \in \mathbb{R}^1$, $h > 0$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\omega_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при любом $h > 0$;

б) $\omega_h(x) = 0$ при $|x| > h$;

в) $\omega_h(x) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^n$;

г) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x)dx = 1$ при любом $h > 0$.

Примером такой функции является функция

$$\omega_h(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{h^2}{h^2-x^2}}, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geqslant h, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$C = \frac{1}{h^n}\left[\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-y^2}}\,dy\right]^{-1}.$$

Функция (9) удовлетворяет всем условиям а)–г).

Пусть $u(x)$ — локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция. Функция, определенная интегралом

$$u^h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y)u(y)dy \tag{10}$$

называется *средней функцией* от $u(x)$ с радиусом усреднения h.

Если функция $u(x)$ определена в области Ω и $u(x) \in L_1(\Omega)$, то при определении средней функции от $u(x)$ будем полагать, что $u(x) \equiv 0$ вне Ω, т. е. в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Тогда функция $u^h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, так как в интеграле (10) можно любое число раз дифференцировать по x.

Отметим свойства средних функций.

Теорема 1. *Пусть Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$.*

1. *Если $u(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$ и $u(x) = 0$ вне области Ω_1, такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, то $u^h(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ при $h < \delta$, где δ — расстояние между Ω_1 и $\partial\Omega$, и*

$$\|u^h\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)} \text{ и } \|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

2. *Если $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ и $u(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то $u^h(x) \to u(x)$ равномерно на Ω при $h \to 0$.*

Теорема 2. *Пусть K — компакт в Ω. Тогда существует функция $\omega(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1$ и $\omega(x) = 1$ в некоторой окрестности компакта K.*

Теорема 3 (разбиение единицы). *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и области $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ таковы, что $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_N$. Тогда существуют функции $\omega_i(x)$, $i = \overline{1, N}$, такие, что $\omega_i(x) \in C_0^\infty(\Omega_i)$, $\omega_i(x) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i(x) \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1$ в некоторой окрестности компакта K.*

Доказательство этих теорем можно найти в [29, гл. 1, с. 18–21].

Далее введем понятие *обобщенной производной* (о. п.) в смысле Соболева С. Л. [41], которое играет важную роль в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Оно позволяет расширить класс решений таких уравнений и привлечь для решения краевых задач методы функционального анализа.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, где α_i, $i = \overline{1, n}$ — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Обозначим

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = \overline{1, n}, \ D^\alpha u = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D^\alpha u = u \ \text{при} \ |\alpha| = 0.$$

Число $|\alpha|$ здесь называется *порядком производной* $D^\alpha u$.

Если функция $u(x) \in C^1(\Omega)$, то из формулы (8) получим

$$\int\limits_\Omega \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \tag{11}$$

для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Если $u(x) \in C^k(\Omega)$, то применяя формулу (11) интегрирования по частям k раз, будем иметь

$$\int\limits_\Omega \varphi(x) D^\alpha u(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \tag{12}$$

для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant k$.

Равенство (12) полагают за основу определения о. п. $D^\alpha u$ в том случае, когда классическая производная $D^\alpha u$ может и не существовать.

Определение. Функцию $v(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ будем называть *о. п. функции $u(x)$ в Ω порядка $|\alpha|$*, если для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \tag{13}$$

и обозначается тем же символом

$$v(x) = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Отметим, что в любой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ функция $D^\alpha u$ будет о. п. функции $u(x)$, так как функция $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и продолженная нулем вне Ω_1, будет принадлежать $C_0^\infty(\Omega)$.

Лемма 1. *Обобщенная производная от функции $u(x)$ определяется единственным образом с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Допустим, что для $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ существуют две функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ из $L_{1,loc}(\Omega)$, удовлетворяющие равенству (13) при любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда для любой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_1} v_1(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega_1} u(x) D^\alpha \varphi dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_1} v_2(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega_1} u(x) D^\alpha \varphi dx.$$

Вычитая одно из другого, получим

$$\int\limits_{\Omega_1} [v_1(x) - v_2(x)]\varphi(x)dx = 0, \;\; \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

В силу произвольности $\Omega_1 \subset \Omega$ и известной леммы из вариационного исчисления разность $v_1(x) - v_2(x) = 0$ почти всюду на Ω, т. е. $v_1(x) = v_2(x)$ на Ω с точностью до множества меры нуль. Следовательно функция $v_1(x)$ эквивалентна функции $v_2(x)$. ■

Лемма 2. *Если $u(x) \in C^k(\Omega)$, т. е. функция $u(x)$ имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно в каждой точке Ω, то она в Ω имеет о. п. порядка k, совпадающие с соответствующими классическими производными.*

Доказательство следует из интегрального тождества (13), которое получается путем интегрирования по частям k раз.

