

С.М. Аполлонский

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЭКРАНИРУЮЩИХ ОБОЛОЧЕК

Монография

*Том 3. Инженерно-технические задачи
со сложными экранирующими конструкциями*

RU
science
RU-SCIENCE.COM

Москва
2024

УДК 621.31
ББК 31.2
А76

Рецензенты:

- Ю.П. Коськин**, научный консультант ООО «Центр электромеханотроники», д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ,
В.В. Фёдоров, проф. кафедры «Теоретические основы электротехники» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (СПбГЭУ), д-р техн. наук, проф.

Аполлонский, Станислав Михайлович.

А76

Аналитическое моделирование при исследовании экранирующих оболочек. Т. 3. Инженерно-технические задачи со сложными экранирующими конструкциями : монография / С.М. Аполлонский. — Москва : РУСАЙНС, 2024. — 296 с.

ISBN 978-5-466-05156-8

В третьем томе монографии наряду с результатами аналитических исследований приведены результаты численного и реального эксперимента для ряда сложных экранирующих конструкций.

Изложение материала книги проведено с единой методологической позиции, доступной для широкой аудитории специалистов, знакомых с теоретическими основами электротехники в объёме университетского курса.

Книга рассчитана на научных и инженерно-технических работников, занимающихся расчетами экранирующих систем для снижения напряженностей ЭМП помех при решении задач электромагнитной безопасности технических средств и биообъектов.

Материал монографии может быть использован разработчиками сложных экранирующих конструкций, при научных исследованиях и в учебном процессе при обучении студентов электротехнических специальностей, изучающих дисциплины, связанные с электромагнитной безопасностью элементов электроэнергетики.

Ключевые слова: стационарное и импульсное электромагнитное поле, электромагнитная совместимость, электромагнитная безопасность, расчёты коэффициентов экранирования металлических конструкций, замкнутые и разомкнутые экраны, однородные и неоднородные по параметрам экраны.

УДК 621.31
ББК 31.2

ISBN 978-5-466-05156-8

© Аполлонский С.М., 2024
© ООО «РУСАЙНС», 2024

Содержание

Введение	6
----------------	---

Раздел IV. Расчёт экранирующих конструкций, ограниченных поверхностями второго порядка

Глава 17. Расчёт эффективности однослойных экранирующих конструкций с геометрическими неоднородностями	8
--	---

17.1. Однослойные экраны в однородных постоянных МП	8
17.2. Однослойные экраны в однородных ЭМП	28
17.3. Однослойные экраны в неоднородных ЭМП	42

Глава 18. Расчёт эффективности однослойных экранирующих конструкций с параметрическими неоднородностями	44
---	----

18.1. Особенности расчёта экранов с переменными параметрами	44
18.2. Расчёт экрана с переменными параметрами по поверхности	49
18.3. Расчёт экрана с переменными параметрами по толщине	54
18.4. Расчёт анизотропных экранов	67
18.4.1. Сферические экраны	67
18.4.2. Круговые цилиндрические экраны	73
18.4.3. Плоские экраны	79
19.2. Сферические оболочки	95
19.3. Неоднородные по магнитным параметрам оболочки	101
19.4. Однородные по электромагнитным параметрам оболочки	103
19.5. Однослойная оболочка с металлическим включением в полости	105

Глава 20. Методы расчёта эффективности многослойных экранирующих конструкций, ограниченных неоднотипными поверхностями второго порядка	109
--	-----

20.1. Общий метод расчёта	109
20.2. Экранирующая структура, составленная из круговой цилиндрической и сферической	120
20.3. Экранирующая структура, составленная из плоской и сферической	129

