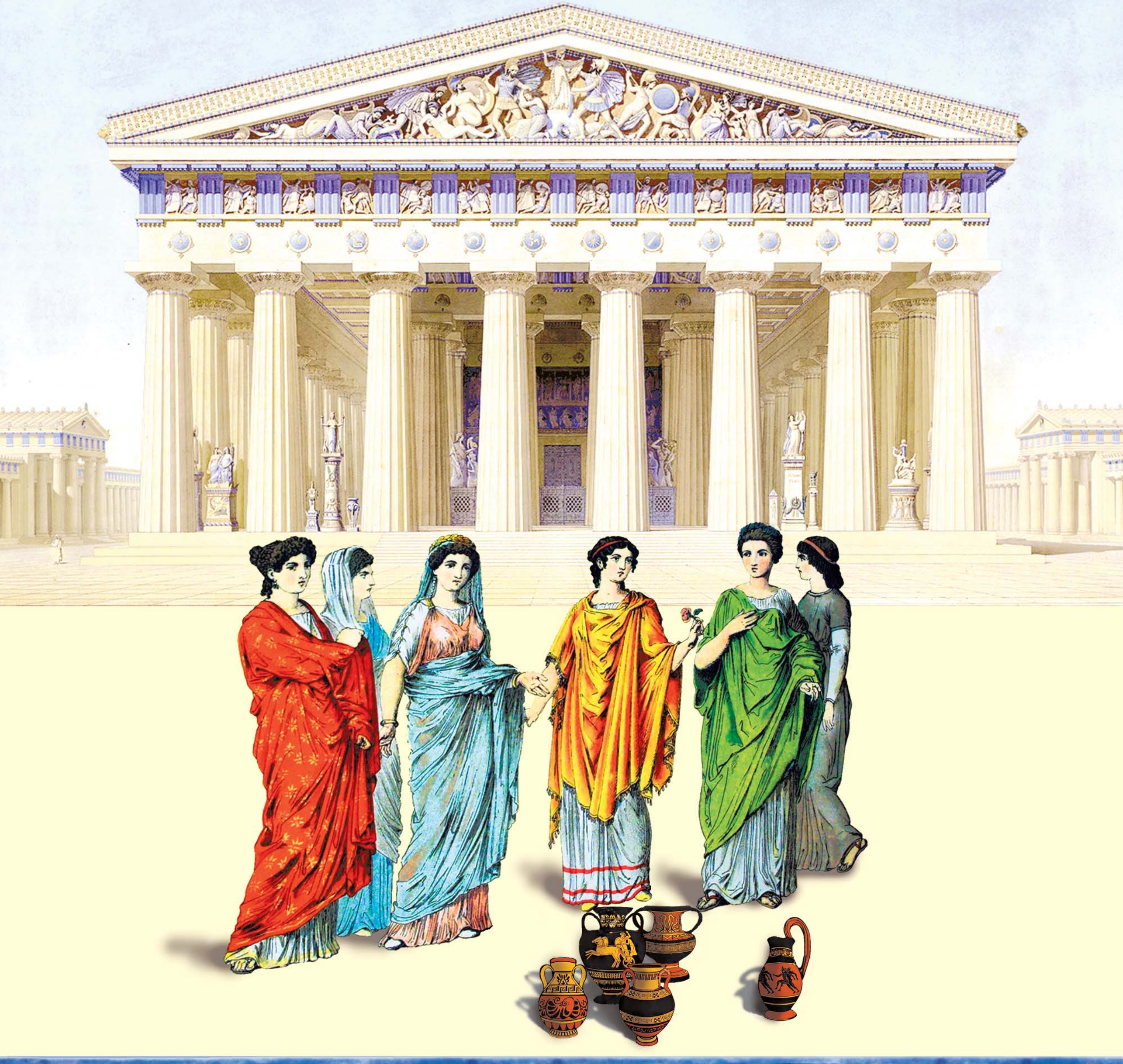
ISSN 0130-2221
2023 · № 2
ФЕВРАЛЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КВАНТ ФЕВРАЛЬ 2023 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Фризы

А.ПАНОВ, Д.ПАНОВ, П.ПАНОВ

Фриз – это периодический рисунок на плоскости, заполняющий полосу между двумя параллельными прямыми. На рисунке 1 представлен фрагмент фриза, на самом деле простирающегося вправо и влево до бесконечности. Снизу дорисован вектор минимальной длины, при сдвиге на который фриз совмещается сам с собой. В зависимости от обстоятельств, мы будем называть периодом фриза либо сам этот вектор $\vec{\tau}$, либо его длину – положительное число $\tau = |\vec{\tau}|$.

