



И. Р. ВЫСОЦКИЙ
И. В. ЯЩЕНКО

МАТЕМАТИКА

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ



8
7
9

классы

Часть 2

Под редакцией
И. В. ЯЩЕНКО

УДК 373.167.1:519.2+519.2(075.3)
ББК 22.17я721
В93

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Условные обозначения



Важно



Вопросы



Справка, комментарий



Задачи



Определение



Используйте калькулятор



Параграф базового уровня



Параграф повышенного уровня



Начало и окончание материала повышенной сложности

120 Задание повышенной сложности



Таблицы для заполнения, представленные в задачах, можно скачать по QR-коду

Высоцкий, Иван Ростиславович.

В93

Математика. Вероятность и статистика : 7—9-е классы : базовый уровень : учебник : в 2 частях : издание в pdf-формате / И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. — Москва : Просвещение, 2023.

ISBN 978-5-09-110197-3 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-102539-2 (печ. изд.).

Ч. 2. — 112 с. : ил.

ISBN 978-5-09-110135-5 (электр. изд.).

ISBN 978-5-09-102541-5 (печ. изд.).

Учебник предназначен для знакомства учащихся с формами представления и описания данных в статистике, случайными событиями, вероятностью и её свойствами. Основу учебника составляют важные и общие вопросы статистики и теории вероятностей. Наряду с этим большое внимание уделяется общематематическим знаниям. В учебник входят главы, посвящённые элементам теории графов, теории множеств, логике и комбинаторике. Акцент авторы делают на том, какую роль статистика и вероятность играют в изучении явлений окружающего мира.

Учебник содержит большое количество задач. Многие задачи предполагают использование калькулятора или электронных таблиц.

Учебник подготовлен в соответствии со всеми требованиями ФГОС ООО, утверждённого Приказом Министерства просвещения № 287 от 31.05.2021 г.

Данное издание является первым.

УДК 373.167.1:519.2+519.2(075.3)
ББК 22.17я721

ISBN 978-5-09-110135-5 (ч. 2. электр. изд.)

ISBN 978-5-09-110197-3 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-102541-5 (ч. 2, печ. изд.)

ISBN 978-5-09-102539-2 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2023

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение», 2023

Все права защищены

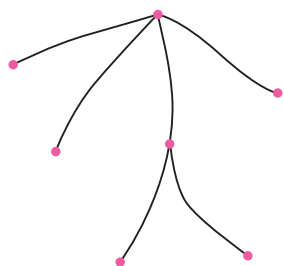
Напомним, что такое цепь и цикл в графе. Цепь — это простой путь, то есть путь, в котором вершины не повторяются. Раз не повторяются вершины, то и рёбра тоже не повторяются (рис. 1, б). Цикл в графе — это замкнутый путь, в котором не повторяются рёбра и не повторяются промежуточные вершины.

Очень интересны и полезны графы, в которых нет циклов. Если в связном графе нет циклов, то такой граф называют **деревом**.

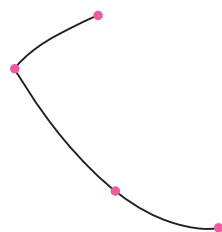


Дерево — связный граф без циклов.

Цепь тоже является деревом, поскольку в цепи нет циклов. И даже граф, состоящий из одной-единственной вершины без рёбер, также можно рассматривать как простейшее дерево (рис. 1, в).



а) Дерево, в котором 7 вершин



б) Цепь — это дерево



в) Простейшее дерево — одна вершина

Рисунок 1

ПРИМЕР 1. На рисунке 2 показана схема водоснабжения в небольшом посёлке. Трубы идут от водонапорной башни и ветвятся, пролегая вдоль улиц. Из больших труб отходят малые к домам. Граф водопровода — дерево. Здесь можно выделить начальную вершину — водонапорную башню.