Обобщенные производные сохраняют не все свойства классических производных. Перечислим основные свойства о. п., вытекающие из их определения:

1) если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ имеют о. п. в Ω, то их алгебраическая сумма $C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$ также имеет о. п. в Ω, при этом

$$D^\alpha(C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)) = C_1 D^\alpha u_1(x) + C_2 D^\alpha u_2(x),$$

здесь C_1, C_2 — постоянные;

2) если $v(x)$ есть о. п. от функции $u(x)$ порядка l : $v(x) = D^l u$, а $\omega(x)$ есть обобщенная производная порядка k от функции $v(x)$, то $\omega(x)$ есть о. п. от функции $u(x)$ порядка $k+l$: $\omega(x) = D^{k+l}u(x)$;

3) о. п. $D^\alpha u$ не зависит от порядка дифференцирования;

4) если $u_k(x)$, $\dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2$, то существует о. п. $\dfrac{\partial (u_1 u_2)}{\partial x_i}$ и

$$\frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial x_i} = u_1(x)\,\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + u_2(x)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\,,\ i = \overline{1, n}.$$

Однако о. п. имеют свои особенности. В отличии от классической производной обобщенная производная $D^\alpha u$ порядка $|\alpha|$ определяется равенством (13) независимо от производных более низкого порядка. Приведем известный пример функции, имеющей о. п. 2-го порядка, но не имеющей о. п. 1-го порядка. Рассмотрим функцию

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

в области $\Omega = \{(x_1, x_2) : |x_i| < 1,\ i = 1, 2\}$, где $f(t)$ — функция Вейерштрасса непрерывная, не имеющая производной ни одной точке сегмента $[-1, 1]$. Ясно, что эта функция не имеет производной 2-го порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$, так как $u(x_1, x_2)$ не имеет производных 1-го порядка. Однако, существует о. п. вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ и она равна нулю в области Ω. В самом деле, при $\varphi(x_1, x_2) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_\Omega u(x_1, x_2)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\,dx_1 dx_2 =$$
$$= \int\limits_\Omega f(x_1)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\,dx_1 dx_2 + \int\limits_\Omega f(x_2)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\,dx_1 dx_2. \quad (14)$$

Рассмотрим по отдельности каждый из интегралов из правой части (как повторный):

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1dx_2 = \int\limits_{-1}^{1}\left(f(x_1)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_2\right)dx_1 = \\ = \int\limits_{-1}^{1} f(x_1)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\Big|_{x_2=-1}^{x_2=1} dx_1 = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega} f(x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1dx_2 = \int\limits_{-1}^{1}\left(f(x_2)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1\right)dx_2 = \\ = \int\limits_{-1}^{1} f(x_2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\Big|_{x_1=-1}^{x_1=1} dx_2 = 0.$$

Тогда равенство (14) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} u(x_1,x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1dx_2 = 0 = \int\limits_{\Omega} 0\cdot\varphi\,dx_1dx_2.$$

Следовательно, о. п. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$ существует и равна нулю.

Важным другим отличием о. п. от классических является то, что обобщенные производные имеют глобальный (интегральный) по всей области Ω характер и определяются с точностью до множества меры нуль.

Отметим также, что функция может иметь классическую производную почти всюду в области и не иметь о. п. в этой области, т. е. эти понятия не совпадают. В качестве примера рассмотрим на числовой прямой $\mathbb{R}^1$ ступенчатую функцию

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Эта функция бесконечно дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^1$, кроме точки $x = 0$, в которой функция $u(x)$ имеет разрыв первого рода. Однако она на $\mathbb{R}^1$ не имеет о. п. даже первого порядка, а на интервалах $\Omega_- = (-\infty, 0)$ и $\Omega_+ = (0, +\infty)$ имеет о. п., равную нулю.

Выясним, чему равна производная функции (15). Она определяет линейный функционал

$$(u, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx, \;\; \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1).$$

По определению о. п. вычислим

$$(u', \varphi) = -(u, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0),$$

так как $\varphi(x)$ имеет компактный носитель. Но с другой стороны

$$(u', \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Следовательно $u'(x) = \delta(x)$. Значит, производная ступенчатой функции (15) не является локальной интегрируемой функцией, а является обобщенной функцией [10, гл. 11].

