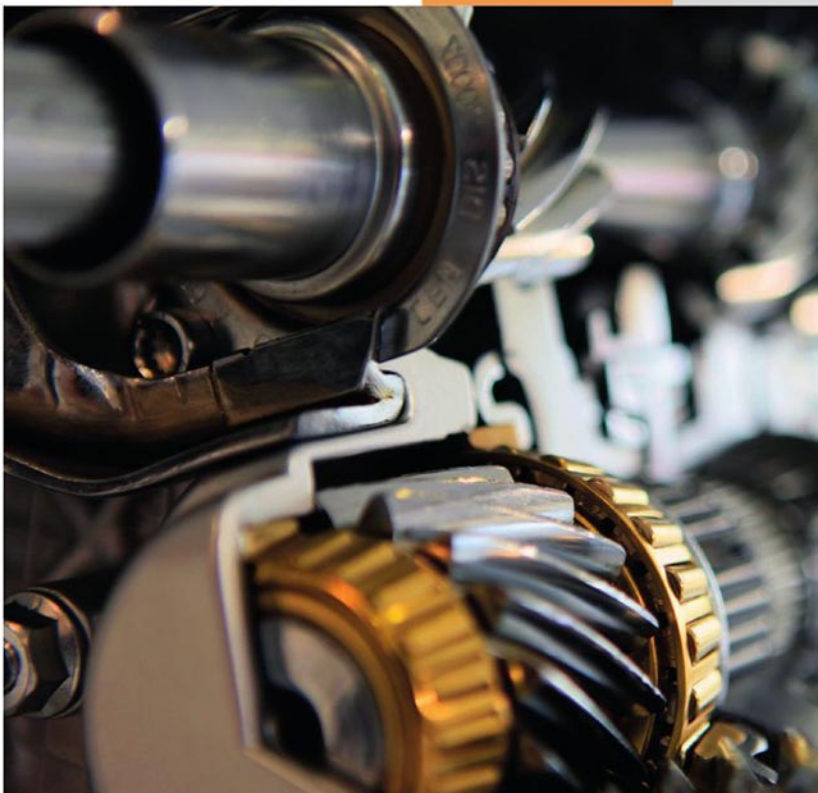
ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

А. В. ТИТЕНОК



«Инфра-Инженерия»

УДК 531.8
ББК 30.12
Т45

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор, проректор по перспективному развитию Брянского государственного технического университета *А. В. Киричек*;
доктор технических наук, профессор кафедры колесных машин Калужского филиала Московского государственного технического университета им. Баумана *В. Н. Сидоров*

Титенок, А. В.

Т45 Техническая механика : учебное пособие / А. В. Титенок. – Москва ; Вологда : Инфра- Инженерия, 2023. – 252 с. : ил., табл.
ISBN 978-5-9729-1348-0

Рассмотрены законы равновесия и движения материальных объектов под действием сил. Изложены механические свойства малоуглеродистых сталей. Представлена теория и практика растяжения и сжатия стержней, механика деформации сдвига.

Для студентов среднего профессионального образования при изучении дисциплин технической направленности.

УДК 531.8
ББК 30.12

ISBN 978-5-9729-1348-0

© Титенок А. В., 2023
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2023
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие……7

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1. СТАТИКА…… 8
1.1. Предмет и задачи статики…… 8
1.2. Основные понятия статики……... 8
1.3. Сила……... 9
1.4. Система сходящихся сил…… 12
1.5. Алгоритм решения задач на равновесие сходящихся сил…. 15
1.6. Момент силы относительно точки……. 17
1.7. Момент силы относительно оси…… 18
1.8. Пара сил…… 20
1.9. Условие равновесия произвольной системы сил……. 20
1.10. Формы уравнений равновесия……. 22
1.11. Равновесие с учётом трения…… 23
1.12. Понятие о статической определимости…….. 25
1.13. Система параллельных сил…….. 26
1.14. Координата центра параллельных сил……. 26
1.15. Распределенные нагрузки…….. 29
1.16. Расчет ферм…… 30
1.17. Алгоритм решения задач по статике…….. 33
? Контрольные вопросы к главе 1…… 34
Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА…….. 35
2.1. Геометрические характеристики плоских сечений…….. 35
2.2. Моменты сопротивления……. 40
2.3. Моменты инерции простейших фигур…… 40
2.4. Геометрические характеристики составного сечения…….. 42
? Контрольные вопросы к главе 2…… 46
Глава 3. КИНЕМАТИКА…….. 47
3.1. Векторный способ задания движения…… 47
3.2. Естественный способ задания движения…….. 49
3.3. Движение материальных тел……. 53
3.4. Движение тела с одной закрепленной точкой……... 59
3.5. Свободное движение тела…….. 60
3.5. Сложное движение тел…… 61
3.7. Теорема Кориолиса…….. 61
3.8. Примеры задач по кинематике…….. 62
? Контрольные вопросы к главе 3…… 77
Глава 4. ДИНАМИКА…… 78
4.1. Аксиомы динамики…… 78
4.2. Динамика материальной точки……. 79
4.2.1. Уравнения движения материальной точки
в декартовой системе координат…… 79