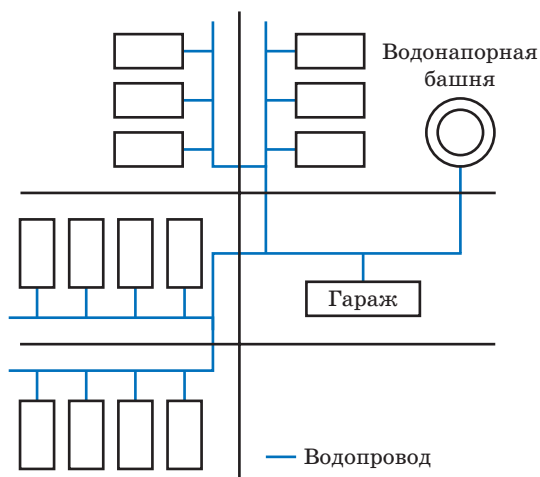


Рисунок 2

ПРИМЕР 2. Возьмём симметричную монету и подбросим её 3 раза. Чтобы изобразить этот случайный опыт, построим дерево. От начальной вершины S нарисует ветви вниз к вершинам, которые обозначим O (орёл) и P (решка) — это результаты первого броска. От каждой из них идут ещё два ребра вниз к вершинам O и P , изображающим результаты второго броска. Точно так же покажем результаты третьего броска (рис. 3).

Получилось дерево случайного эксперимента. В этом дереве восемь цепей, ведущих из начальной вершины S в концевые вершины:

$SOOO, SOOP, SOPO, SOPP,$
 $SPOO, SPOP, SPPO$ и $SPPP$.

Каждая цепь изображает одно из восьми возможных элементарных событий в этом случайном опыте.

В примерах 1 и 2 понятно, какую вершину следует выбрать в качестве начальной, или **корневой**, вершины, из которой «растёт» дерево. Вода по трубам течёт из водонапорной башни. Это и есть начальная вершина на схеме водоснабжения (см. рис. 2). Во втором примере начальная вершина изображает начальный момент, когда монету ещё не бросили ни разу. Мы её обозначили буквой S от слова *start*, имея в виду начало случайного опыта.

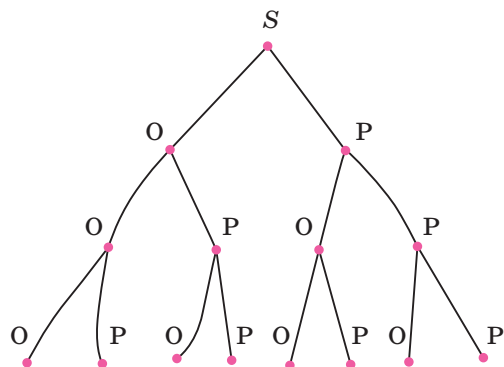


Рисунок 3

Название «дерево» происходит оттого, что цепи «ветвятся», не образуя циклов. Единственная разница — в природе деревья обычно растут снизу вверх, а математические деревья мы рисуем так, как нам удобно.

Бывают **бесконечные деревья**, то есть деревья, в которых бесконечно много вершин и рёбер. Многоточие на рисунке 4 показывает, что дерево простирается вправо до бесконечности.

ПРИМЕР 3. Предположим, что кто-то пытается послать СМС из леса, где связь очень плохая. Каждая отдельная попытка может оказаться неудачной, и в таком случае телефон предпримет следующую. Будем считать, что попыток может быть сколько угодно. Такой случайный опыт можно изобразить с помощью бесконечного графа. Начинается граф в вершине S , каждая попытка может оказаться неудачной (вершина H) или удачной (вершина Y) (см. рис. 4).

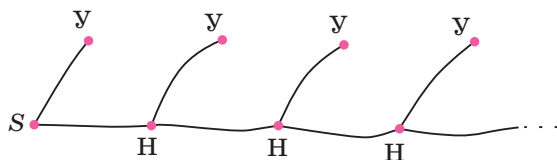


Рисунок 4. **Бесконечное дерево случайного эксперимента**



Вопросы

- 1 Что такое дерево?
- 2 Может ли в дереве быть 4 ребра; бесконечно много рёбер?
- 3 Бывают ли в дереве петли; цепи; циклы?



Задачи

- 1 Какие из графов на рисунке 5 являются деревьями?