Раздел V. Расчёт незамкнутых экранирующих конструкций	137
Глава 21. Сумматорные уравнения при решении задач экранирования.....	137
21.1. Общие сведения о сумматорных уравнениях	137
21.2. Сумматорные уравнения двухмерных и трехмерных задач дифракции	145
21.2.1. Сумматорные уравнения двухмерных задач дифракции... 146	
21.2.2. Сумматорные уравнения трехмерных задач дифракции ... 148	
21.3. О разрешимости некоторых задач теории экранирования полей системой незамкнутых экранов.....	169
Глава 22. Исследование низкочастотных ЭМП в сложных экранирующих структурах.....	171
22.1. Низкочастотные ЭМП в сложных экранирующих структурах 171	
22.2. Расчёт функций экранирования рекомендуемых экранирующих устройств.....	180
22.2.1. Экранирование низкочастотного МП системой экранов: тонкостенная проводящая сферическая оболочка – идеально тонкая незамкнутая эллипсоидальная оболочка.....	180
22.2.2. Экранирование низкочастотных ЭП системой экранов: тонкая незамкнутая эллипсоидальная оболочка - тонкостенный проницаемый цилиндр.....	191
22.2.3. Проникновение низкочастотного ЭП через тонкостенный диск.....	203
Раздел VI. Расчёт экранирующих конструкций, при решении задач электромагнитной безопасности в техносфере.....	215
Глава 23. Расчёт статических и квазистатических ЭМП в воздушной среде при наличии экранирующих конструкций.....	215
23.1. Оценка влияния металлических структур на характеристики электромагнитной среды урбанизированного пространства.....	215
23.1.1. Особенности ЭМП в воздушной среде урбанизированного пространства при наличии кровельного железа.....	216
23.1.2. Активно-пассивные ретрансляторы как источники широкополосных помех	227
23.1.3. Оценка влияния на ЭМП воздушной среды сплошных металлических структур.....	233
23.1.4. Анализ полученных результатов	239

23.2. Магнитные напряженности ЭМП в воздушной среде на железной дороге при наличии составов с цистернами	240
23.2.1. Постановка задачи.....	241
23.2.2. Метод решения.....	243
23.2.3. Особенности учета нескольких тяговых сетей.....	246
23.2.4. Результаты расчетов	247
Глава 24. Расчёт импульсных ЭМП при наличии экранирующих конструкций	252
24.1. Общие принципы расчёта характеристик экранирующих конструкций при воздействии импульсных ЭМП.....	252
24.2. Однородные экранирующие конструкции при воздействии импульсных ЭМП.....	253
24.3. Неоднородные экранирующие конструкции при воздействии импульсных ЭМП.....	259
24.4. Экранирование магнитного импульса пленочным многослойным экраном с чередующимися магнитными и немагнитными слоями ..	268
Библиографический список к тому 3	281
Приложение.....	300

Введение

Материал третьего тома включает два раздела.

Раздел IV под названием «Расчёт экранирующих конструкций, ограниченных поверхностями второго порядка» включает четыре главы. В главе 17 под названием «Расчёт эффективности однослойных экранирующих конструкций с геометрическими неоднородностями» рассмотрены: однослойные экраны в однородных постоянных магнитных полях (МП); однослойные экраны в однородных электромагнитных полях (ЭМП); однослойные экраны в неоднородных ЭМП. В главе 18 под названием «Методы расчёта эффективности однослойных экранирующих конструкций с параметрическими неоднородностями» рассмотрены следующие вопросы: особенности расчёта экранов с переменными параметрами; расчёты экранов с переменными параметрами по поверхности и по толщине; расчёты анизотропных экранов, ограниченных поверхностями второго порядка. В главе 19 под названием «Методы расчёта эффективности многослойных экранирующих конструкций, ограниченных однотипными поверхностями второго порядка» рассмотрены однородные и неоднородные по магнитным параметрам оболочки, а также и однослойные оболочки с металлическим включением в полости. В главе 20 под названием «Методы расчёта эффективности многослойных экранирующих конструкций, ограниченных не однотипными поверхностями второго порядка» рассмотрены: экранирующая структура, составленная из круговой цилиндрической и сферической, и экранирующая структура, составленная из плоской и сферической.

Раздел V под названием «Расчёт незамкнутых экранирующих конструкций» включает четыре главы. В главе 21 под названием «Сумматорные уравнения при решении задач экранирования» рассмотрены следующие вопросы: общие сведения о сумматорных уравнениях; сумматорные уравнения двухмерных и трехмерных задач дифракции, а также разрешимости некоторых задач теории экранирования полей системой незамкнутых экранов. В главе 22 под названием «Исследование низкочастотных ЭМП в сложных экранирующих структурах» рассчитаны функции экранирования конкретных экранирующих устройств: низкочастотного МП системой экранов: тонкостенная проводящая сферическая оболочка – идеально тонкая незамкнутая эллипсоидальная оболочка; низкочастотных ЭП системой экранов: тонкая незамкнутая эллипсоидальная оболочка - тонкостенный проницаемый цилиндр; низкочастотного ЭП, проходящего через тонкостенный диск.