4.2.2. Уравнения движения материальной точки
в естественной системе координат…… 82
4.2.3. Уравнения относительного движения
материальной точки…… 83
4.2.4. Колебательное движение материальной точки……. 83
4.3. Динамика материальных тел…….. 91
4.3.1. Уравнение движения центра масс системы…… 91
4.3.2. Количество движения механической системы…….. 94
4.4. Момент инерции тела…… 96
4.5. Момент количества движения механической системы…….. 97
4.6. Кинетическая энергия механической системы…… 102
4.7. Работа……. 103
4.8. Принцип Даламбера……. 107
4.9. Принцип возможных перемещений…… 111
4.10. Уравнения Лагранжа 2-го рода……..... 113
4.11. Общее уравнение динамики…… 118
4.12. Рекомендации по составлению уравнений
движения при решении задач динамики……. 122
? Контрольные вопросы к главе 4…….. 124

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Глава 1. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ…….. 125
1.1. Общие понятия…… 125
1.2. Механические характеристики малоуглеродистой стали…. 132
? Контрольные вопросы к главе 1…….. 138
Глава 2.Основные положения сопротивления материалов…… 139
2.1. Нагрузки ……... 139
2.2. Деформации…… 140
2.3. Внутренние силы. Метод сечений…… 142
2.4. Напряжения…… 145
2.5. Прочность и жёсткость элементов конструкций……. 146
2.6. Задачи, гипотезы, допущения в сопромате …….. 147
? Контрольные вопросы к главе 2…….. 148
Глава 3. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ……. 149
3.1. Геометрическая и механическая сторона явления……. 149
3.2. Зависимости для расчётов при растяжении и сжатии…… 149
3.2.1. Практическое применение зависимостей
на примере типовых задач…….. 150
3.2.2. Растяжение и сжатие стержней в условиях
статической неопределимости…….. 153
3.2.3. Построение эпюр нормальных сил…….. 159
? Контрольные вопросы к главе 3…….. 161
Глава 4. МЕХАНИКА ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА……... 162
4.1. Деформация сдвига (*геометрическая сторона явления*)…. 162
4.2. Внутренние силы и напряжения при сдвиге
(*механическая сторона явления*)……. 163

4.3. Связь между деформациями сдвига и напряжениями (*физическая сторона явления*)…… 164
4.4. Основные зависимости для расчета на сдвиг (*выводы и обобщения*)…….. 164
4.5. Практическое приложение ……. 164
? Контрольные вопросы к главе 4…….. 169
Глава 5. КРУЧЕНИЕ…… 170
5.1. Деформация кручения (*геометрическая сторона явления*).. 170
5.2. Внутренние силы и напряжения при кручении (*механическая сторона явления*)……. 171
5.3. Связь между деформациями и напряжениями (*физическая сторона явления*)……. 172
5.4. Основные зависимости для расчёта на кручение…….. 173
5.4. Построение эпюр крутящих моментов…… 174
5.5. Расчёт цилиндрических пружин с малым шагом витка……. 181
? Контрольные вопросы к главе 5…….. 183
Глава 6. ИЗГИБ…….. 184
6.1. Деформация изгиба (*геометрическая сторона явления*)….. 184
6.2. Внешние и внутренние силы и напряжения при чистом изгибе (*механическая сторона явления*)…….. 185
6.3. Внешние и внутренние силы и напряжения при поперечном изгибе (*механическая сторона явления*)…….. 187
6.4. Построение эпюр внутренних усилий для балок…….. 190
6.5. Касательные напряжения при изгибе……. 196
6.6. Формулы для расчётов на прочность при изгибе……. 199
6.7. Прогиб и поворот сечения балки……. 200
6.8. Примеры расчётов на прочность и жесткость при изгибе… 201
? Контрольные вопросы к главе 6…….. 206
Глава 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ…… 207
7.1. Изгиб с растяжением или сжатием…….. 207
7.2. Косой изгиб…….. 213
7.3. Напряжение в наклонных сечениях……. 215
7.4. Сложные напряженные состояния и теории прочности…… 218
7.5. Совместное действие изгиба и кручения…… 222
? Контрольные вопросы к главе 7…….. 227
Глава 8. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ…… 228
8.1. Геометрическая и физическая стороны явления…… 228
8. 2. Критическая сила (*механическая сторона явления*)……. 229
? Контрольные вопросы к главе 8…….. 235
Глава 9. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ….. 236
9.1. Общие понятия …….. 236
9.2. Цикл напряжений и его параметры…… 237
9.3. Испытание материалов и предел выносливости…… 238
9.4. Факторы прочности при переменных нагрузках…… 240

9.5. Расчёты деталей на усталостную прочность……. 242
? Контрольные вопросы к п. 9.5……. 245
9.6. Расчёт балок на ударное воздействие……. 246
? Контрольные вопросы к п. 9.6…….. 248
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК…… 249

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Механика не деформируемых твёрдых тел (теоретическая механика) изучает взаимодействие материальных тел и их поведение в результате этого взаимодействия. Объектом рассмотрения в теоретической механике может быть любое материальное тело кроме микрочастиц (атомы и т.п.) и не макротел (галактики и т.п.). Рассматриваемые тела не должны двигаться со сверхскоростями. Объектами рассмотрения в механике являются тела, которые окружают нас в обычной реальной жизни.

