СТРОИТЕЛЬСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Л. Мондрус, А.И. Каракозова, В.А. Смирнов

УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

ISBN 978-5-7264-3291-5

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2023

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2023

УДК 624.04
ББК 38.112
М77

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент *И.Л. Шубин*,
член-корреспондент РААСН, директор НИИСФ РААСН;
доктор технических наук, профессор *О.В. Кабанцев*,
директор научно-технических проектов, НИУ МГСУ

Мондрус, Владимир Львович.

М77 Устойчивость сооружений [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / В.Л. Мондрус, А.И. Каракозова, В.А. Смирнов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра строительной и теоретической механики. — Электрон. дан. и прогр. (6,0 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2023. — URL: http://lib.mgsu.ru. — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-7264-3291-5 (сетевое)
ISBN 978-5-7264-3292-2 (локальное)

В учебно-методическом пособии представлены основы теории устойчивости стержневых систем, описаны основные методы расчёта, рассмотрены расчёты на устойчивость стержней, рам, пластин и оболочек. Приводится ряд примеров решения простых задач, предлагаемых для самостоятельной работы.

Для обучающихся по направлениям подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений, 08.04.01 Строительство.

Учебное электронное издание

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2023

Оглавление

1. ИСТОРИЯ РАСЧЁТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ 5
2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ 11
2.1. Виды равновесия. Критическая нагрузка. Различные виды потери устойчивости 11
2.2. Степени свободы в задачах устойчивости. 13
2.3. Критерии устойчивости и методы определения критических сил 14
2.3.1. Динамический метод 14
2.3.2. Статический метод (метод Эйлера) 14
2.3.3. Энергетический метод 15
2.4. Устойчивость упругих систем с конечным числом степеней свободы 18
3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 20
3.1. Стержни постоянного сечения. Понятие о точном и приближённом решениях 20
3.2. Стержни с упруго-податливыми опорами 25
3.3. Дифференциальное уравнение равновесия четвёртого порядка 26
4. ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 28
4.1. Методы Ритца и Тимошенко 28
4.2. Метод Бубнова — Галёркина 30
4.3. Метод конечных разностей 32
5. СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 34
5.1. Устойчивость сжатого стержня при наличии поперечных нагрузок 34
5.2. Устойчивость прямых стержней при действии сжимающих сил, приложенных в пролёте 36
5.3. Устойчивость стержня, связанного с упругим основанием 39
5.4. Влияние деформации сдвига на критическую силу 42
5.5. Устойчивость составных стержней 44
6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАМ 47
6.1. Основные положения 47
6.2. Применение метода сил в исследовании устойчивости рам 47
6.3. Определение перемещений в задачах устойчивости рам 48
7. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК 51
7.1. Особенности потери устойчивости оболочек 51
7.2. Устойчивость пластин 53
7.3. Устойчивость оболочки в пределах упругости 54
8. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ 58
9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 60
9.1. Устойчивость систем с одной степенью свободы 60
9.2. Расчёт рам на устойчивость методом перемещений 69
9.3. Деформационный расчёт рам 77
Библиографический список 81

1. ИСТОРИЯ РАСЧЁТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Расчёт конструкций на устойчивость является одним из трёх основных расчётов строительной механики наряду с расчётами по прочности и жёсткости. Конструкции выходят из строя в основном либо из-за потери несущей способности (например, по материалу), либо из-за потери местной или общей устойчивости. Разрушение из-за потери несущей способности определяется прочностью материала, которая может быть пределом прочности или пределом текучести материала в зависимости от его вида (сталь, железобетон, композитные элементы, дерево и т.д.). Отказы из-за потери устойчивости конструкции или её элементов зависят от геометрии конструкции, её размеров и жёсткости. Важно понимать причины отказов конструкций из-за потери устойчивости, потому что использование более прочных материалов не всегда приводит к повышению надёжности. Большое количество несущих конструкций теряет устойчивость из-за более широкого использования высокопрочных материалов и увеличения габаритов таких конструкций, например: большепролётные мосты, высотные здания, обширные спортивные и общественные арены, большие резервуары для хранения жидкостей и газов, более крупные двигатели, турбины, моторы и т.д. Повышение размеров элементов приводит к увеличению их гибкости, так что эти элементы достигают своего предела устойчивости раньше, чем их прочность материала. Если взглянуть на требования современных нормативных документов, становится ясно, что во многих ситуациях максимальные силы, которые могут выдерживать элементы, определяются зачастую не столько несущей способностью, сколько устойчивостью.