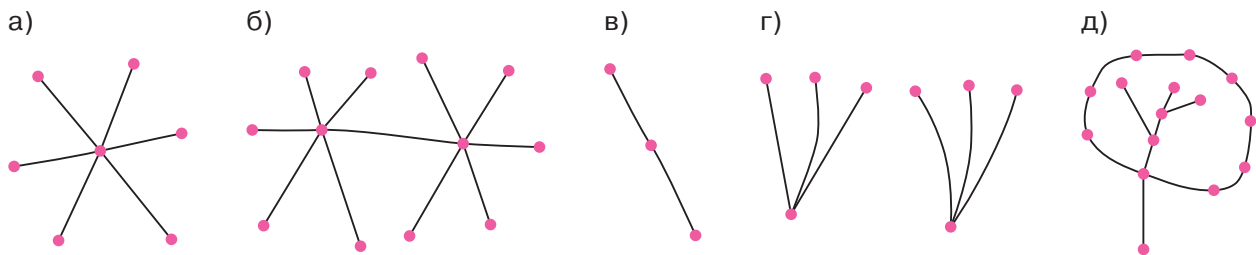


Рисунок 5

- 2 Является ли деревом граф дорог в вашем населённом пункте? Постройте в тетради часть этого графа в обоснование своего ответа.
- 3 Нарисуйте в тетради какое-нибудь дерево, в котором 7 вершин, причём степень 1 имеют ровно:
- 2 вершины;
 - 4 вершины;
 - 6 вершин.
- 4 В графе рёбрами соединены вершины A и B , B и C , A и C . Является ли этот граф деревом?
- 5 План тропинок в парке представляет собой дерево (рис. 6). Ворота в парке обозначены вершиной S . Сколько цепей ведёт из вершины S :
- к кафе;
 - к пруду;
 - к саду камней?
- 6 Придумайте какой-нибудь случайный опыт, моделью которого служит дерево, показанное на рисунке 7.
- 7 Приведите пример случайного опыта, для изображения которого требуется дерево с бесконечным числом вершин.
- 8 Придумайте и нарисуйте в тетради:
- два неодинаковых дерева с четырьмя вершинами;
 - три неодинаковых дерева с пятью вершинами.

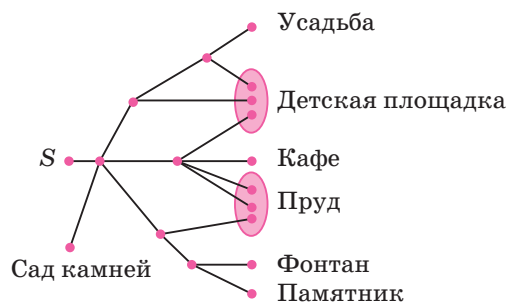


Рисунок 6

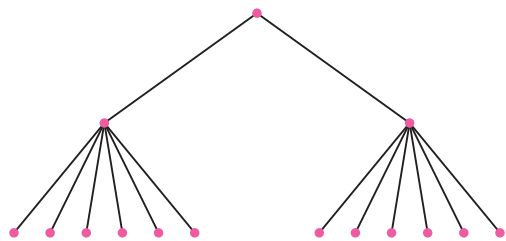


Рисунок 7

47* Свойства деревьев

Поскольку дерево — связный граф, из любой его вершины можно пройти по рёбрам в любую другую вершину. Из-за отсутствия циклов это можно сделать единственным способом. Значит, верна следующая теорема.



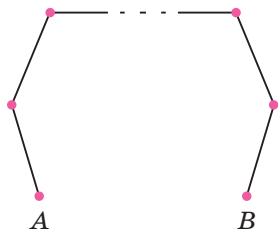
Теорема. Любые две вершины в дереве соединены единственной цепью.

Из этой теоремы следует полезное свойство.

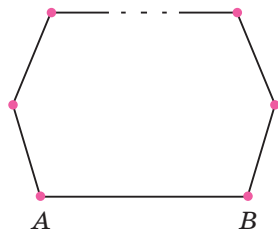


Свойство 1. Если из дерева удалить ребро, то граф перестанет быть связным.

Доказательство. Докажем это свойство от противного. Предположим, что удалось удалить некоторое ребро AB , но граф остался связным. Значит, в нём есть цепь, соединяющая вершины A и B (рис. 8, а). Вернём ребро AB на место. Получится исходный граф, но теперь в нём есть цикл (рис. 8, б). Противоречие. Значит, при удалении любого ребра дерево теряет связность.



а) После удаления ребра AB граф остался связным



б) После возвращения ребра AB образовался цикл

Рисунок 8



Концевой (висячей) вершиной называется вершина, из которой выходит ровно одно ребро, то есть вершина степени 1.

В примере 1 в п. 46 концевыми вершинами являются дома, к которым подведён водопровод, а в примере 2 концевые вершины — это результаты последнего броска монеты. Кажется, что раз в дереве нет циклов, то у дерева обязательно должны быть концевые вершины. И это до определённой степени верно. Но есть два исключения. Во-первых, концевых вершин нет у дерева без рёбер. Во-вторых, бывают бесконечные деревья. Они тоже могут не иметь концевых вершин. На рисунке 9 показано бесконечное дерево без концевых вершин¹.