Различают два основных состояния материальных тел: покой и движение. В покое имеем сохранение каждой точкой тела своего положения в выбранной системе координат при изменении времени. В движении наблюдаем изменение каждой точки тела своего положения в выбранной системе координат с течением времени. Состояния покоя и движения относительны, поскольку тело может покоиться в выбранной системе координат, но двигаться вместе с системой. Структурно теоретическая механика имеет три раздела: статика, кинематика и динамика.

ГЛАВА 1
СТАТИКА

1.1. Предмет и задачи статики

Статика – это учение о равновесии материальных объектов, находящихся под действием сил относительно систем отсчета, связанных с Землей.

В статике решают две основные задачи:

- приведение действующей на объект системы сил к простейшему .виду;
- определение условий, которым должна удовлетворять действующая система сил, чтобы объект находился в равновесии.

1.2. Основные понятия статики:

Материальная точка – это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях конкретной задачи.

Механическая система – это совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависят от положения и движения всех остальных точек. Если с течением времени расстояния между точками системы не меняются, механическая система называется неизменяемой.

Частным случаем неизменяемой механической системы является главная модель классической механики – ***абсолютно твердое тело,*** то есть тело, которое под действием сил не деформируется.

Такой подход упрощает решение статических задач. Изучив равновесие абсолютно твёрдого тела, можно переходить к навыкам решения задач, связанные с реальным (деформируемым) телом.

1.3. Сила

Сила – это ***мера механического взаимодействия материальных тел***.

Сила – величина векторная и характеризуется: численным значением, направлением, точкой приложения. Её числовое значение называют ***м****одулем* (абсолютной величиной) *вектора силы*. Прямую линию, по которой направлен вектор силы, называют *линией* ***n-n*** *действия силы* (рис. 1.1). Единица измерения силы (в системе СИ) – ньютон (Н) – это сила, сообщающее телу массой 1 кг в направлении её действия ускорение 1 м/с^2. Кратные и дольные единицы силы получают путём умножения или деления основной единицы на степень числа 10, например, мега (М) – на 10^6, микро (мк) – на 10^{-6} и т.д.

Графически силу изображают отрезком прямой линии со стрелкой в направлении действия силы в масштабе {[μ_F] = Н/мм} с началом действия силы в точке ***A*** и окончанием в точке ***B***. Тела, взаимно связанные между собой каким-либо образом, называют системой тел. Силы взаимодействия между этими телами называют *внутренними* силами, а силы, действующие на систему из вне, называют *внешними* силами. В основе статики абсолютно твёрдого тела лежат аксиомы, отражающие реальную действительность и подтверждённых инженерной практикой, поэтому носящих характер законов.

Согласно I-му закону Ньютона, всякое тело сохранят состояние покоя или прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока какие-либо внешние силы не выведут его из этого состояние. Это положение очевидно и принимается без доказательств, т.е., это *аксиома инерции*, которая характеризуется *инертностью* тела.

Согласно III-му закону Ньютона, силы взаимодействия между двумя телами равны по модулю и противоположно направлены – это *аксиома действия и противодействия*. Из неё следует, что силы всегда парные, но они не всегда уравновешивают *систему* (совокупность) *сил*, так как могут быть приложены к разным телам этой системы. Если эта система не изменяет механическое состояние *системы тел*, то она уравновешена. Условие равновесия двух сил состоит в том, чтобы они были равны по модулю и действовали по одной прямой линии в разные стороны – *аксиома двух сил*. Это равновесие не нарушится, если добавить или отнять действие уравновешенных сил – *аксиома присоединения и отбрасывания уравновешенной системы*.

Следствие из этих аксиом: механическое состояние твёрдого тела не изменится, если действующую на неё силу перенести вдоль линии её действия: сила – это *вектор скользящий* для понятий механики недеформированного тела. Для механики деформированного тела такое понятие не допускается. Две силы *эквивалентны* (равноценны), если они равны по модулю и действуют по одной прямой в одну сторону. Одну силу, эквивалентную системе действующих сил, называют *равнодействующей* силой, а силы этой системы действующих называют *составляющими* силами. Силу, которая уравновешивает систему сил, называют *уравновешивающей* силой. Равнодействующая и уравновешивающая силы одной системы равны по модулю и направлены в разные стороны.

Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.2) и равна ей по модулю – *аксиома параллелограмма*.