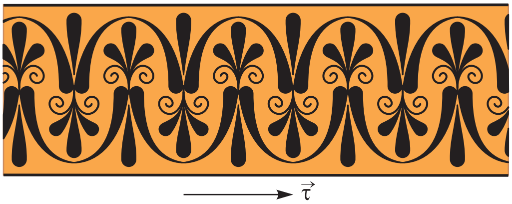


Рис. 1. Греческий фриз

В 1856 году английский архитектор и дизайнер Оуэн Джонс (1809–1874) опубликовал свою знаменитую «Грамматику орнамента» [1]. Это одновременно и энциклопедия, и справочник, и учебник для студентов-дизайнеров, содержащий тысячи образцов фризов и других орнаментов. В отдельных главах «Грамматики» представлены фризы разных эпох и разных народов. Так что это еще и своеобразная историческая и географическая классификация фризов.

У математиков существует своя собственная классификация, основанная на анализе симметрий фризов. Она позволяет разделить все фризы на семь различных типов.

Вся наша статья разбита на несколько частей. Сначала мы поговорим о движениях плоскости и симметриях геометрических объектов, расположенных на ней. Потом речь пойдет о симметриях плоской полосы, являющейся носителем фриза, и мы составим таблицу умножения ее симметрий. Далее следует основной раздел статьи, который как раз и содержит классификацию фризов. А под конец мы еще поговорим о фризах и вазах и добавим кое-что о строении химических молекул. Но начнем с еще одного примера фриза.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230201

Фриз-синусоида

На самом деле фризы в больших количествах встречаются в каждом учебнике математики – это графики *периодических*, в том числе тригонометрических функций. Напомним, что функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое минимальное положительное число τ, что для каждого x выполняется равенство $f(x+\tau) = f(x)$. Число τ называется периодом функции f. При этом график периодической функции f совмещается сам с собой при сдвиге на горизонтальный вектор $\vec{\tau} = (\tau, 0)$.

Возьмем, к примеру, функцию $y = \sin x$. Она периодическая с периодом $\tau = 2\pi$, ее график – синусоида, совмещающаяся с собой при сдвиге на горизонтальный вектор $\vec{\tau} = (2\pi, 0)$. Чтобы можно было считать такую синусоиду фризом, нужно только указать полосу, которая эту синусоиду содержит. Поскольку наименьшее значение синуса –1, а наибольшее 1, естественно считать, что такая полоса ограничена прямыми $y = -1$ и $y = 1$ (рис. 2). Штриховой

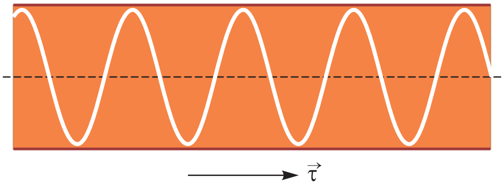


Рис. 2. Фриз-синусоида, его период равен 2π

линией обозначим *горизонтальную ось* фриза, которая делит полосу пополам.

Движение плоскости и симметрии

Движения

Движение плоскости – это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

Об одном движении плоскости мы уже упоминали – это *сдвиг* плоскости на некоторый вектор $\vec{t}$, при котором каждая точка x переходит в точку $x' = x + \vec{t}$.

Еще одно, хорошо известное, движение плоскости – это *поворот* плоскости вокруг точки A на угол φ.

И еще одно движение – это *отражение* относительно прямой l, когда каждая точка x переходит в точку x' такую, что x и x' лежат по разные стороны от прямой l на равных расстояниях от нее и на общем перпендикуляре к ней.