В главе 23 под названием «Расчёт статических и квазистатических ЭМП в воздушной среде при наличии экранирующих конструкций» рассмотрены следующие вопросы: проведена оценка влияния металлических структур на характеристики электромагнитной среды урбанизированного пространства (кровельного железа, сплошных металлических структур, активно-пассивных ретрансляторов); исследовано воздействие на величину магнитных напряженностей ЭМП в воздушной среде на железной дороге при наличии составов с цистернами. В главе 24 под названием «Расчёт импульсных ЭМП при наличии экранирующих конструкций» рассмотрены общие принципы расчёта характеристик экранирующих конструкций при воздействии импульсных ЭМП (в однородных и неоднородных экранирующих конструкциях, при экранировании магнитного импульса пленочным многослойным экраном с чередующимися магнитными и немагнитными слоями).

Раздел IV. Расчёт экранирующих конструкций, ограниченных поверхностями второго порядка

Глава 17. Расчёт эффективности однослойных экранирующих конструкций с геометрическими неоднородностями

17.1. Однослойные экраны в однородных постоянных МП

Эллипсоиды трехосные. Поверхность, описываемая уравнением $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$, называется эллипсоидом, где a, b, c - полуоси. Если все три величины a, b, c различны, то эллипсоид называется трехосным. Эллипсоидальный экран представляет собой оболочку, ограниченную двумя эллиптическими поверхностями (рис. 17.1) с полуосями: a, b, c - внешние; a_1, b_1, c_1 - внутренние. При этом возможны два случая:

- два эллипсоида (внешний и внутренний) конфокальны (толщина стенок уменьшается к полюсам); условие конфокальности эллипсоидов означает, что $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2 = c^2 - c_1^2 = d^2$, где d^2 - параметр, определяющий их взаимное положение;

- два эллипсоида неконфокальны, но выбраны так, что толщина стенки оболочки постоянна.

В дальнейшем рассматриваем оболочку с конфокальными эллипсоидальными поверхностями на базе работы [17.1]. Магнитная проницаемость оболочки соответствует μ_1 и среды вне и внутри оболочки - μ_0 .

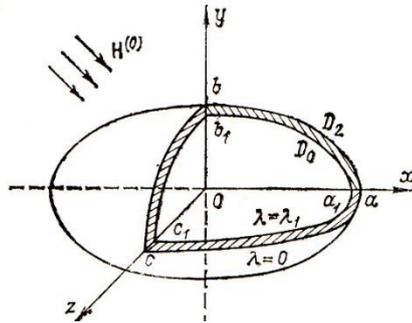


Рис. 17.1. Трехосный эллипсоид

Внешнее помехонесущее МП напряженностью $\vec{H}^{(0)}$ предполагается однородным и в общем случае направленным произвольно относительно осей эллипсоидов, совмещенных с декартовой системой координат (x, y, z) - рис. 17.1. В системе ортогональных координат (λ, μ, ν) произвольная точка пространства является точкой пересечения конфокальных трехосных эллипсоидов $(\lambda = \lambda_k)$, однополостных $(\mu = \mu_k)$ и двух-полостных $(\nu = \nu_k)$ гиперболоидов, где λ_k, μ_k, ν_k - фиксированные значения. При этом $\lambda = 0$ соответствует внешней поверхности экрана, а $\lambda = \lambda_1 = -d^2$ - внутренней. Расчет внутреннего МП напряженностью $\vec{H}^{(i)}$ сводится при отмеченных условиях к решению уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах относительно скалярного магнитного потенциала V в трех областях.

Поле напряженностью $\vec{H}^{(i)}$ так же, как и исходное поле напряженностью $\vec{H}^{(0)}$, однородно. Сравнивая между собой отдельные составляющие напряженности полей $\vec{H}^{(i)}$ и $\vec{H}^{(0)}$ по осям x, y, z (или их потенциалы), определим эффективность экранирования параллельно этим осям:

$$\mathcal{E}_q^{\mathcal{M}(1)} = \vec{H}_q^{(0)} / \vec{H}_q^{(i)}, \quad q = a, b, c. \quad (17.1)$$