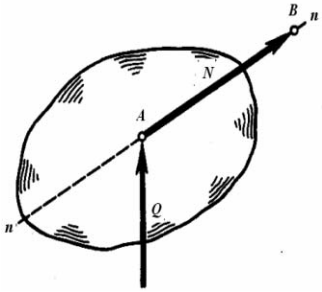


Рис. 1.1. Изображение сил на схеме

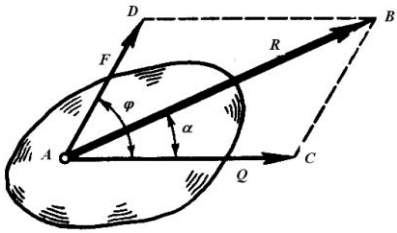


Рис. 1.2. Равнодействующая сила ***R***

Если при действии заданной системы сил деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие не нарушится при превращении этого тела в абсолютно твёрдое тело – *аксиома затвердевания* (принцип Стевина). Так, если звенья гибкой цепи сварить друг с другом, превратив цепь в монолитное тело. Из этого следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу, должны соблюдаться и при равновесии деформируемого тела. Для твёрдого тела условием равновесия действующих сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, согласно уравнению $\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = 0$, является: $\boldsymbol{F_1} = -\boldsymbol{F_2}$. Для гибкой нити этого условия недостаточно, поскольку силы должны не только растягивать, но и сжимать нить.

Тело, называется ***свободным***, если под действием сил оно может перемещаться в любом направлении пространства. Тело называется ***несвободным***, если по каким-то направлениям свобода перемещений его ограничена.

Твердые и гибкие тела, ограничивающие свободу перемещения и делающие его несвободным, называются в механике ***связями***.

Сила, с которой связь воздействует на несвободное тело, препятствуя ему двигаться в каком-то направлении, называется ***силой реакции связи*** (реакцией). Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда бы тело двигалось при отсутствии связи.

В задачах статики, посвященных равновесию несвободных тел, постоянно приходится определять направления реакций связей. Поэтому рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы связей и направления их реакций.

Гладкая опорная поверхность (поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь – контакт). Реакция $\boldsymbol{N}$ такой связи направлена по общей нормали к обеим соприкасающимся поверхностям. Если одна из двух соприкасающихся поверхностей *1*, *2* вырождается в точку, то реакция направляется по нормали ко второй поверхности (рис. 1.3).

Гибкий элемент (нить, трос и т.п.) работает только на растяжение. Реакция $\boldsymbol{S}$ в нити направлена вдоль её оси от тела ***1*** к сечению $\boldsymbol{A\text{-}A_1}$ (рис.1.4).

Тонкий однородный стержень. Реакция N в стержне направлена вдоль его оси от тела B к сечению A-A_1. В случае криволинейного стержня *2* его заменяют прямолинейным с направленной реакцией N_2 (рис. 1.5).

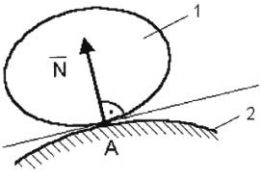


Рис. 1.3. Контакт

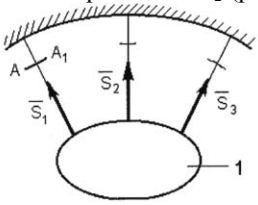


Рис. 1.4. Гибкий элемент

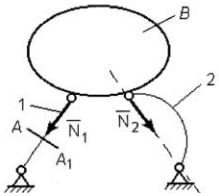


Рис. 1.5. Стержень

Неподвижный цилиндрический шарнир (рис. 1.6) имеет реакцию R_A неизвестного направления, поэтому её раскладывают на составляющие X_A и Y_A, направленные вдоль соответствующих осей x и y. Подвижный цилиндрический шарнир (рис. 1.7) имеет реакцию R_B, которая всегда направлена перпендикулярно опорной поверхности. Подшипник (цилиндрический пространственный шарнир) – опора вала (рис. 1.8) имеет по две составляющей реакции – X_A, Z_A и X_B, Z_B. В петле (рис. 1.9) также две составляющей реакции – X_A, Z_A и X_B, Z_B.

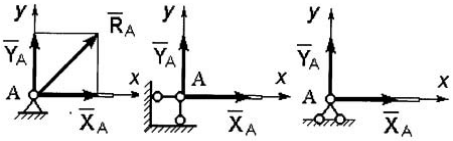


Рис. 1.6. Неподвижный шарнир

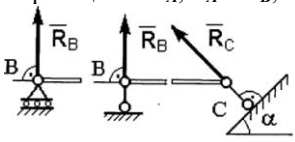


Рис. 1.7. Подвижный шарнир

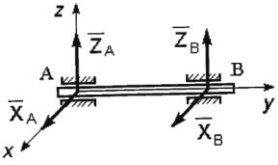


Рис. 1.8. Подшипник

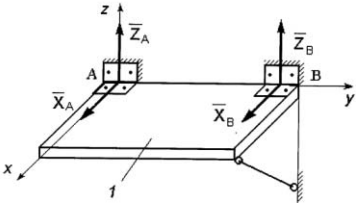


Рис. 1.9. Петля

Сферический (шаровой) шарнир (рис. 1.10) имеет три составляющие реакции X_A, Y_A, Z_A. Плоская жёсткая заделка (рис. 1.11) имеет две составляющие реакции X_A, Y_A и момент M_A пары сил, препятствующий повороту балки *1* относительно точки A.