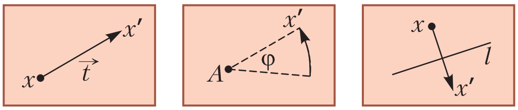


Рис. 3. Сдвиг; поворот; отражение

Эти движения показаны на рисунке 3.

Наконец, добавим сюда *скользящее отражение* относительно прямой, которое получается в результате отражения относительно прямой l и последующего сдвига на параллельный ей вектор $\vec{t}$ (рис. 4).

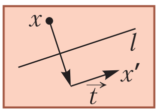


Рис. 4. Скользящее отражение

Теорема Шаля утверждает, что других движений плоскости нет.

Симметрии

Симметрия объекта, расположенного на плоскости, – это движение плоскости, при котором объект совмещается сам с собой. Объектом, о котором идет речь в этом определении, может служить любое подмножество плоскости, например, линия, круг или конечный набор точек. Точно так же можно говорить о симметрии любой плоской картинки, в том числе о симметрии фриза.

Упражнение 1. Перечислите все симметрии круга с центром в точке A.

Для начала мы поможем вам с этим первым упражнением.

У круга имеется очень много симметрий, т.е. существует много движений плоскости, которые переводят круг в себя. Во-первых, это все повороты плоскости вокруг центра круга, точки A. Во-вторых, это все отражения относительно прямых, проходящих через центр круга. Других симметрий у круга нет.

А вот еще два упражнения, уже для самостоятельного решения.

Упражнения

2. Перечислите все симметрии равнобедренного треугольника.

3. Перечислите все симметрии равностороннего треугольника.

Умножение движений и умножение симметрий

Движения плоскости можно перемножать, и их произведение тоже будет движением плоскости. Пусть, например, R – это поворот плоскости на угол φ вокруг точки A, а T – сдвиг плоскости на вектор $\vec{t}$. Тогда их произведение $R \circ T$ – это движение, получающееся в результате последовательного применения к плоскости сначала сдвига T, а потом поворота R.

Вообще, если имеются два движения плоскости P и Q, то их произведение $P \circ Q$ – это движение, получающееся в результате последовательного применения к плоскости сначала движения Q, а потом движения P. Именно в таком порядке!

Если два движения плоскости P и Q будут симметриями одного и того же геометрического объекта, то их произведение $P \circ Q$ тоже будет движением и тоже будет переводить этот объект в себя и, значит, тоже будет его симметрией.

Вот два простых упражнения на эту тему.

Упражнения

4. Пусть движение T_1 – это сдвиг плоскости на вектор $\vec{t}_1$, а T_2 – сдвиг плоскости на вектор $\vec{t}_2$. Какое движение плоскости представляет их произведение $T_1 \circ T_2$?

5. Пусть R_1 и R_2 – это две симметрии круга, являющиеся поворотами на углы φ_1 и φ_2 вокруг его центра. Какую симметрию круга представляет собой их произведение $R_1 \circ R_2$?

Сейчас мы обсудим более сложную задачу, а именно, поговорим о симметриях полосы и об их произведениях.

Симметрии полосы и таблица умножения

Симметрии полосы

Бесконечная полоса, заключенная между двумя параллельными прямыми, называется *носителем фриза* – фриз расположен внутри нее и целиком заполняет ее (см. рис. 1,2). Любая симметрия фриза одновременно будет и симметрией содержащей его полосы. Так что сначала стоит отдельно разобраться именно с симметриями полосы.

Полосу мы всегда будем располагать горизонтально (рис. 5). Все симметрии полосы нетрудно перечислить – это

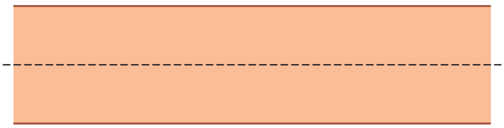


Рис. 5. Полоса со своей горизонтальной осью

- сдвиги в горизонтальном направлении;
- повороты на 180° вокруг точек, лежащих на горизонтальной оси;
- отражения относительно вертикальных прямых;
- скользящие отражения относительно горизонтальной оси.

Еще раз подчеркнем, что любая симметрия фриза переводит содержащую его полосу в себя и поэтому обязательно входит в этот список движений.