В данном учебном пособии обращается внимание читателя на основные различия при вычислении несущей способности растянутых и сжатых стержней. Это связано с различными причинами их разрушения при растяжении и сжатии. Несущая способность стержня, работающего на растяжение, почти всегда ограничена его прочностью, тогда как несущая способность стержня, работающего на сжатие, в значительной степени связана с его гибкостью. Она может быть вычислена как из расчёта на прочность, так и из условий устойчивости. Как показывают результаты наблюдений, потеря устойчивости зачастую является основной причиной многих аварий и катастроф последних лет (см. рис. 1.1, *а*, *б*).



а *б*

Рис. 1.1. Потеря устойчивости сжатого элемента конструкции

Возникает интересный вопрос. Если прочность материала не превышена, то почему сжатый элемент выходит из строя? Все системы идут по пути наименьшего сопротивления, когда деформируются, что является основным законом природы. Например, тонкий длинный элемент легче согнуть, чем укоротить под действием сжимающей силы, что приводит к короблению элемента и потере устойчивости до того, как он выйдет из строя из-за превышения прочности его материала. Короткие же элементы легче укоротить, чем согнуть под действием сжимающей силы. На практике всегда существует тенденция тонкого элемента изгибаться вбок, даже если предполагаемая сила представляет собой осевое сжатие. Эта тенденция возникает из-за небольшого случайного эксцентриситета, непреднамеренной боковой возмущающей силы, несовершенств или других нарушений в элементе.

При малых сжимающих усилиях внутреннее сопротивление элемента изгибу превышает внешнее воздействие, заставляющее его изгибаться. По мере увеличения внешних сил достигается предельная нагрузка, при которой их опрокидывающее действие на изгиб превышает внутреннее сопротивление изгибу элемента. В результате происходит все больший изгиб системы, называемый потерей устойчивости. Максимальное сжимающее усилие, при котором элемент может оставаться в равновесии в прямолинейной конфигурации без изгиба, называется нагрузкой потери устойчивости. Система называется устойчивой, если малые возмущения вызывают малые деформации конфигурации системы. Равновесие со смещенной формой и энергетические методы являются двумя наиболее часто используемыми процедурами для решения проблемы потери устойчивости и для изучения устойчивости равновесия.

Леонард Эйлер создал теорию расчета гибких стержней, которые теряют устойчивость в упругой стадии работы материала, и в 1744 г. опубликовал разработанный им метод вариационного исчисления. Была получена форма изгиба стержня под действием различных сосредоточенных сил путем интегрирования точных дифференциальных уравнений упругих линий. Классической задачей, решённой им, является защемлённая у основания колонна, нагруженная на её верхнем свободном конце наклонной сжимающей силой. При решении задачи Эйлер также отметил, что при центральном сжатии силой F «колонна перестает сопротивляться изгибу».

В 1757 г. была издана новая статья, посвящённая исследованиям продольного изгиба сжатых стоек, где на основании упрощённых уравнений упругих линий стержня Эйлером был дан простой вывод формулы для определения критической нагрузки. Учёный заметил, что в момент потери устойчивости упругий стержень находился в состоянии индифферентного равновесия, то есть оставался как прямым, так и слегка согнутым.

Данное состояние стержня Эйлер обозначил «критическим», а действующую на него предельную нагрузку — «критической силой» ($F_{кр}$).