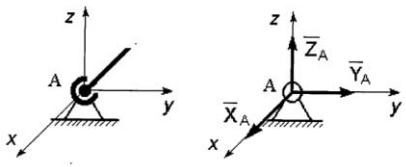


Рис. 1.10. Шаровой шарнир

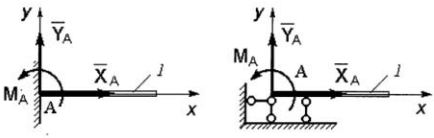


Рис. 1.11. Жёсткая заделка

Пространственная жёсткая заделка (рис. 1.12) имеет три составляющие реакции $\boldsymbol{X_A}$, $\boldsymbol{Y_A}$, $\boldsymbol{Z_A}$ и три момента пар сил $\boldsymbol{M_{AX}}$, $\boldsymbol{M_{AY}}$, $\boldsymbol{M_{AZ}}$.

Вертикальный вал (рис. 1.13) имеет цилиндрический подшипник – опора $\boldsymbol{A}$, где две составляющие реакции – $\boldsymbol{X_A}$ и $\boldsymbol{Y_A}$, а также упорный подшипник $\boldsymbol{B}$, где три составляющие реакции – $\boldsymbol{X_B}$, $\boldsymbol{Y_B}$, $\boldsymbol{Z_B}$.

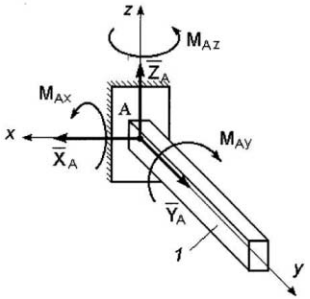


Рис. 1.12. Пространственная заделка

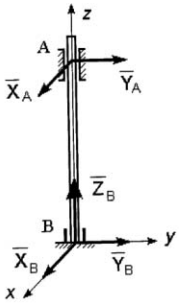


Рис. 1.13. Вертикальный вал

Аксиома связей (принцип освобождения от связей) – несвободное твёрдое тело можно рассматривать как свободное, если убрать связи и заменить силами реакции их действие на тело. Реакция связи рассматривается как внешняя сила.

1.4. Система сходящихся сил

Силы называют ***сходящимися***, если линии их действия пересекаются в одной точке. Перенеся силы по линии их действия, можно привести систему сходящихся сил к системе сил, приложенных в одной точке. Задача о сложении сил, приложенных к телу в одной точке, решается на основании аксиомы параллелограмма или правила треугольника, изображающего любую половину параллелограмма. Между элементами силового треугольника соотношения определяют известными из тригонометрии формулами (теоремы косинусов и синусов), учитывая, что $cos(180^0 - \varphi) = -cos\varphi$ и $sin(180^0 - \varphi) = sin\varphi$ (рис. 1.2).

$$R = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2FQcos\varphi},$$

$$\frac{F}{sin\alpha} = \frac{Q}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{R}{sin\varphi}.$$

Пример 1.1. Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сил $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q} = 5$ Н, образующих между собой угол $\boldsymbol{\alpha} = 45^0$:

$$R = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2FQcos\varphi} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times cos45^0} = 9{,}24\ H.$$

Пример 1.2. Определить угол $\boldsymbol{\beta}$ между равнодействующей двух сил $\boldsymbol{R}$ и осью $\boldsymbol{Ox}$, если $\boldsymbol{F_1}$=10 Н и направлена под углом $\boldsymbol{\alpha} = 30^0$ к оси $\boldsymbol{x}$ в первом квадранте системы координат, а $\boldsymbol{F_2} = 8$ Н и имеет положительное направление вдоль оси $\boldsymbol{y}$. Рисунок выполнить самостоятельно.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \times F_2^2 cos(F_1; F_2)}.$$

$$R = \sqrt{10^2 + 8^2 + 2 \times 10 \times 8 \times cos(60^0)} = 15{,}62\ H.$$

Угол между векторами действующих сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ равен 60^0. Искомый угол обозначим $\beta = \alpha + \gamma$, где γ – угол между равнодействующей $\boldsymbol{R}$ и вектором силы $\boldsymbol{F_1}$. Из теоремы синусов имеем:

$$sin\gamma = \frac{F_2 \sin 120^0}{R} = \frac{8 \times sin120^0}{15{,}62} = 0{,}443.$$

$$\gamma = arcsin\ 0{,}443 = 26{,}295^0. \quad \beta = \alpha + \gamma = 30^0 + 26{,}295^0 = 56{,}295^0.$$

Задание 1.1. Равнодействующая $\boldsymbol{R}$ двух равных по модулю сходящихся сил $\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{F_2} = 15$ Н направлена по оси $\boldsymbol{Oy}$ и равна по модулю 10 Н. Определить в градусах угол $\boldsymbol{\alpha}$, образованный вектором силы $\boldsymbol{F_2}$ с положительным направлением оси $\boldsymbol{Ox}$ (рис. 1.14). Ответ: $19{,}5^0$.