Введем теперь подходящие обозначения для этих симметрий полосы.

Обозначения для симметрий полосы

Итак, обозначим

- $T_{\vec{t}}$ – *сдвиг* на вектор $\vec{t}$, параллельный горизонтальной оси;
- R_A – *поворот* на угол 180° вокруг точки A, лежащей на горизонтальной оси;
- V_A – *вертикальное отражение*, отражение относительно вертикальной прямой, проходящей через точку A, лежащую на горизонтальной оси;
- $S_{\vec{t}}$ – *скользящее отражение*, отражение относительно горизонтальной оси с последующим сдвигом на вектор $\vec{t}$, параллельный горизонтальной оси;
- $S_{\vec{0}}$ – *горизонтальное отражение*, отражение относительно горизонтальной оси, важный частный случай скользящего отражения.

Введем еще одно дополнительное обозначение, которое мы дальше будем использовать:

- S' – множество всех скользящих отражений относительно горизонтальной оси, за исключением горизонтального отражения $S_{\vec{0}}$.

Добавим еще, что $T_{\vec{0}}$ – это тождественное отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости остаются на месте.

После введения этих обозначений мы можем сформулировать несколько легких упражнений на умножение симметрий полосы. В них $\vec{s}$ и $\vec{t}$ – это два горизонтальных вектора, точка A лежит на горизонтальной оси полосы.

Упражнения

6. Взгляните на определение скользящего отражения и убедитесь, что

- $S_{\vec{t}} = T_{\vec{t}} \circ S_{\vec{0}}$.

7. Убедитесь также, что

- $T_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}} = T_{\vec{s}+\vec{t}}$;
- $R_A \circ R_A = T_{\vec{0}}$ (это можно записать короче: $R_A^2 = T_{\vec{0}}$);
- $S_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}} = T_{\vec{s}+\vec{t}}$;
- $T_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}} = S_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}} = S_{\vec{s}+\vec{t}}$.

Эти упражнения содержат много разных формул и, чтобы с ними было легче работать, нужно их как-то структурировать. Сейчас мы объединим их в таблицу, а именно, в таблицу умножения.

Таблица умножения симметрий полосы

Вот как она выглядит (табл.1).

Табл. 1. Таблица умножения симметрий полосы

$\circ$	$T_{\vec{s}}$	R_B	V_B	$S_{\vec{s}}$
$T_{\vec{t}}$	$T_{\vec{t}+\vec{s}}$	$R_{B+\vec{t}/2}$	$V_{B+\vec{t}/2}$	$S_{\vec{t}+\vec{s}}$
R_A	$R_{A-\vec{s}/2}$	$T_{\overrightarrow{2BA}}$	$S_{\overrightarrow{2BA}}$	$V_{A-\vec{s}/2}$
V_A	$V_{A-\vec{s}/2}$	$S_{\overrightarrow{2BA}}$	$T_{\overrightarrow{2BA}}$	$R_{A-\vec{s}/2}$
$S_{\vec{t}}$	$S_{\vec{t}+\vec{s}}$	$V_{B+\vec{t}/2}$	$R_{B+\vec{t}/2}$	$T_{\vec{t}+\vec{s}}$

Здесь опять принято, что точки A и B лежат на горизонтальной оси полосы, а векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$ горизонтальны. Поясним, как эта таблица работает. Предположим, что нам нужно вычислить произведение поворота R_A и вертикального отражения V_B, т.е. произведение $R_A \circ V_B$. Для этого посмотрим, что стоит в ячейке на пересечении строки с названием R_A со столбцом с заголовком V_B. Это будет $S_{2\overline{BA}}$, и это означает, что

$$R_A \circ V_B = S_{2\overline{BA}}.$$

Упражнение 8. С помощью таблицы умножения убедитесь, что $S_{\vec{t}} \circ R_B = V_{B+\vec{t}/2}$.

Конечно, остается вопрос, как были вычислены все эти 16 произведений, заполняющих таблицу 1. Но легкое упражнение 7 гарантирует нам, что, по крайней мере четыре клетки таблицы $T_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}}$, $S_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}}$, $T_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}}$, и $S_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}}$ заполнены правильно. А следующие два упражнения (вместе с указанием к ним) показывают, как можно проверить и все остальное.