Лемма 3. *Если* $u(x) \in L_1(\Omega)$ *имеет о. п.* $D_{x_i}u$ *в* Ω *и* $u(x) = \mathrm{const} = C$ *в* $\Omega_1 \subset \Omega$, *то* $D_{x_i}u(x) = 0$ *почти всюду в* Ω.

Доказательство. По определению о. п. для любой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ при любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_1)$

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\varphi(x)dx = -\int_{\Omega_1} u(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= -C\int_{\Omega_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = -C\int_{\delta\Omega_1} \varphi N_i ds = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\Omega_1 \subset \Omega$ следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ почти всюду в Ω. ■

Теорема 4. *Пусть* $u(x) \in L_1(\Omega)$ *и существует о. п.* $D^\alpha u \in L_1(\Omega)$. *Тогда для любой области* Ω_1, *такой, что* $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, *и любого* $h < \delta$, *где* δ — *расстояние между* Ω_1 *и* $\partial\Omega$, *справедливо равенство*

$$D^\alpha u^h(x) = (D^\alpha u)^h(x), \quad x \in \Omega_1, \tag{16}$$

т. е. о. п. от средней функции $u^h(x)$ *равна средней функции от о. п.* $D^\alpha u$, *и*

$$\|D^\alpha u^h - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega_1)} \to 0 \;\text{ при }\; h \to 0. \tag{17}$$

Доказательство. Из равенства (10) имеем

$$D_x^\alpha u^h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \omega_h(x-y)u(y)\,dy.$$

Поскольку $D_x^\alpha \omega_h(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y \omega_h(x-y)$ и $\omega_h(x-y) \in C_0^\infty(\Omega)$ при $x \in \overline{\Omega}$ и $h < \delta$, то основания определения обобщенной производной $D^\alpha u$, будем иметь равенство (16):

$$D_x^\alpha u^h(x) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_y^\alpha \omega_h(x-y) \cdot u(y) dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) D_y^\alpha u(y) dy = (D_x^\alpha u)^h(x).$$

Справедливость предела (17) следует из теоремы 1.

Справедливо обратное лемме 3 утверждение.

Лемма 4. *Если $u(x) \in L_1(\Omega)$ и обобщенная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ почти всюду в Ω, $i = \overline{1,n}$, то $u(x) = \mathrm{const}$ в Ω.*

Доказательство. В любой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ при малых $h > 0$ средние производные $u_{x_i}^h(x) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Тогда из (16) $(u^h)_{x_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$, т. е. это означает, что $u^h = \mathrm{const} = c(h)$ в Ω_1 для таких h. На основании теоремы 1 $\|u^h - u\|_{L_1(\Omega_1)} = \|c(h) - u\|_{L_1(\Omega_1)} \to 0$ при $h \to 0$. Поскольку $c(h) \to c = \mathrm{const}$ при $h \to 0$, то $u = c$ в Ω_1. В силу произвольности $\Omega_1 \subset \Omega$ функция $u(x) = \mathrm{const}$ в Ω. ■

Теорема 5. *Для существования о. п. $D^\alpha u$ функции $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ существовали постоянные C_1 и h_1, зависящие от Ω_1, такие что для всех $h < h_1$ выполняется неравенство*

$$\|D^\alpha u^h\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant C_1.$$

Теорема 6. *Если функция $u(x)$ имеет о. п. в областях Ω_1 и Ω_2 и объединение $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ является областью, то в Ω также существует обобщенная производная $D^\alpha u$.*

Доказательство теорем 5 и 6 можно найти в [24, с. 124–126].

3. Пространство Соболева и его свойства

Рассмотрим множество всех функций $u(x)$, заданных в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и для них выполнены условия:

а) $u(x) \in L_2(\Omega)$;

б) существуют о. п. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, в смысле Соболева и они принадлежат $L_2(\Omega)$. На этом множестве функций введем норму

$$||u|| = \left(\int\limits_{\Omega} \left[u^2(x) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right)^{1/2}. \tag{18}$$

Из условий а) и б) вытекает, что норма (18) на этом множестве функций существует и конечна. Такое множество функций с нормой (18) называется *пространством Соболева* и обозначается символом $W_2^1(\Omega)$; норму в нем пишут так: $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$. В $W_2^1(\Omega)$ можно ввести скалярное произведение: любым двум функциям u, v из $W_2^1(\Omega)$ можно сопоставить число

$$[u, v] = \int\limits_{\Omega} \left[u(x)v(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx,$$

которое обладает всеми свойствами скалярного произведения, и $[u, u] = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$.