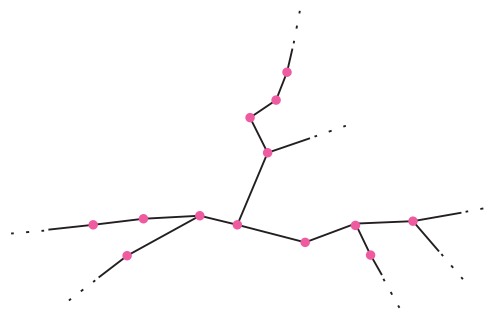


Рисунок 9. Бесконечное дерево без концевых вершин

Если дерево конечно и имеет хотя бы 1 ребро, то концевые вершины у него есть.



Свойство 2. Если в дереве конечное число вершин и есть хотя бы одно ребро, то в таком дереве есть концевая вершина.

Доказательство. Предположим, что все вершины имеют степень 2 или выше. Тогда в каждую вершину можно «войти» по какому-то ребру и «выйти» из неё по другому ребру, поскольку петель нет. Начнём с какой-то вершины и будем строить путь без повторяющихся рёбер. По условию вершин конечное число, поэтому рано или поздно какая-то вершина в нашем пути повторится и получится цикл. Но ведь в дереве циклов нет.

Противоречие. Предположение неверно. Значит, в дереве есть вершины степени меньше, чем 2. Вершин степени 0 нет, поскольку граф связен и в нём есть хотя бы одно ребро. Стало быть, найдётся вершина степени 1, т. е. концевая вершина.



Свойство 3. В конечном дереве число рёбер на 1 меньше числа вершин.

¹ Не нужно думать, что если дерево бесконечно, то у него обязательно нет концевых вершин. Мы видели бесконечное дерево (см. рис. 4), у которого концевые вершины есть, и даже бесконечно много.

Доказательство. Покажем это. Если рёбер нет, то дерево состоит из единственной вершины. Значит, в этом дереве вершин на одну больше, чем рёбер: $1 - 0 = 1$.

Пусть теперь в графе n рёбер ($n > 0$). Мы знаем, что в таком дереве есть концевая вершина. Удалим её вместе с входящим в неё ребром. Снова получится дерево. Будем удалять концевые вершины вместе с входящими в них рёбрами до тех пор, пока не останется дерево, состоящее из единственной вершины.

Мы удалили все n рёбер и n вершин. Осталась одна вершина, но рёбер больше нет. Следовательно, в исходном дереве было $n + 1$ вершин. То есть вершин было на одну больше, чем рёбер. Свойство доказано.



Вопросы

- 1 В дереве 10 вершин, две из которых — вершины X и Y . Сколько существует цепей, ведущих из X в Y ?
- 2 Какой может быть степень начальной вершины дерева; концевой вершины?
- 3 Может ли в дереве вершин быть больше, чем рёбер; рёбер быть больше, чем вершин?



Задачи

- 9 Сколько концевых вершин в дереве на рисунке 10?

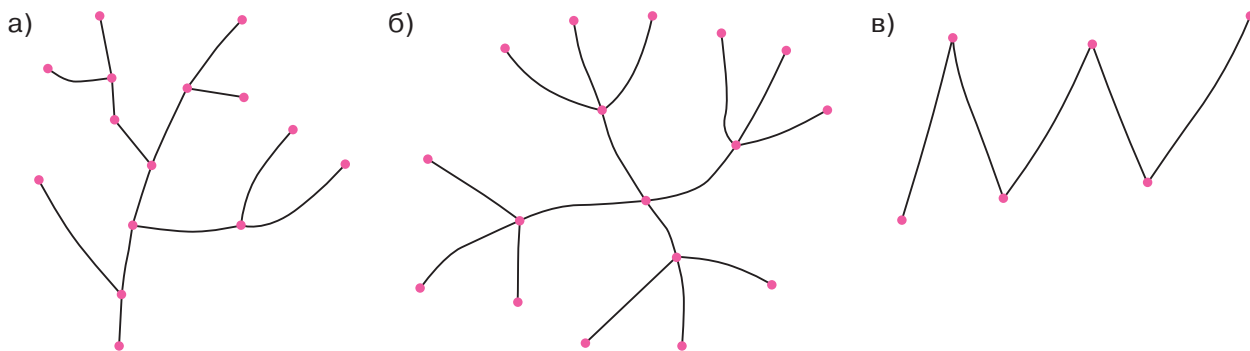


Рисунок 10

- 10 В дереве 4 вершины. Сколько концевых вершин в нём может быть? Приведите пример дерева для каждого возможного значения.
- 11 В дереве 100 вершин. Какое в нём может быть: а) наибольшее число концевых вершин; б) наименьшее число концевых вершин?
- 12 На рисунке 11 показано дерево. Рассмотрите цепи, соединяющие начальную вершину S с концевыми. Сколько таких цепей имеют длину 2; длину 3; длину 4?