После решения уравнения Лапласа с условиями [17.5]:

$$\begin{aligned} \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial q_1} \Big|_{q_1=\xi} &= \mu_j \frac{\partial v_j}{\partial q_1} \Big|_{q_1=\xi} + \eta_m^{jk}; \quad \frac{\partial v_j}{\partial q_2} \Big|_{q_1=\xi} = \frac{\partial v_k}{\partial q_2} \Big|_{q_1=\xi}; \\ \frac{\partial v_j}{\partial q_3} \Big|_{q_1=\xi} &= \frac{\partial v_k}{\partial q_3} \Big|_{q_1=\xi}, \quad v_j(M) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где η_m^{jk} - поверхностная плотность фиктивных магнитных масс на поверхности $\Gamma_{jk}(q_1 = \xi)$ ($q_1 = \xi$): $\eta_m^{jk} = (\mu_k - \mu_j)(\vec{H}^{(0)}, \vec{n}_j)$, \vec{n}_j - единичный вектор, нормальный к поверхности Γ_{jk} ; q_1, q_2, q_3 - система ортогональных криволинейных координат; k, j - индексы принадлежности к средам D_k и D_j соответственно,

получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_q^{\mathfrak{A}L(1)} &= 1 + N_q \left[(1 - N_q)(V_{\mathfrak{A}K} / V) + (N_q - N_{q_1}) \right] \times \\ &\times (v_{1,0} + v_{0,1} - 2) + (N_q - N_{q_1})(1 - v_{1,0}), \end{aligned} \quad (17.2)$$

где

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{abc}{(a^2 - b^2)^{3/2}} [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)]; \\ N_b &= abc \left[\frac{1}{(a^2 - b^2)^{0,5} (b^2 - c^2)} E(\varphi, k) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{0,5}} F(\varphi, k) - \frac{c}{ab(a^2 - c^2)} \right]; \quad (17.3) \\ N_c &= abc \left[\frac{b}{ac(b^2 - a^2)} F(\varphi, k) - \frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)^{0,5}} E(\varphi, k) \right]; \end{aligned}$$

$N_q (q = a, b, c)$ - коэффициенты размагничивания по полуосям q ; $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ - эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = \left[(a^2 - b^2) / (a^2 - c^2) \right]^{0,5}$ и аргументом $\varphi = \arcsin \left[1 - (c^2 / a^2) \right]^{0,5}$; $V = (4\pi / 3) abc$ - объем внешнего эллипсоида; $V_{ЭК} = (4\pi / 3) (abc - a_1 b_1 c_1)$ - объем экрана. Формула (17.2) применима для сферических, сфероидальных и бесконечно протяженных круговых цилиндрических экранов, которые можно рассматривать как частные случаи эллипсоидальных. Так, для сферы вследствие изотропии ее формы с учетом

$$N_a + N_b + N_c = 1 \quad (17.4)$$

и коэффициентов размагничивания внутреннего эллипсоида N_{a_1} , N_{b_1} , N_{c_1} , определяемых из формул (17.3) заменой a, b, c на a_1, b_1, c_1 , получим $N_q = N_{q_1} = 1/3$, и из выражения (17.2) получим формулу (2-25а). Для кругового цилиндра с осями $a \rightarrow \infty$, $b = c$ получим $N_a = N_{a_1} = 0$; $N_b = N_c = N_{b_1} = N_{c_1} = 1/2$, и из выражения (17.2) следует формула для эффективности экранирования круговым цилиндром в перпендикулярном оси цилиндра поле [17.5].

Для эллипсоидальных экранов, граничные поверхности которых образованы конфокальными эллипсоидами, коэффициенты размагничивания по одним и тем же осям для внешнего и внутреннего эллипсоидов в общем случае не равны друг другу. Однако для многих практически используемых экранов соотношения между размерами внешних и внутренних эллипсоидов таковы, что $|N_q - N_{q_1}| \ll (1 - N_q)(V_{ЭК} / V)$. В этих случаях можно пренебречь разностью $N_q - N_{q_1}$ в формуле (17.2) для тонких экранов с конфокальными граничными эллипсоидами: $\Delta_a / a < \Delta_b / b < \Delta_c / c \ll 1$, где $\Delta_a = a - a_1$; $\Delta_b = b - b_1$; $\Delta_c = c - c_1$ - толщины стенок вдоль соответствующих осей. При соблюдении указанных условий получим из (17.2) еще более простую формулу для эффективности экранирования:

$$\mathcal{E}_q^{\text{эл}(1)} = 1 + N_q \left[(1 - N_q) (V_{\text{ЭК}} / V) \right] (\mathbf{v}_{1,0} + \mathbf{v}_{0,1} - 2). \quad (17.5)$$