Теорема 7. *Множество $W_2^1(\Omega)$ является полным метрическим пространством относительно нормы* (18).

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность функций $u_k(x) \in W_2^1(\Omega)$ и покажем, что она сходится по норме (18) к некоторой функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$. По определению фундаментальной последовательности имеем, что $\|u_{k+p}(x) - u_k(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$ при любом $p \in \mathbb{N}$. Тогда из определения нормы (18) имеем:

$$\|u_{k+p}(x) - u_k(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \left\| \frac{\partial u_{k+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0$$

при $k \to \infty$ при любом $p \in \mathbb{N}$. Как известно, $L_2(\Omega)$ — есть полное метрическое пространство, тогда существуют функции $u(x)$ и $\omega_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, такие, что $u(x)$, $\omega_i(x) \in L_2(\Omega)$ и

$$\|u_k - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \omega_i \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \tag{19}$$

при $k \to \infty$. Покажем, что $\omega_i(x) = \partial u / \partial x_i$ — о. п. функции $u(x)$ в смысле Соболева. По условию функции $u_k(x)$ имеют о. п. $\partial u_k / \partial x_i$

из $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$, тогда для функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i}\,\varphi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u_k(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx. \tag{20}$$

В силу сильной сходимости последовательностей $u_k(x)$, $\partial u_k/\partial x_i$ в $L_2(\Omega)$ (т. е. по норме (18)) вытекает их слабая сходимость:

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega u_k(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx,$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i}\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega \omega_i(x)\varphi(x)\,dx.$$

В силу этих пределов, переходя в равенстве (20) к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\int\limits_\Omega \omega_i(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Это тождество означает, что $\omega_i(x) = \partial u/\partial x_i$ является о. п. функции $u(x)$. Отсюда следует, что $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, так как $u(x)$, $\omega_i(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда из пределов (19) получим, что

$$\|u_k(x) - u(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k\to\infty. \qquad \blacksquare$$

По аналогии с пространством $W_2^1(\Omega)$ можно ввести пространство $W_p^l(\Omega)$, как множество всех функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, имеющих все о. п. до целого порядка l включительно, интегрируемые со степенью p, с нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|^p dx\right)^{1/p}. \tag{21}$$

Пространство $W_p^l(\Omega)$ является полным метрическим, т. е. банаховым, при $p=2$ оно является гильбертовым со скалярным произведением

$$[u,v]_{W_p^l(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} D^\alpha u D^\alpha v\right) dx.$$

Для краткости записи $W_2^l(\Omega)$ обозначают $H^l(\Omega)$. При $l = 1$, т. е. $W_2^1(\Omega)$, — через $H^1(\Omega)$.

Пространства Соболева с различными p, $l \geqslant 1$ можно было ввести как пополнение (замыкание) множества $C^\infty(\Omega)$ по норме (21). Такое замыкание определяет пространство $\widetilde{W}_p^l(\Omega)$. Но пространство $W_p^l(\Omega)$ шире, чем $\widetilde{W}_p^l(\Omega)$. Однако, для широкого класса областей Ω с кусочно-гладкой границей эти пространства совпадают. Это имеет место, например, для областей звездного типа, т. е. в них существует внутренняя точка, такая, что луч, исходящий из этой точки пересекает границу области только в одной точке.

Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (18) пространства $W_2^1(\Omega)$ называют пространством $\mathring{W}_2^1(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega)$.

Пространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ является собственным подпространством пространства $W_2^1(\Omega)$. Из его определения следует, что для любой функции $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ существует последовательность функций $v_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, такая, что

$$\|v_k - u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left[|v_k - u|^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \to 0$$

при $k \to \infty$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$\{u, v\} = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx, \tag{22}$$

порождающее норму, эквивалентной норме (18) пространства $W_2^1(\Omega)$.

Отметим, что две нормы $\|u\|_1$ и $\|u\|_2$ называются эквивалентными в линейном нормированном пространстве E, если для всех элементов $u \in E$ существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_2\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant C_1\|u\|_2.$$

Отсюда следует, что если последовательность u_k сходится в одной норме, то она сходится и в другой, эквивалентной ей.