В настоящей статье Эйлер исследовал критическое поведение сжатого шарнирно закреплённого стержня с центрально приложенной нагрузкой. Он установил, что форма изогнутого стержня соответствует синусоиде, амплитуда которой — неопределённая величина, что позволяет извлечь выражение для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 C}{l^2}. \tag{1.1}$$

При этом коэффициент C в формуле (1.1) Эйлер наименовал «абсолютной упругостью» сжатого стержня и там же представил несколько вариантов его вычисления, а также указал его размерность — «произведение силы на квадрат длины».

В XVIII веке еще не существовало таких понятий, как момент инерции сечения и модуль упругости материала. Учёным и исследователям понадобилось еще сто лет, чтобы определить коэффициент C в этой формуле как жесткость EI стержня на изгиб. Около 50 лет формула почти не использовалась, однако к началу XX века накопился опыт расследования аварий строительных конструкций, где имела место внезапная потеря устойчивости сжатых элементов конструкций. Тогда исследование задач устойчивости сжатых стержней стало важной темой для учёных.

В конце XIX века Феликс Станиславович Ясинский, русский учёный-механик и инженер, исследуя устойчивость колонн, ввёл термин «приведённая длина стержня» и несколько преобразовал формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \tag{1.2}$$

Здесь μ — коэффициент приведения длины стержня l к длине полуволны его изгиба в критическом состоянии (μl — длина полуволны). Вывод этой формулы можно найти в главах настоящего пособия.

Исходя из того, что стержень в начальный момент потери устойчивости может быть прямым, Ясинский делит критическую силу на площадь поперечного сечения и с некоторыми преобразованиями получает формулу Эйлера для напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{1.3}$$

В формуле (1.3) λ — гибкость стержня (безразмерная величина). Её можно определить по формуле: $\lambda = \frac{\mu l}{i}$, где $i = \sqrt{I/A}$ — радиус инерции поперечного сечения стержня.

Формула (1.3) справедлива в случае постоянного модуля упругости E = const, то есть, как показано на рис. 1.2, при напряжениях, меньших предела пропорциональности, $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$, при этом $\lambda \geq \pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}$. Ясинский принял, что критическое напряжение равно пределу пропорциональности, и таким образом определил выражение для предельного значения упругой гибкости (λ_0). Как показали исследования, формула Эйлера справедлива для случая, когда гибкость стержня равна или превышает предельную упругую гибкость ($\lambda \geq \lambda_0$), то есть для стержней большой гибкости. Сталь, маркированная как С235, имеет $\lambda_0 = 100$. Для сталей повышенной прочности область применимости формулы Эйлера ограничена значением $\lambda_0 \approx 85$, а для алюминиевого сплава Д16Т с $\sigma_{пц} = 200$ МПа и $E = 75$ ГПа, $\lambda_0 \approx 60$. При этом опыты подтвердили, что для $\lambda < \lambda_0$ формула Эйлера даёт значения критических нагрузок, превышающих их действительные значения.

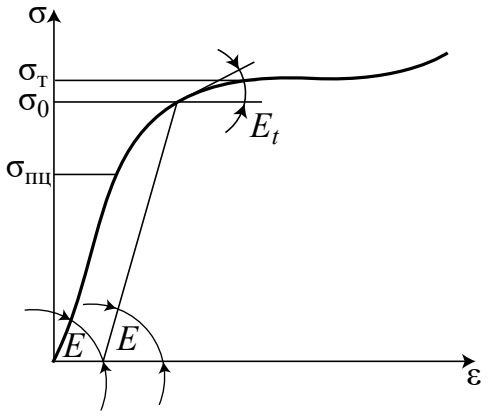


Рис. 1.2. Диаграмма упругопластической работы стали

В том случае, когда предел пропорциональности оказывается превышен, зависимость напряжения-деформации превращается в нелинейную, и следует обратиться к эмпирическим зависимостям. Ф.С. Ясинский предложил следующую формулу для определения критических напряжений за пределом пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \tag{1.4}$$

где a, b — константы, определяемые свойствами материала (МПа), их значения приведены в табл. 1.1; λ — гибкость стержня.

