

НГТУ НЭТИ
Факультет радиотехники и электроники

Е. И. АЛГАЗИН

ВВЕДЕНИЕ В КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

НОВОСИБИРСК
2022

УДК 517.938(075.8)
А 456

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *В. А. Хрусталев*
д-р техн. наук, профессор *В. П. Разинкин*

Работа выполнена на кафедре ЭЭ НГТУ
для магистрантов II года обучения РЭФ
специальности 11.04.04 – Электроника и наноэлектроника
профиль – Промышленная электроника и микросистемная техника

Алгазин Е. И.

А 456 Введение в качественный анализ динамических систем: учебное пособие / Е. И. Алгазин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2022. – 78 с.

ISBN 978-5-7782-4777-2

Настоящее учебное пособие содержит справочный материал по теории динамических систем и качественное исследование большого количества динамических систем.

Цель учебного пособия – показать эффективность методов и приемов качественного исследования динамических систем и одновременно естественность использования этой теории при рассмотрении математических моделей реальных систем.

Предназначено для магистрантов второго года обучения факультета радиоэлектроники.

УДК 517.938(075.8)

ISBN 978-5-7782-4777-2

© Алгазин Е. И., 2022
© Новосибирский государственный технический университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ 6

Глава 1. Общие сведения о динамической системе на плоскости 6

§ 1. Автономная динамическая система на плоскости 6

§ 2. Свойства решений системы (1.4) 7

§ 3. Геометрическая интерпретация системы (1.4) на фазовой плоскости x, y 8

§ 4. Сопоставление геометрической интерпретации системы (1.4) в пространстве x, y, t с интерпретацией на фазовой плоскости 10

§ 5. Терминология 11

§ 6. Направление на траекториях. Изменение параметризации 12

§ 7. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе 15

§ 8. Понятие интегральной кривой и интеграла в случае аналитических правых частей $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ системы (а) 17

Глава 2. Возможный характер отдельной траектории (теория Пуанкаре–Бендиксона). Особые траектории 19

§ 1. Дуга без контакта 20

§ 2. Цикл без контакта 22

§ 3. Предельная точка полутраектории и траектории. Предельная траектория 24

§ 4. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств 26

§ 5. Особые и неособые полутраектории и траектории 26

§ 6. Возможные типы особых и неособых траекторий 27

Глава 3. Исследование качественной структуры окрестности состояния равновесия (особой точки) 29

§ 1. Простые состояния равновесия (особые точки) 29

§ 2. Приведение динамической системы к каноническому виду 31
§ 3. Возможный характер простых состояний равновесия. Грубые состояния равновесия 33
§ 4. Замечания о грубых состояниях равновесия 34
Глава 4. Качественная структура окрестностей некоторых сложных состояний равновесия 36
§ 1. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия 36
§ 2. Сложное состояние равновесия (особая точка) с нулевыми характеристическими корнями 39
Глава 5. Функция последования. Простые и сложные предельные циклы 42
§ 1. Функция последования 42
§ 2. Условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки точечного отображения 45
§ 3. Функция соответствия 47
§ 4. Изучение окрестности замкнутой траектории. Простые и сложные предельные циклы 49
§ 5. Аналитические выражения для коэффициентов функции последования. Характеристический показатель замкнутой траектории 54
Глава 6. Примеры, поясняющие рассмотренные в главах 1–5 положения 58
Заключение 76
Библиографический список 77

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Глава 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. АВТОНОМНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА ПЛОСКОСТИ

Некоторые задачи механики и электротехники сводятся к исследованию одного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\ddot{x} = f(x,\ \dot{x},\ t) = 0\,. \tag{1.1}$$

Положим $\dot{x} = y$, поэтому $\ddot{x} = \dot{y}$. Таким образом, (1.1) сведется к системе

$$\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = f(x,\ y,\ t)\,. \tag{1.2}$$

Существуют задачи, при написании уравнений движения которых вводят обобщенные координаты и импульсы. С использованием уравнения Лагранжа можно получить систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x,\ y,\ t),\qquad \dot{y} = G(x,\ y,\ t)\,, \tag{1.3}$$

причем $F(x, y, t)$ необязательно равно y, как в случае (1.2).

В настоящей работе рассматривается частный случай системы (1.3), когда переменная t отсутствует в правых частях:

$$\dot{x} = P(x,\ y),\qquad \dot{y} = Q(x,\ y)\,. \tag{1.4}$$

Система, когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены на всей плоскости x, y (x, y – декартовы координаты) или в некоторой области G плоскости, называется *автономной динамической системой второго порядка*.