Формулу (17.5) можно использовать для расчета эффективности экранирования эллипсоидальными экранами с граничными поверхностями, образованными не конфокальными, а «подобными» эллипсоидами, у которых соблюдается соотношение $\Delta_a / a = \Delta_b / b = \Delta_c / c$. У «подобных» эллипсоидов разность $N_q - N_{q_1}$ для всех q равна нулю при любых соотношениях между толщиной вдоль оси и размером полуоси. Приближение состоит в том, что у таких экранов внутреннее поле неоднородно. Формулы (17.2) и (17.5) приближенно применимы и для вычисления эффективности экранирования оболочками с одинаковой по всем осям толщиной стенок $\Delta_a = \Delta_b = \Delta_c = \Delta$, а также любых выпуклых оболочек, граничные поверхности которых при расчете N_q и N_{q_1} можно заменить эквивалентными, например вписанными эллипсоидами.

Формула (17.5) упрощается, когда $\mu \gg \mu_0$. Для всех q , равных a, b, c , получим

$$\mathcal{E}_q^{\text{эл}(1)} \approx 1 + N_q \left[(1 - N_q) (V_{\text{ЭК}} / V) \right] \mathbf{v}_{1,0}, \quad (17.6)$$

а при условии $\mathbf{v}_{1,0} \gg 1$

$$\mathcal{E}_q^{\text{эл}(1)} \approx N_q \left[(1 - N_q) (V_{\text{ЭК}} / V) \right] \mathbf{v}_{1,0}. \quad (17.7)$$

Из формул (17.6) и (17.7) следует, что эффективность экранирования параллельно осям эллипсоидов определяется соотношением магнитной проницаемости тела экрана и окружающих сред, соотношением объема оболочки и объема внешнего эллипсоида и произведением $N_q (1 - N_q)$, зависящим от формы эллипсоида.

Используя приведенные результаты, можно найти разные по форме эллипсоидальные экраны, у которых для одних и тех же $V_{\text{ЭК}} / V$ и $\mathbf{v}_{1,0}$ эффективности экранирования максимальны по трем, двум и одной осям. Исследуя на условный максимум произведение $N_q (1 - N_q)$ при варьировании N_q для всех q , равных a, b, c , с учетом условия (17.4) находим, что оптимальным по форме для любого

направления внешнего магнитного поля является сферический экран, у которого $N_q = 1/3$, $N_q(1 - N_q) \approx 0,22$. Эффективности экранирования по двум осям, максимальны для цилиндрического экрана с круговым сечением ($a \rightarrow \infty, b = c$). При этом $N_a = 0$; $N_b = N_c = 0,5$, $N_b(1 - N_b) = N_c(1 - N_c) = 0,25$. Для цилиндрического экрана с эллиптическим сечением ($a \rightarrow \infty, b > c$) имеем $N_b(1 - N_b) = N_c(1 - N_c)$. Из условия (17.4) при $N_a = 0$ получим $N_b = 1 - N_c$, однако поскольку $b \neq c$, то $N_q(1 - N_q) < 0,25$ ($q = b, c$).

Находим, что у цилиндрических экранов с эллиптическими и круговыми сечениями $N_a = 0$; $N_b = N_c$. Следовательно, перпендикулярное оси a внутреннее поле для таких экранов совпадает по направлению с перпендикулярным невозмущенным полем.

Для сфероидальных экранов можно найти форму, при которой значение эффективности экранирования по одной оси минимально. Такой формой обладает сжатый сфероид с $a = b > c$, если $N_c = 0,5$ ($c/a = c/b \approx 0,55$).

Для весьма тонких оболочек

$$\frac{V_{ЭК}}{V} \approx \frac{\Delta_a}{a} + \frac{\Delta_b}{b} + \frac{\Delta_c}{c}.$$

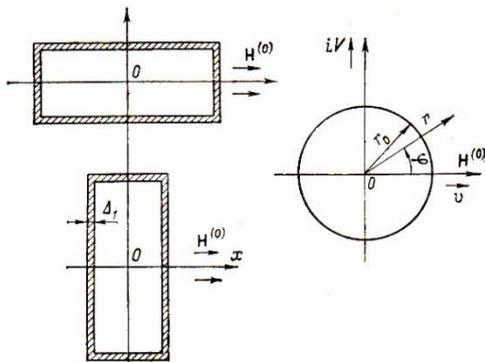


Рис. 17.2. Цилиндр с прямоугольным сечением

При этом условии для оболочек, образованных конфокальными эллипсоидами $d^2 \approx 2\Delta_a a = 2\Delta_b b = 2\Delta_c c$,

$$\frac{V_{\text{ЭК}}}{V} \approx \frac{d^2}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right); \quad (17.8)$$

для оболочек с «подобными» эллипсоидами

$$\frac{V_{\text{ЭК}}}{V} \approx \frac{3\Delta_a}{a} = \frac{3\Delta_b}{b} = \frac{3\Delta_c}{c}; \quad (17.9)$$

для оболочек с одинаковой толщиной стенок

$$\frac{V_{\text{ЭК}}}{V} \approx \Delta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Приведенные в разделе формулы применимы для приближенного расчета эффективности экранирования однородного постоянного МП произвольными по форме выпуклыми оболочками любой толщины.