Таблица 1.1

Значения коэффициентов a, b, λ_0

Наименование материала	a, МПа	b, МПа	λ_1	λ_0
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь Ст4, Ст20	328	0,5	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Сплав Д16Т	406	1,83	30	53

У коротких стержней (при $0 < \lambda < 40…50$) разрушение происходит из-за достижения предела прочности при сжатии, следовательно, критические напряжения можно приравнять в этом случае к пределу пропорциональности.

Таким образом, зависимость критических напряжений от гибкости стержня можно изобразить так, как показано на рис. 1.3.

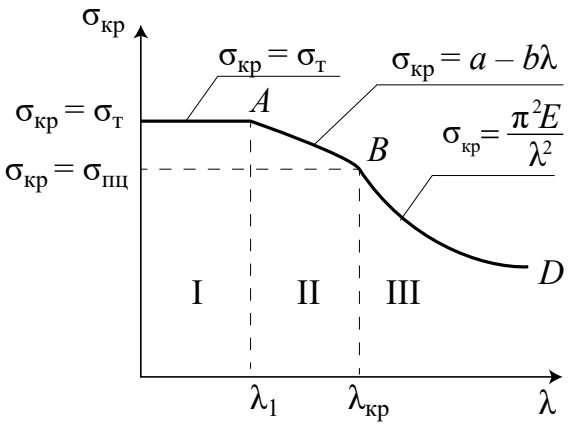


Рис. 1.3. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня

Рассмотрим классификацию сжатых стержней по гибкости.

1. Стержни большой гибкости ($\lambda > \lambda_0$) — расчёт на устойчивость проводят по формуле Эйлера (1.3).

2. Стержни средней гибкости ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$) — расчёт на устойчивость проводят по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского (1.4).

3. Стержни малой гибкости ($\lambda < \lambda_1$) — расчёт на устойчивость заменяют расчётом на прочность при сжатии. Критическое напряжение для них считается постоянным: $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$.

Опыт анализа причин катастроф строительных конструкций показывает, что практически в любой аварии имела место потеря устойчивости всей конструкцией или отдельными элементами (различают общую и местную потери устойчивости). Главная опасность разрушения конструкции вследствие потери устойчивости состоит в том, что она наступает внезапно, без предварительного развития значительных деформаций элемента, которые могли бы быть визуально определены и предотвращены. При достижении сжимающей силой критического значения достаточно малейшего воздействия в поперечном направлении, чтобы вывести стержень из строя. Состоящие обычно из тонких, длинных стержней или тонких, гибких пластин и оболочек именно металлические конструкции среди всех прочих видов инженерных конструкций наиболее подвержены потере устойчивости.

Целый ряд случайных причин может оказывать влияние на общую или местную (локальную) потерю устойчивости сжатых элементов: некорректная развязка сжатых балок при монтаже и эксплуатации, неправильная установка постоянных и временных арматурных соединений, а также наличие в конструкции случайно погнутых стержней, например, при

подъёме грузов с помощью верхних хорд ферм, как это часто случается, когда небольшие угловые профили стержневой конструкции изгибаются, вминаются или ломаются во время транспортировки и монтажа. Опорные конструкции, такие как фермы, арки и рамы, часто бывают неустойчивыми из-за недостаточного учёта переменных сил. Стержни в таких случаях должны быть рассчитаны и на растяжение, и на сжатие с продольным изгибом. Даже если продольное сжимающее усилие мало по сравнению с растягивающим усилием, оно может вызвать продольный изгиб элемента. Рассматриваемый элемент выйдет из строя, усилия перераспределятся, и конструкция окончательно разрушится.

В тонкостенных балочных конструкциях отдельные элементы могут плохо сопротивляться устойчивости к плоскостному изгибу, что окажется впоследствии причиной аварии. Авария (рис. 1.4) на Квебекском мосту (вторая по счёту за время его строительства) произошла в 1916 г. по причине потери устойчивости при изгибе-кручении в мостовой конструкции (по сути, пространственной ферме). Неверно запроектированные соединительные решётки моста стали причиной его первой аварии (в 1907 г.), хотя признаки потери устойчивости отдельных сжатых элементов были замечены задолго до аварии.