Рисунок 11

- 13** Нарисуйте какое-нибудь дерево, в котором из начальной вершины к конечным ведут:
- а) ровно 3 цепи длины 2;
 - б) 2 цепи длины 1 и 4 цепи длины 2.
- 14** Сколько вершин в дереве, в котором:
- а) 14 рёбер;
 - б) 27 рёбер;
 - в) 31 ребро?
- 15** Сколько рёбер в дереве, в котором:
- а) 87 вершин;
 - б) 487 вершин;
 - в) 317 вершин?
- 16** Будет ли связным граф, который получится из дерева, если из него удалить:
- а) ребро, связывающее две неконцевые вершины;
 - б) конечную вершину вместе с выходящим из неё ребром?
- 17** Изобразите какое-нибудь дерево, в котором:
- а) 8 вершин, 5 из них концевые;
 - б) 10 вершин, 6 из них концевые.
- 18** Изобразите какое-нибудь дерево, в котором:
- а) 4 вершины степени 3 и 6 вершин степени 1;
 - б) 2 вершины степени 4, 2 вершины степени 3 и 8 вершин степени 1.

48 Дерево случайного эксперимента

Мы уже видели, как можно построить дерево случайного эксперимента, в котором монету бросают 3 раза. Мы даже построили дерево бесконечного эксперимента, в котором мобильный телефон пытается передать СМС из глухого леса.

Многие случайные эксперименты удобно рассматривать, изобразив их с помощью дерева. При этом стрелки на рёбрах можно не рисовать, поскольку ясно, какая вершина выбрана в качестве начальной: все рёбра направлены от неё к конечным вершинам. Мы будем обозначать начальную вершину дерева случайного опыта буквой S .

ПРИМЕР 1. На фабрике керамической посуды производят тарелки. Каждая новая тарелка может иметь дефект (пережог, деформацию, трещину), а может оказаться качественной. Поэтому все тарелки проходят контроль качества. Система контроля выявляет почти все дефектные тарелки, но иногда может случайно не заметить дефект. Более того, редко, но случается, что система контроля качества по ошибке бракует тарелку без дефекта. Изобразим весь этот процесс с помощью дерева (рис. 12). Начнём с вершины S , построим рёбра к вершинам A и B , которые изображают события «качественная тарелка» и «тарелка с дефектом». Затем от вершин A и B проведём рёбра к вершинам, изображающим события R «тарелка забракована» и Q «тарелка не забракована». При этом вершины R и Q нарисуем по 2 раза: один раз для случая, когда тарелка хорошая, а второй раз для дефектной тарелки.

Получившееся дерево обладает интересным свойством: у него из каждой неконцевой вершины (S , A и B) исходит ровно два ребра. Такие деревья называют двоичными или **бинарными**. Деревья на рисунках 3 и 4 (с. 5) также бинарные.

Какие события являются элементарными в этом опыте? Это события, которые изображены цепями, идущими от точки S к конечным вершинам. Например, элементарное собы-

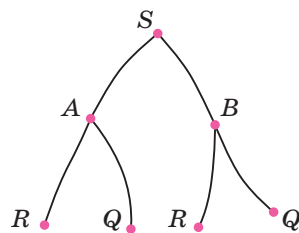


Рисунок 12

тие «качественная тарелка забракована» изображается цепью *SAR*. Всего элементарных событий четыре: помимо цепи *SAR* есть ещё цепочки *SAQ*, *SBR* и *SBQ*.

Не следует думать, что дерево любого случайного опыта обязательно бинарное.

ПРИМЕР 2. Три друга — Андрей (А), Борис (Б) и Владимир (В) — в случайном порядке встают в очередь. Изобразим дерево этого случайного опыта. Начнём с вершины *S*. На первое место можно поставить одного из троих, на второе — одного из двоих, а в конец очереди — оставшегося. Следуя этому рассуждению, строим дерево (рис. 13). Оно получается не бинарное: из вершины *S* выходит три ребра, из трёх вершин — по два ребра, а из шести — по одному.