Задание 1.2. Определить угол в градусах между равнодействующей двух сил $\boldsymbol{F_1} = 10$ Н и $\boldsymbol{F_2} = 8$ Н и осью $\boldsymbol{Ox}$ (рис. 1.15), если угол $\boldsymbol{\alpha} = 19{,}5^0$.Ответ: $56{,}3^0$.

Задание 1.3. Определить модуль равнодействующей сходящихся сил $\boldsymbol{F_1} =$ 10 Н, $\boldsymbol{F_2} = 15$ Н и $\boldsymbol{F_3} = 20$ Н, если известны углы, образованные векторами этих сил с осью $\boldsymbol{Ox}$: $\boldsymbol{\alpha_1} = 30^0$, $\boldsymbol{\alpha_2} = 45^0$ и $\boldsymbol{\alpha_3} = 60^0$ (рис. 1.16). Ответ: 44,1 Н.

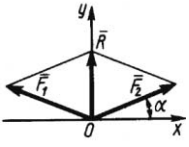


Рис. 1.14

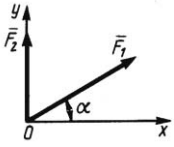


Рис. 1.15

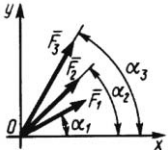


Рис. 1.16

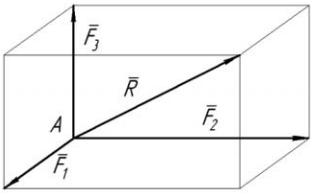


Рис. 1.17. Сумма 3-х сил

Равнодействующая $\overline{R}$ трёх сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, не лежащих в одной плоскости, определяется диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, как результат двукратного применения правила параллелограмма – это правило параллелепипеда (рис.1.17).

Для любой системы (рис.1.18, *а*) сил главный вектор определяется последовательным сложением системы по правилу параллелограмма или построением силового многоугольника. Этот способ является более простым и удобным (рис.1.18, *б*). Для определения главного вектора $\overline{R}$ откладывается от произвольной точки *O* в определенном масштабе силу $\overline{F_1}$. Затем к концу вектора $\overline{F_1}$ прикладываем начало вектором $\overline{F_2}$. К концу вектора $\overline{F_2}$ начало вектора $\overline{F_3}$ и т.д. Соединяя начало первого вектора с конца последнего $\overline{F_n}$, получим вектор $\overline{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 \ldots + \overline{F}_n \ .$$

Равнодействующая системы сходящихся сил приложена в точке их пересечения, равна их геометрической сумме и определяется по модулю и направлению векторов, замыкающих ломаную линию, звеньями которых являются векторы, геометрически равные силам системы. Это правило силового многоугольника. Модуль и направление равнодействующей не зависят от принятого порядка построения векторов на силовом многоугольнике. Правило силового многоугольника справедливо как для плоской, так и для пространственной системы сил.

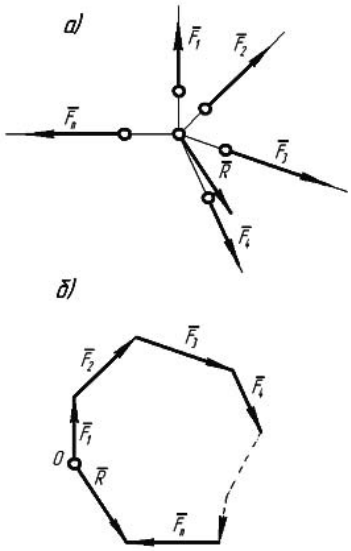


Рис. 1.18. Силовой многоугольник

Проекцией силы на ось координат называют скалярную величину, равную произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

В частности, если $\alpha < 90^0$, то $F_x = F \times \cos\alpha$, если $\alpha > 90^0$, то $F_x = -F \times \cos(180^0 - \alpha)$; если $\alpha = 90^0$, то $F_x = 0$. Это отрезок оси, заключённый между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы (рис. 1.19).

Если направление проекции силы совпадает с положительным направлением оси, то проекция считается положительной, и наоборот. Аналитический способ задания силы заключается в том, что должны быть заданы координаты точки приложения силы и три проекции силы на оси координат.

Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая $\boldsymbol{R}$ этой системы (суммы проекций всех сил на три координатные оси) равнялась нулю: $\boldsymbol{R} = 0$ ($\Sigma F_{ix} = 0$; $\Sigma F_{jy} = 0$; $\Sigma F_{kz} = 0$).