Цилиндрические оболочки

Цилиндры с прямоугольным поперечным сечением (рис. 17.2). Такие цилиндры были исследованы теоретически А. Магером [17.2] и Г. Каденом [17.3] с помощью конформных преобразований. Эффективность экранирования цилиндром с прямоугольным сечением зависит от направления внешнего магнитного поля: параллельно поперечной или продольной стороне прямоугольника. Остаточное поле внутри прямоугольника является неоднородным. Оно определяется из граничных условий на внутренней поверхности. Эти граничные величины, в свою очередь, зависят от напряженности внешнего МП. Конформное преобразование позволяет решить эту граничную задачу для кругового поперечного сечения.

Функции отображения $z(w)$, используемые для преобразования внешней поверхности прямоугольника во внешнюю поверхность круга, имеют вид

$$z(w) = (A/r_0) \int_{r_0}^w \sqrt{(w^2 - w_0^2)(w^2 - w_0^{*2})} \frac{dw}{w^2} + b, \quad (17.10)$$

где $w = \pm w_0 = \pm r_0 \exp(i\varphi_0)$; $w = \pm w_0^* = \pm r_0 \exp(i\varphi_0)$ - для четырех корней прямоугольника (табл. 17.1).

Таблица 17.1

w	r_0	w_0	w_0^*	ir_0
$z(w)$	b	$ia + b$	$-ia + b$	ia

Параметры A, r_0, φ в (17.10) пока неизвестны. Для их определения используются три условия:

$$z(w_0) - z(r_0) = ia; \quad (17.11a)$$

$$z(w_0) - z(ir_0) = b; \quad (17.11б)$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} (dz / dw) = 1 \quad (17.11в)$$

Из условий (17.11) можно получить

$$A = r_0; \quad (17.12a)$$

$$a = 2r_0 \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi} d\varphi; \quad a = 2r_0 J_a = 2r_0 (E - k'^2 K); \quad (17.12б)$$

$$b = 2r_0 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi} d\varphi; \quad b = 2r_0 J_b = 2r_0 (E' - k^2 K'), \quad (17.12в)$$

где E, K, E', K' - полные эллиптические интегралы первого и второго рода с аргументами $k = \sin \varphi_0$ и $k' = \cos \varphi_0$.

Взяв отношение a/b , получим формулу для определения модуля k :

$$a/b = \frac{J_a}{J_b} = \frac{E - k'^2 K}{E' - k^2 K'}. \quad (17.13)$$

Результаты расчета модуля k представлены на рис. 17.3а. Из (17.12б)-(17.12в) можно определить

$$r_0 = a / 2J_a = b / 2J_b = 0,5 \left(\frac{ab}{J_a J_b} \right)^{1/2}. \quad (17.14)$$

Функции отображения $z(w)$, используемые для преобразования внутреннего пространства прямоугольника во внутреннее пространство круга, отличаются от рассчитанных по формуле (17.10):

$$z(w) = Br_0 \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)(w^2 - w_0^{*2})}}. \quad (17.15)$$

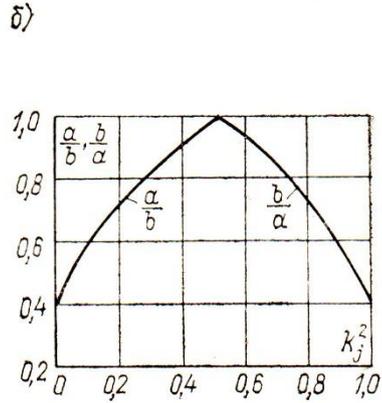
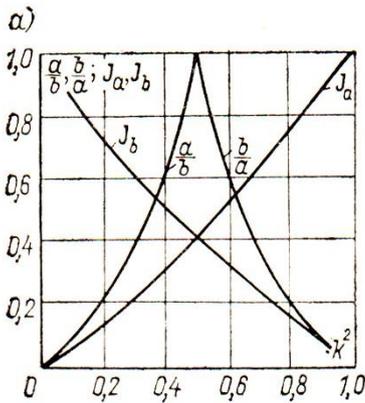