В 1953 г. произошла авария еще одной пространственной ферменной конструкции — разрушились две анкерно-угловых опоры козлового типа высотой 22,2 м при строительстве высоковольтной линии электропередач. Анализ последствий аварии показал, что устойчивость потеряли элементы сжатой опоры (рис. 1.5).

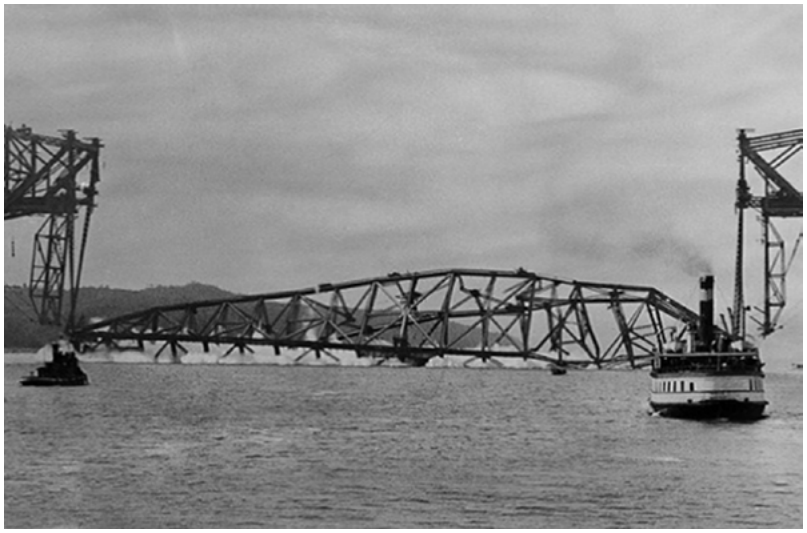


Рис. 1.4. Вторая авария
при сооружении моста в г. Квебек, Канада

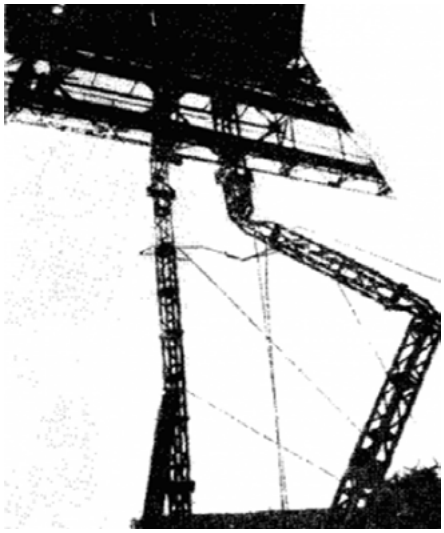


Рис. 1.5. Авария при строительстве
высоковольтной линии
электропередач

Решётка опоры была задумана по проекту неверно: местная гибкость отдельных элементов поясов оказалась больше общей гибкости всей опоры. Таким образом, в поясных элементах гибкость оказалась равной 78 (в пределах панели), а общая гибкость опоры — 66. Также имели место грубые ошибки проектирования (или изготовления) болтовых монтажных стыков: разница между размером отверстий под болты и диаметром самих болтов составила 2 мм.

Авария ещё одной протяжённой конструкции произошла в 1959 г. в Кургане в результате потери местной устойчивости оболочки. Телевизионная мачта высотой 182 м была запроектирована из трубы радиусом l,6 м, толщиной 8 мм, из стали Ст.ЗКП и имела три яруса оттяжек, закреплённых на отметке 54 м.

Чуть ниже места крепления оттяжек произошёл излом мачты с вмятием стенки внутрь ствола вследствие её местной потери устойчивости. Изучение сломанной конструкции показало, что в месте деформации за 3 дня до аварии возникли два местных разрыва шва длиной по 10 см, которые стали прогрессировать. Таким образом, деформация в зоне излома