Геометрические условия равновесия заключаются в том, что равнодействующая $\boldsymbol{R}$ является вектором, замыкающим силовой многоугольник, построенный на силах системы – имеется в виду, что совпадение начала первой стороны многоугольника с окончанием последней стороны.

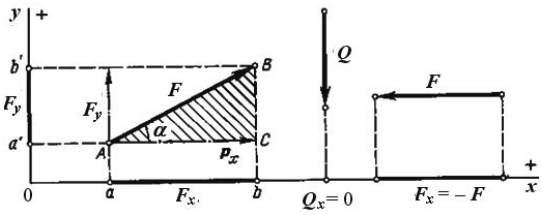


Рис. 1.19. Проекции сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{Q}$ на оси $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$

Таким образом, для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы, был замкнут.

Если в плоскости действует уравновешенная система трёх не параллельных сил, то их линии действия пересекутся в одной точке – это результат доказательства теоремы о трёх силах.

1.5. Алгоритм решения задач на равновесие сходящихся сил

Задачи статики на равновесие решаются следующим образом.

А. Выбирают ***объект равновесия***. Надо выбрать такое тело (точку) из всей системы, чтобы анализ его равновесия позволил решить данную конкретную задачу.

Б. К выбранному объекту равновесия прикладываются все действующие на него силы – активные и силы реакции связей. Силы, не действующие на объект, изображать не нужно.

В. К полученной системе сил, действующих на объект, применяют условия равновесия в геометрической или аналитической форме. Геометрический метод решения задачи применяют в случае, если на объект действует плоская система трех сходящихся сил; при этом строится и затем решается (графически или геометрически) замкнутый силовой треугольник. Аналитический метод применяют в случае, если число действующих на объект сил больше трех, или если силы не лежат в одной плоскости.

Г. Определяют искомые величины и исследуют полученные результаты.

Пример 1.3. В точке ***C***, находящейся в середине балки ***AB***, приложена сила $\overline{F}$ под углом $\boldsymbol{\alpha}$ к балке (рис. 1.20). Найти реакцию опор ***A*** и ***B***, пренебрегая весом балки.

Решение. 1. Объект равновесия – балка.

2. На балку действуют три силы: активная сила $\overline{F}$, известная и по модулю, и по направлению, и две реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$, из которых $\overline{R}_A$ неизвестна ни по модулю, ни по направлению (шарнирная опора), а $\overline{R}_B$ известна по направлению – подвижная (катковая) опора.

3. Применяя к действующей на балку уравновешенной системе трех сил теорему о трех силах, устанавливаем точку ***K*** пересечения сил $\overline{F}$ и $\overline{R}_B$. Через эту же точку должна пройти реакция $\overline{R}_A$, следовательно, $\overline{R}_A$ будет направлена по прямой ***AK***.

4. Задачу решаем геометрическим методом, т. е. строим замкнутый силовой треугольник (справа) для трех сил $\overline{F}$, $\overline{R}_B$ и $\overline{R}_A$, сходящихся в точке ***K***. Построение треугольника начинаем с известной силы $\overline{F}$, а затем через конец и начало вектора $\overline{F}$ проводим прямые, параллельные линиям действия сил $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ до их взаимного пересечения. После этого расставляем стрелки на сторонах силового треугольника, с учётом того, что стрелки не должны стыковаться друг с другом.

5. Решаем силовой треугольник. Это можно осуществить либо графически, с помощью некоторого масштаба, в котором построен вектор $\overline{F}$, либо сило-

вой треугольник разрешается средствами геометрии или тригонометрии – такое решение не дает погрешностей, свойственных графическому методу.

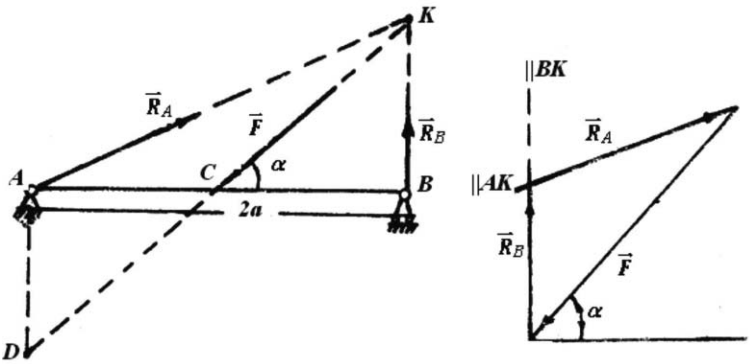


Рис. 1.20. Решение примера 1.3

На рис. 1.20 представлен треугольник ***ADK***, подобный силовому треугольнику. В Δ***ADK*** имеем:

$$AD = AC \times tg\alpha = a \times tg\alpha; \quad DK = 2a : cos\alpha.$$

Из подобия силового треугольника и Δ***ADK*** получим:

$$R_B/F = AD/DK, \text{ отсюда: } R_B = 0{,}5F sin\alpha.$$

По теореме косинусов:

$$R_A = \sqrt{R_B^2 + F^2 - 2R_d \cos(90^0 - \alpha)} = 0{,}5F\sqrt{4 - 3sin^2\alpha}.$$

Пример 1.4. Два стержня ***AC*** и ***BC*** соединены между собой и опорами посредством шарниров. К шарниру ***C*** подвешен груз ***P*** = 100 Н и привязана веревка, перекинутая через блок ***D***. К свободному концу веревки подвешен груз ***Q*** = 200 Н (рис. 1.21). Пренебрегая весом стержней и трением в блоке, найти усилия в стержнях.