Рис. 17.3. Графики модулей эллиптических интегралов

Поскольку стенки цилиндра с прямоугольным сечением относительно тонкие ($\Delta \ll a, b$), необходимо сделать разделение между границами внешней и внутренней поверхностей. Отсюда нули полинома $w = \pm w_j = \pm r_0 \exp(-i\varphi_j)$, $w = \pm w_j^* = \pm r_0 \exp(i\varphi_j)$. Неизвестными в (17.15) являются B и φ_j . Для их нахождения используются условия:

$$z(w_j) - z(r_j) = ia = 0,5iB \int_0^{\varphi_j} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi_j - \sin^2 \varphi}} =$$

$$= 0,5iBK(\sin \varphi_j) = 0,5iBK(k_j) = 0,5iBK_j; \quad (17.16a)$$

$$z(w_j) - z(ir_j) = b = 0,5B \int_{\varphi_j}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_j}} =$$

$$= 0,5BK(\cos \varphi_j) = 0,5BK(k'_j) = 0,5BK'_j, \quad (17.16b)$$

где $k'_j = |\cos \varphi_j|$; $k_j = |\sin \varphi_j|$ - модули эллиптических интегралов.

Взяв отношение a/b , получим формулу для определения, модуля k_j :

$$a/b = K_j / K'_j. \quad (17.17)$$

Результаты расчета модуля k_j представлены на рис. 17.3,б. Из формул (17.16) определяется

$$B = 2a / K_j = 2b / K'_j = 2 \left(ab / (K_j K'_j) \right)^{1/2}. \quad (17.18)$$

Учитывая, что

$$K_j = 4 \exp\left(-\frac{\pi a}{2b}\right), \quad a \leq b/2;$$

$$K'_j = 4 \exp\left(-\frac{\pi a}{2b}\right); \quad b \leq a/2,$$

получим $B = 1,268a = 0,634b$.

При $\mu_1 \gg \mu_0$ магнитные силовые линии направлены по нормали к внешним сторонам прямоугольника, а также и к поверхности круга.

Использование комплексного потенциала $z(w)$ в виде (17.15) для перевода МП w -плоскости в физическую z -плоскость прямоугольника позволяет получить

$$z = X(r, \varphi) + iY(r, \varphi) = \vec{H}^{(0)}(w - r_0^2/w), \quad r \geq r_0. \quad (17.19)$$

Можно доказать, что касательной составляющей напряженности МП на поверхности $r = r_0$ можно пренебречь:

$$\left(\frac{\partial X}{r \partial \varphi} \right)_{r=r_0} = 0. \quad (17.20)$$

Магнитный поток, протекающий в стенке, пропорционален функции потока $Y(r_0, \varphi)$:

$$\Phi(\varphi) = -\mu_0 Y(r_0, \varphi) = -2\mu_0 \bar{H}^{(0)} r_0 \sin \varphi. \quad (17.21)$$

Напряженность МП в стенке направлена параллельно поверхности:

$$\vec{H}(\varphi) = \Phi(\varphi) / \mu \Delta_1 = -\bar{H}^{(i)} \sin \varphi, \quad (17.22)$$

где $\bar{H}^{(i)} = [2\mu_0 r_0 / (\mu \Delta_1)] \bar{H}^{(0)}$.

Граничная величина потенциала поля на внутренней поверхности, с использованием (17.22) и интегрированием по $\vec{H}(\varphi)$,

$$\begin{aligned} X_j(r_0, \varphi) &= \int_{\pi/2}^{\varphi} \vec{H}(\varphi) ds(\varphi) = \\ &= -2r_0 \bar{H}^{(i)} \int_{\pi/2}^{\varphi} \sqrt{|\cos^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi|} \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Интеграл в этой формуле можно оценить введением переменной $\tau = \cos \varphi$, откуда

$$X_j(r_0, \varphi) = r_0 \bar{H}^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} 0,5\pi \cos^2 \varphi_0 + \cos \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi_0} - \\ - \cos^2 \varphi_0 \operatorname{arcch} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0; \\ \cos \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi} + \\ + \cos^2 \varphi \operatorname{arcch} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{array} \right. \quad (17.24)$$

Продолжая эту функцию аналитически на угол $0,5\pi$, получим кривые (рис. 17.4), которые близки к косинусным линиям.