Чтобы доказать, что скалярное произведение (22) порождает норму в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, эквивалентную норме (18) пространства $W_2^1(\Omega)$, установим неравенство Фридрихса для функций $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует положительная постоянная $C = C(\Omega)$, такая, что для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx \leqslant C(\Omega)\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = C(\Omega)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \qquad (23)$$

Доказательство. По определению пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ существует последовательность $u_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u_k(x) \to u(x)$ по норме $W_2^1(\Omega)$. Запишем неравенство Фридрихса (5) для функций $u_k(x)$ и переходя к пределу в этом неравенстве при $k \to \infty$, получим (23). ■

Введенные пространства $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ используются при решении краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, в частности, для уравнений Лапласа и Пуассона. Но при этом возникает вопрос о том, что в каком смысле будут удовлетворяться те или иные граничные условия для обобщенных решений на фиксированной $(n-1)$-мерной поверхности, например, на границе $\partial\Omega$ области Ω. Чтобы это объяснить, надо выяснить вопрос о следах функций $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ на поверхностях размерности $n-1$.

Напомним, что следом функции $u(x)\big|_S$ функции $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ на $n-1$-мерной поверхности $S \subset \overline{\Omega}$ будем называть функцию, определенной в каждой точке $x_0 \in S$ как предел

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0), \quad x \in \Omega,$$

т. е. под следом на S непрерывной функции понимается ее значения однозначно продолженные по непрерывности на всю поверхность S.

Пусть поверхность $S \in C^1$ и $S \subset \overline{\Omega}$, а S_1 — ее простая часть, однозначно проектирующаяся на некоторую область D плоскости $x_n = 0$, и заданная уравнением

$$x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x'), \quad \varphi(x') \geqslant 0, \quad \varphi(x') \in C^1(\overline{D}).$$

По условию область Ω ограничена, тогда будем считать, что она находится внутри куба $\{0 < x_i < d,\ i = \overline{1,n}\}$ стороной $d > 0$. Пусть функция $u(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ и положим ее равной нулю вне $\overline{\Omega}$. Тогда имеем

$$u(x)\big|_{S_1} = u(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Отсюда, на основании неравенства Коши—Буняковского, получим

$$\left|u\big|_{S_1}\right|^2 \leqslant \left(\int\limits_0^{\varphi(x')} 1^2\,dx_n\right)\int\limits_0^{\varphi(x')}\left(\frac{\partial u(x',x_n)}{\partial x_n}\right)^2 dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(x')\int\limits_0^{\varphi(x')}\left(\frac{\partial u(x',x_n)}{\partial x_n}\right)^2 dx_n \leqslant d\int\limits_0^{d}\left(\frac{\partial u(x',x_n)}{\partial x_n}\right)^2 dx_n.$$

Умножая это неравенство на элемент площади $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{p-1}}^2}$ и интегрируя по области D, найдем оценку

$$\|u\|^2_{L_2(S_1)} = \int\limits_{S_1}\left|u\big|_{S_1}\right|^2 dS \leqslant C^2\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{24}$$

с некоторой постоянной $C>0$, не зависящей от $u(x)$.

Поскольку поверхность S можно покрыть конечным числом простых частей типа S_1, то суммируя соответствующие им неравенства (24), получим неравенство

$$\|u\|^2_{L_2(S)} \leqslant C_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{25}$$

где постоянная $C_1>0$ и не зависит от функции $u(x)$.

Неравенство (25) имеет место и для функций из $C^1(\overline{\Omega})$. Для этого достаточно воспользоваться тем, что для любой функции $u(x)\in H^1(\Omega)$ существует финитное продолжение на более широкую область Ω', $\overline{\Omega}\subset\Omega'$, и воспользоваться неравенством (25).

Пусть теперь $u(x)\in H^1(\Omega)$. Тогда существует последовательность функций $u_k(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, сходящаяся к функции $u(x)$ по норме $H^1(\Omega)$, и для них справедливо неравенство (25). Напишем это неравенство для разности $u_k(x)-u_m(x)$:

$$\|u_k-u_m\|^2_{L_2(S)} \leqslant C_1\|u_k-u_m\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{26}$$

Поскольку $\|u_k-u_m\|^2_{H^1(\Omega)}\to 0$ при $k\to\infty$, $m\to\infty$, то из (26) следует, что $\|u_k-u_m\|^2_{L_2(S)}\to 0$ при $k, m\to\infty$, а это означает, что последовательность следов $u_k\big|_S$ функций $u_k(x)$ на S является фундаментальной. В силу полноты $L_2(S)$ эта последовательность следов