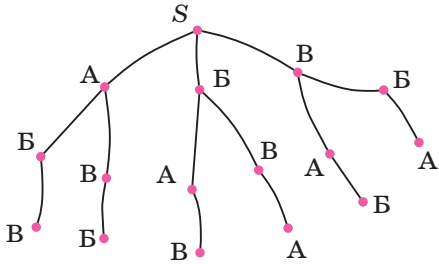


Рисунок 13

Мы знаем, что в таком эксперименте $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ элементарных событий. В дереве все эти элементарные события изображаются цепями, ведущими от *S* к конечным вершинам дерева: *SABV*, *SABV*, *SBVA*, *SBVA*, *SVA* и *SVA*. Каждая из них определяет порядок, в котором А, Б и В выстроились друг за другом.



В дереве случайного опыта элементарные события изображаются цепями, идущими от начальной вершины к конечным. Поэтому количество конечных вершин в дереве случайного опыта равно числу элементарных событий.



Вопросы

- 1 Сколько конечных вершин в дереве, изображающем случайный опыт с пятью элементарными событиями?
- 2 Опишите словами элементарные события, изображённые цепями *SAQ*, *SBR* и *SBQ* на рисунке 12.
- 3 Какая цепь в дереве на рисунке 12 соответствует событию «система контроля пропустила бракованную тарелку»?



Задачи

- 19 На рисунке 14 изображено дерево некоторого случайного опыта с началом в точке *S*. Сколько элементарных событий в этом опыте?

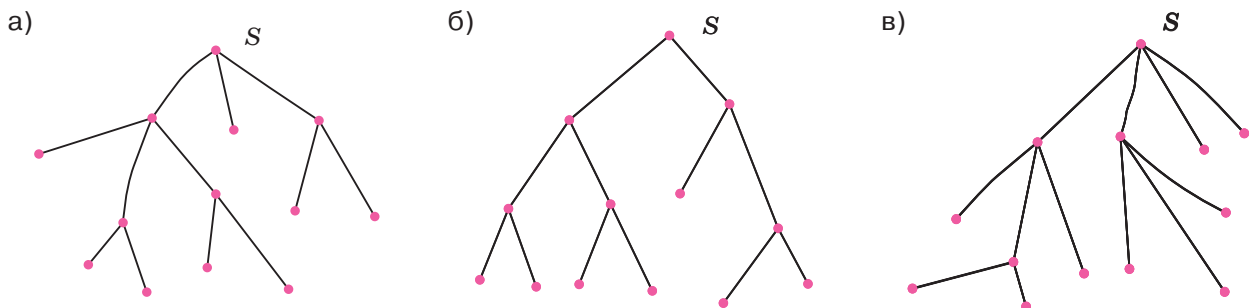


Рисунок 14

Оглавление

Глава X. Деревья	3
46. Деревья	4
47*. Свойства деревьев	6
48. Дерево случайного эксперимента	9
Глава XI. Математические рассуждения	13
49. Логические союзы «и» и «или»	14
50*. Отрицание сложных утверждений	16
Глава XII. Операции над случайными событиями	21
51. Определение случайного события. Взаимно противоположные случайные события	22
52. Объединение и пересечение событий	25
53*. Формула сложения вероятностей	29
54*. Решение задач с помощью координатной прямой	32
Глава XIII. Условная вероятность и независимые события	35
55. Условная вероятность и правило умножения вероятностей	36
56. Дерево случайного опыта	39
57. Независимые события	44
58*. Об ошибке Эдгара По и о том, как победить стечение обстоятельств	47
Глава XIV. Элементы комбинаторики	49
59. Комбинаторное правило умножения	50
60. Перестановки. Факториал	52
61. Число сочетаний и треугольник Паскаля	55
Глава XV. Геометрическая вероятность	59
62. Выбор точки из фигуры на плоскости	60
63. Выбор точки из отрезка и дуги окружности	63
Глава XVI. Испытания Бернулли	67
64. Успех и неудача. Испытания до первого успеха	68
65*. Серия испытаний Бернулли	72
66*. Число успехов в испытаниях Бернулли	74
67*. Вероятности событий в испытаниях Бернулли	76
Глава XVII. Случайные величины	79
68. Примеры случайных величин	80
69*. Распределение вероятностей случайной величины	82
70*. Математическое ожидание случайной величины	86
71*. Дисперсия и стандартное отклонение	89
72*. Математическое ожидание и дисперсия числа успехов и частоты успеха в серии испытаний Бернулли	92
73*. Закон больших чисел и его применение	94
Ответы	99
Предметный указатель	106
Справочные материалы	104
Функции электронных таблиц	109