УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

О.В. Пугачёв

# ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ИНТЕГРАЛЫ

BAUMANPRESS
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 517.31
ББК 22.161.1
П88

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/95/book/33.html

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Прикладная математика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом*
*МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

*Рецензент*
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.А. Амосов*

**Пугачёв, О. В.**

П88 Лекции по математическому анализу. Интегралы : учебное пособие / О. В. Пугачёв. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 74, [6] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4102-0

Курс лекций (с задачами для самостоятельной работы) содержит следующие темы: неопределенные и определенные интегралы, геометрические и физические приложения определенных интегралов, несобственные интегралы.

Для студентов 1-го курса, обучающихся в высших технических учебных заведениях.

УДК 517.31
ББК 22.161.1



ISBN 978-5-7038-4102-0

## *Лекция №1*

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Определение 1.1.** Функция $F(x)$ называется **первообразной** или **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ x \in I\ F'(x) = f(x)$, и обозначается

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Если $F$ и $G$ — две первообразные $f$ на $I$, то $F - G = \text{const}$ на $I$. Действительно, если $(F-G)' \equiv 0$ на $I$, то по теореме Лагранжа при $a < b$, $a$, $b \in I$, имеем

$$(F-G)(b) - (F-G)(a) = (b-a)(F-G)'(c) = 0,$$

где $a < c < b$.

### Свойства неопределенных интегралов

**Линейность**.

$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

**Формула интегрирования по частям**. Если $f$ и $g$ дифференцируемы на $I$, то

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Эту формулу можно переписать так:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

**Замена переменного** (следствие формулы дифференцирования сложной функции). Пусть $\varphi(x)$ дифференцируема на $I$. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy\Big|_{y=\varphi(x)}.$$

**Метод подстановки.** Пусть $x = \xi(u)$, $\xi'$ сохраняет знак на $J$. Тогда функция $\xi$ биективно отображает промежуток $J$ в промежуток $I$, и первообразная $f(x)$ на $I$ может быть вычислена по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\xi(u))\xi'(u)du.$$

Следующие интегралы элементарных функций следует проверить дифференцированием и выучить наизусть:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x, \qquad a > 0,\ a \neq 1;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C; \qquad \int \sin x\, dx = C - \cos x;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = C - \operatorname{ctg} x;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + b}\right| + C, \qquad b \neq 0.$$

Интегралы сложных функций вычисляются с помощью свойств, перечисленных выше. Но успех не гарантирован!

**Определение 1.2. Неберущимися интегралами** называют первообразные элементарных функций, не являющиеся элементарными функциями.

Если интеграл сводится к неберущемуся, значит, он тоже неберущийся. Полезно знать наиболее известные примеры неберущихся интегралов, чтобы не потратить время на безуспешные попытки их выразить:

$$\int e^{\pm x^2}\,dx; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx; \quad \int \frac{e^x}{x}dx; \quad \int \frac{\ln(1+x)}{x}dx;$$

$$\int \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{1+ax^2}{1+bx^2}}\,dx, \qquad \begin{matrix} a\neq 0, \\ b\neq 0, \\ a\neq b. \end{matrix}$$

Рассмотрим примеры интегрирования при помощи замены переменного.

**Пример 1.1**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}dx = \quad [\text{замена} \;\; y = 3x+5 \Longrightarrow dy = 3dx]$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{y}}{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + C.$$

**Пример 1.2**

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{5-\cos^2 x}}dx = \int \frac{\cos x\; dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4+y^2}} =$$

$$[\text{замена: } y = \sin x \Longrightarrow dy = \cos x\,dx]$$

$$= \ln\left|y + \sqrt{4+y^2}\right| + C = \ln\left|\sin x + \sqrt{4+\sin^2 x}\right| + C.$$

**Пример 1.3**

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+90} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+3)^2+81} = \left[\begin{matrix}\text{замена} \\ y = x^2+3\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+81} = \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{y}{9} + C = \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{9} + C.$$

Теперь рассмотрим примеры интегрирования по частям.

**Пример 1.4**

Пусть $n \neq -1$.

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x\, d(x^{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^{n+1}\frac{dx}{x}\right) = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

**Пример 1.5**

В этом примере нужно 2 раза интегрировать по частям.

$$\int (x^2+x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+x)de^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x+1)dx\right) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{1}{4}\int (2x+1)de^{2x} =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{1}{4}\left((2x+1)e^{2x} - \int e^{2x}2dx\right) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}\left(2(x^2+x) - (2x+1) + 1\right) + C = \frac{x^2e^{2x}}{2} + C.$$

**Пример 1.6**

В этом примере тоже придется интегрировать по частям 2 раза, но здесь первообразная выразится сама через себя:

$$F(x) = \int e^x \sin 2x\ dx = \int \sin 2x\, d(e^x) =$$

$$= e^x \sin 2x - \int e^x\, d\sin 2x = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx =$$

$$= e^x \sin 2x - 2\int \cos 2x\, d(e^x) =$$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x + 2\int e^x\, d(\cos 2x) =$$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x dx =$$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4F(x) + C,$$

откуда получаем, перенеся $4F(x)$ в левую часть,

$$F(x) = \frac{1}{5}\big(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x\big) + C_1.$$

### *Задачи по теме лекции 1*

Вычислить неопределенные интегралы, выбрав замену переменного:

**1.1.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+1}}dx.$ **1.2.** $\displaystyle\int (x+2)^7 x\,dx.$

**1.3.** $\displaystyle\int xe^{-x^2/2}dx.$ **1.4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

**1.5.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x\,dx}{\cos^2 x}.$ **1.6.** $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$

**1.7.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2\ln x + 1}}{x}dx.$

В данных задачах применить интегрирование по частям:

**1.8.** $\displaystyle\int \arcsin x\,dx.$ **1.9.** $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

**1.10.** $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx.$ **1.11.** $\displaystyle\int x^3 e^x dx.$ **1.12.** $\displaystyle\int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx.$

# ОГЛАВЛЕНИЕ