Упражнения

9. Докажите, что $R_A \circ V_B = S_{2\overline{BA}}$.
10. Докажите, что $S_{\vec{t}} \circ R_B = V_{B+\vec{t}/2}$.

Указание. Воспользуйтесь рисунком 6. Слева $V_B(x)$ – это образ точки x при отражении от вертикальной прямой, проходящей через точку B,

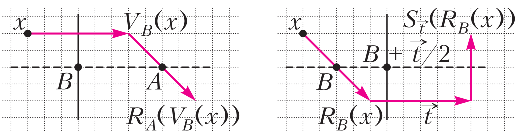


Рис. 6. К упражнениям 9, 10

а $R_A(V_B(x))$ – это образ точки x при движении $R_A \circ V_B$. Справа $R_B(x)$ – это образ точки x при повороте R_B, а $S_{\vec{t}}(R_B(x))$ – это образ точки x при движении $S_{\vec{t}} \circ R_B$.

И теперь заключительное упражнение на эту тему.

Упражнение 11. Докажите, что все ячейки в таблице 1 заполнены правильно.

Сжатая таблица умножения симметрий полосы

Наша предыдущая таблица умножения содержит важную информацию, но выглядит достаточно громоздко. Ее можно слегка сжать, убрав нижние индексы (табл. 2).

Табл. 2. Сжатая таблица умножения

$\circ$	T	R	V	S
T	T	R	V	S
R	R	T	S	V
V	V	S	T	R
S	S	V	R	T

И это тоже ценная конструкция. Покажем, как читать эту таблицу умножения. Например, что значит та же самая формула

$$R \circ V = S?$$

Она означает, что какой бы поворот R и какое бы вертикальное отражение V, являющиеся симметриями полосы, мы ни взяли, в результате умножения R на V получим новую симметрию полосы, и это обязательно будет некоторое скользящее отражение S.

Теперь, после всей проделанной подготовительной работы, мы готовы перейти к классификации фризов.

Семь типов фризов

Мы будем характеризовать фриз набором его симметрий. И чтобы разобраться, что это означает, начнем с фриза-синусоиды (см. рис. 2).

Симметрии фриза-синусоиды

Во-первых, у фриза-синусоиды, как и у любого другого фриза, по определению есть горизонтальный сдвиг $T_{\vec{\tau}}$ на период, в данном случае на $\vec{\tau} = (2\pi, 0)$, который переводит его в себя, т.е. является его симметрией. На самом деле у фриза имеется бесконечно много сдвигов-симметрий и все они имеют вид $T_{n\vec{\tau}}$, где n любое целое.

Во-вторых, обратите внимание на какую-либо точку пересечения синусоиды с горизонтальной осью фриза. Если повернуть весь фриз вокруг этой точки на $180°$, то он совместится с собой. Так что этот поворот – еще одна симметрия. И таких поворотов симметрий тоже бесконечно много. На рисунке 7 они отмечены синими точками.

В-третьих, проведите вертикальные прямые через точки максимума и минимума синусоиды (см. рис. 7). Отражения фриза относительно этих прямых тоже являются его симметриями.

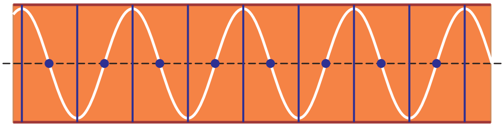


Рис. 7. Отмечены центры поворотов-симметрий и оси вертикальных отражений-симметрий

Наконец, отразите фриз-синусоиду относительно горизонтальной оси, а потом еще дополнительно сдвиньте на полпериода вправо. При таком движении фриз совместится с собой. Это скользящее отражение $S_{\vec{\tau}/2}$ тоже является симметрией этого фриза, а вместе с ним являются симметриями и все скользящие отражения вида $S_{(n+1/2)\vec{\tau}}$, где n – любое целое. Заметим, что среди этих скользящих отражений отсутствует горизонтальное отражение $S_{\vec{0}}$.