Комплексный потенциал, который соответствует рассчитанному по формуле (17.24) при граничных условиях $r = r_0$, будет

$$z_i(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{r_0^n} \int_0^{2\pi} X_j(r_0, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (17.25)$$

Интеграл в этой формуле указывает на n -й коэффициент в ряду Фурье для $X_j(r_0, \varphi)$. Коэффициенты для $n = 2, 3, 4, \dots$ рассчитать затруднительно. Если, однако, ограничиться напряженностью магнитного поля $\vec{H}(O)$ в центре прямоугольника, то остается лишь первый член с $n = 1$. Тогда

$$\vec{H}(O) = \left(\frac{dz_j}{dw} \frac{dw}{dz} \right)_{w=0} = \frac{4}{\pi B} \int_0^{\pi/2} X_j(r_0, \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (17.26)$$

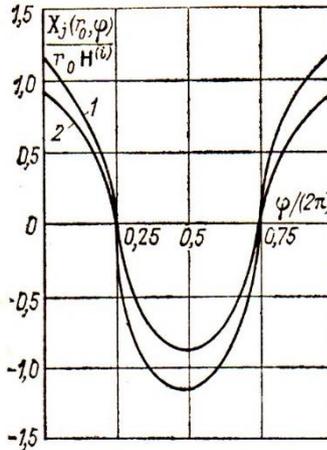


Рис. 17.4. Зависимость скалярного потенциала $\frac{X_j(r_0, \varphi)}{r_0 H^{(i)}}$ от угла φ при $a/b = 0,5$ (кривая 1) и $a/b = 2$ (кривая 2)

Подстановка (17.24) в этот интеграл и проведение необходимых преобразований приводят к выражению

$$\vec{H}(O) = \frac{4r_0 \vec{H}^{(i)}}{\pi B} \left\{ \left[\frac{1}{3}(1+k^2) + k'^2 \right] (E + E') - \frac{4}{3} k'^2 K - \frac{2}{3} k^2 K' \right\}. \quad (17.27)$$

Подставляя в это выражение знание r_0 из формулы (17.14), B - из (17.18), $F = 4ab$ и $\vec{H}^{(i)} = 2[\mu_0 r_0 / (\mu_1 \Delta_1)] \vec{H}^{(0)}$, получим

$$\vec{H}(O) = \frac{\sqrt{k_j k'_j}}{3\pi J_a J_b} \left[(1+k'^2)(E+E') - 2k'^2 K - k^2 K' \right] \times \\ \times \left[F^{0,5} / \nu_{1,0} \Delta_1 \right] \vec{H}^{(0)}. \quad (17.28)$$

Эффективность экранирования цилиндром с прямоугольным поперечным сечением в центре (точка O) рассчитывается по формуле

$$\mathfrak{E}^{П,Ц(1)}(O) = \frac{3\pi J_a J_b \Delta_1 \nu_{1,0}}{\sqrt{k_j k'_j F} \left[(1+k'^2)(E+E') - 2k'^2 K - k^2 K' \right]}. \quad (17.29)$$

Для квадратного сечения ($a = b$) $k^2 = k'^2 = k_j^2 = k'_j^2 = 0,5$
 $E = E' = E(1/\sqrt{2})$; $K = K' = K(1/\sqrt{2})$ формула (17.28) приводится к виду

$$\vec{H}_q(O) = 1,39 \nu_{0,1} \left[F^{0,5} / \Delta_1 \right] \vec{H}^{(0)}. \quad (17.30)$$

Эффективность экранирования цилиндром с квадратным поперечным сечением рассчитывается по формуле

$$\mathfrak{E}^{К,Ц(1)}(O) = \nu_{1,0} \Delta_1 / (1,39\sqrt{F}). \quad (17.31)$$

Для общего случая напряженности внешнего МП $\vec{H}^{(0)} e^{i\gamma}$, наклоненного под углом γ , напряженность в центре

$$\vec{H}_\gamma(O) = \vec{H}(O) \cos \gamma + i \vec{H}'(O) \sin \gamma, \quad (17.32)$$

где $\vec{H}'(O)$ является дополнительной к $\vec{H}(O)$, при которой в формуле (17.29) модули k и k' и эллиптические интегралы E, E', K, K' .

Направление центрального МП обычно отличается от направления напряженности внешнего МП, за исключением напряженности МП при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5\pi$. При квадратном сечении обе напряженности