В настоящей работе принято, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются *аналитическими функциями* всякой точки в окрестности точки $M(x, y)$ – области определения динамической системы G, и они могут быть разложены в степенные ряды по переменным x и y.

§ 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1.4)

Приведем набор свойств, соответствующих системе (1.4), которые присущи системе, ввиду того что в правые части системы независимое переменное t не входит.

1. Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ есть решение (1.4), то и $x = \varphi(t + c)$, $y = \psi(t + c)$, где c – любая постоянная, также являются решениями этой системы.

Областью определения системы (1.2) является интервал (τ, T). Областью определения системы (1.3) является интервал $(\tau - c, T - c)$.

2. Решения

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

$$x = \varphi(t + c), \qquad y = \psi(t + c)$$

следует рассматривать как решения с одинаковыми начальными значениями x_0 и y_0, но различными начальными значениями t_0. Решения, у которых начальные значения x_0 и y_0 одинаковы, а t_0 различны, получают одно из другого заменой t на $t + c$ при определенных постоянных c.

3. Решение при $t = t_0$ со значениями x_0, y_0 может быть записано в виде

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0). \tag{1.5}$$

Решение (1.4) подразумевает $t - t_0$, а из (1.5) следует

$$\varphi(0, x_0, y_0) = x_0, \qquad \psi(0, x_0, y_0) = y_0.$$

Если считать x_0, y_0 и t_0 произвольными параметрами, то функции (1.5) называются *общим решением системы* (1.4). Если x_0, y_0 и t_0 фиксированы, то они называются *частным решением* (1.5).

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СИСТЕМЫ (1.4) НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ *x*, *y*

Основная геометрическая интерпретация системы (1.4) связана не с рассмотрением пространства t, x, y, а с рассмотрением плоскости x, y, которая называется *фазовой плоскостью*.

В каждой точке области G плоскости x, y, которая может совпадать со всей плоскостью, в которой определены правые части (1.4), рассмотрим вектор v с компонентами

$$P(x, y), \quad Q(x, y).$$

Автономная динамическая система (1.4) определяет в области G векторное поле. Поэтому система (1.4) называется также *динамической системой на плоскости*.

Если рассмотреть точки, в которых одновременно

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \tag{1.6}$$

то длина вектора обращается в нуль, а направление вектора становится неопределенным. Такие точки называются *особыми точками векторного поля*, или *особыми точками системы* (1.4).

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1.7}$$

есть какое-либо решение системы (1.4).

Множество точек

$$M(\varphi(t),\ \psi(t)),$$

где t принимает все значения, при которых определено решение (1.7), называется траекторией, соответствующей данному решению, или траекторией векторного поля, заданного динамической системой (1.4), а также фазовой траекторией (или просто траекторией данной динамической системы).

Очевидно, что уравнения (1.7) являются параметрическими уравнениями траектории, либо если существует какая-нибудь траектория, то решение, которому она соответствует, называется *решением, соответствующим данной траектории*.

В каждой точке $M(x, y)$ траектории L, не являющейся особой точкой векторного поля, вектор v с компонентами $P(x, y)$, $Q(x, y)$ является *касательным вектором* к траектории L (рис. 1.1).

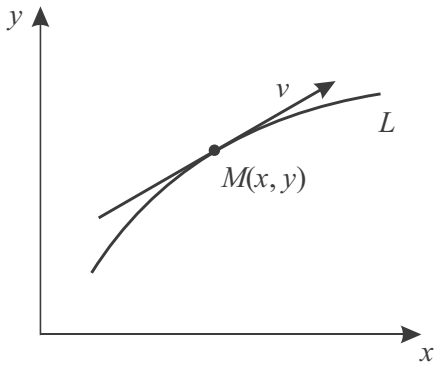


Рис. 1.1. Траектория L и касательный вектор v

Пусть $M_0(a,\ b)$ – особая точка системы (1.4), такая, что

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0.$$

Следовательно,

$$x = a, \quad y = b$$

есть решение системы (1.4), и поэтому особая точка сама является отдельной траекторией. Такая траектория называется *состоянием равновесия*.

Если траектория отлична от состояния равновесия, то вводится положительное направление движения (в сторону возрастания t). В каждой точке траектории это направление дается соответствующим касательным вектором $\dot{x} = P(x, y),\ \dot{y} = Q(x, y)$.