Нетрудно убедиться, что мы перечислили все возможные типы симметрии фриза-синусоиды: сдвиги, повороты, скользящие отражения ($S_{\vec{0}}$ среди них отсутствует), а также вертикальные отражения. Мы будем говорить, что фриз с таким набором симметрий имеет тип

$$\langle T, R, V, S' \rangle.$$

Упражнения

12. Убедитесь, что греческий фриз на рисунке 1 имеет симметрию типа $\langle T, R, V, S' \rangle$.

13. Убедитесь, что график-фриз функции $y = \sin 2x$ и график-фриз функции $y = \sin \frac{x}{2}$ имеют тот же самый тип симметрии, что и график-фриз функции $y = \sin x$.

А сейчас мы поэтапно выясним, какие именно симметрии могут быть у фриза с заданным периодом.

Сдвиги-симметрии фризов

По определению, данному в самом начале статьи, в состав симметрий любого фриза обязательно входит сдвиг $T_{\vec{\tau}}$, где вектор $\vec{\tau}$ – это период фриза, т.е. горизонтальный вектор минимальной длины, при сдвиге на который фриз совмещается сам с собой. Понятно, что и любой сдвиг вида $T_{n\vec{\tau}}$ на вектор $n\vec{\tau}$, являющийся целым кратным периода, тоже будет симметрией этого фриза. Теперь объясним, почему других сдвигов-симметрий у фриза нет.

Предположим, что некоторый сдвиг $T_{\vec{t}}$ входит в состав симметрий фриза. Тогда в состав симметрий входит и любой сдвиг вида $T_{n\vec{\tau}} \circ T_{\vec{t}}$. Таблица 1 позволяет вычислить это произведение:

$$T_{n\vec{\tau}} \circ T_{\vec{t}} = T_{\vec{t}+n\vec{\tau}}.$$

Если горизонтальный вектор $\vec{t}$ не кратен периоду $\vec{\tau}$, то среди векторов $\vec{t} + n\vec{\tau}$, где n – любое целое, положительное или отрицательное, обязательно найдется такой ненулевой вектор, что $\left|\vec{t} + n\vec{\tau}\right| < |\vec{\tau}|$. А это уже противоречит свойству минимальности длины периода $\vec{\tau}$. Поэтому вектор $\vec{t}$ обязательно кратен периоду $\vec{\tau}$. Тем самым, обязательно существует такое целое n, что $\vec{t} = n\vec{\tau}$.

Итак, все сдвиги-симметрии фриза с периодом $\vec{\tau}$ имеют вид $T_{n\vec{\tau}}$, где n – целое. Других сдвигов-симметрий у фриза нет.

Повороты-симметрии фризов

Пусть у фриза с периодом $\vec{\tau}$ имеется хотя бы один поворот-симметрия. Обозначим центр этого поворота на 180°, лежащий на горизонтальной оси фриза, буквой O. Тогда сам поворот запишется как R_O. Вместе с R_O симметрией фриза будет и любое произведение вида $T_{n\vec{\tau}} \circ R_O$. Из таблицы 1 извлекаем, что

$$T_{n\vec{\tau}} \circ R_O = R_{O+n\vec{\tau}/2}.$$

Таким образом, вместе с поворотом R_O мы получаем целую серию поворотов-симметрий $R_{O+n\vec{\tau}/2}$. Посмотрим, почему других поворотов-симметрий у фриза нет.

Пусть у фриза имеется поворот-симметрия вида $R_{O+\vec{t}}$. Тогда у него есть симметрия $R_{O+\vec{t}} \circ R_O$. Таблица 1 дает нам, что это сдвиг на вектор $2\vec{t}$:

$$R_{O+\vec{t}} \circ R_O = T_{2\vec{t}}.$$

Из предыдущего пункта мы знаем, что этот вектор $2\vec{t}$ обязательно кратен периоду $\vec{\tau}$, т.е. $2\vec{t} = n\vec{\tau}$ и $\vec{t} = n\vec{\tau}/2$.

Итак, фриз с периодом $\vec{\tau}$ может иметь повороты-симметрии вида $R_{O+n\vec{\tau}/2}$, где n – целое, а O – это какая-то точка на горизонтальной оси фриза. Других поворотов-симметрий у фриза быть не может.