Решение. 1. Объект равновесия – узел (точка) ***C***.

2. На узел ***C*** действуют 4 силы: активная ***P***, натяжение веревки ***T*** и реакции $\boldsymbol{S_{AC}}$ и $\boldsymbol{S_{BC}}$ стержней. Так как блок идеальный (без учета трения), то ***T*** = ***Q*** = 200 Н.

3. Решаем задачу аналитически. Выбрав оси координат, как показано на рисунке, имеем уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = S_{AC} - S_{BC}cos30^0 - Tcos60^0 = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = S_{BC}cos30^0 + Tcos30^0 - P = 0.$$

Благодаря удачному выбору координатных осей, второе уравнение содержит только одно неизвестное $\boldsymbol{S_{BC}}$. Находим его:

$$S_{BC} = \frac{P - Tcos30^0}{cos60^0} = -146 \text{ Н}.$$

Этот результат подставляем в первое уравнение и определяем $\boldsymbol{S_{AC}}$:

$$S_{AC} = Fcos60^0 + S_{BC}cos30^0 = -26{,}3 \text{ Н}.$$

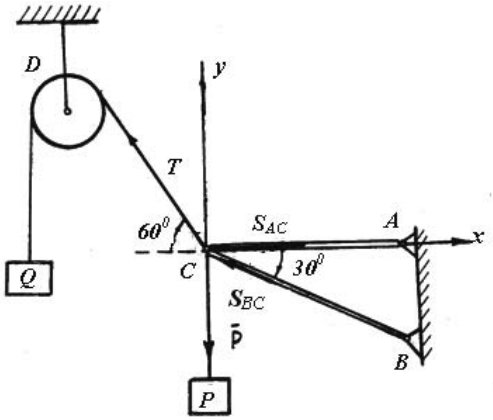


Рис. 1.21. Решение примера 1.4

Знаки минусов позволяют скорректировать результат.

Действительное направление реакций стержней противоположно выбранному на схеме направлению (рис. 1.21).

Задание 1.4. Груз весом 2 Н удерживается в равновесии двумя верёвками ***AC*** и ***BC***, расположенными в вертикальной плоскости (рис. 1.22). Определить натяжение верёвки ***BC***, если угол $\alpha = 30^0$. Ответ: 2,309 Н.

Задание 1.5. Найти модуль реакции стержня ***AC***, удерживающего в равновесии груз *1* весом 14 Н с помощью цепи, намотанной на барабан ***D*** и перекинутой через блок ***C***, если угол $\alpha = 30^0$ (рис. 1.23). Ответ: 24,249 Н.

Задание 1.6. Грузы весом G_1, G_2, G_3, находятся в равновесии. Известны вес груза $G_2 = 55$ Н и углы $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$ (рис. 1.24). Определить вес груза G_3. Ответ: 61,44 Н.

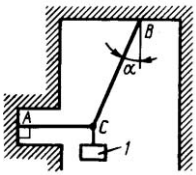


Рис. 1.22

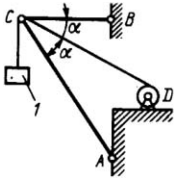


Рис. 1.23

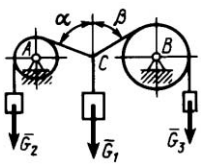


Рис. 1.24

1.6. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки – это вектор, равный векторному произведению вектора $\bar{r}$, проведенного из заранее выбранной точки пространства (точка ***A***) в точку приложения силы (точка 0) и вектора самой силы ($\bar{F}$ на рис. 1.25).

$$\overline{M} = \bar{r} \times \bar{F} .$$

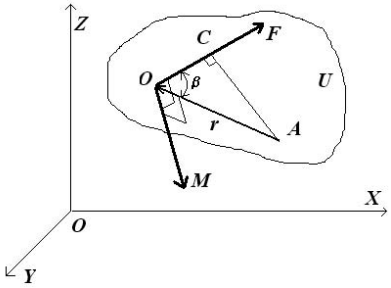


Рис. 1.25. Изображение момента силы относительно точки

Заранее выбранная точка, относительно которой определяется момент силы, называется центр момента (точка ***A*** на рис.1.25).

Проведем плоскость (***U*** на рис. 1.25), проходящую через вектора $\bar{r}$ и $\bar{F}$. По свойствам векторного произведения вектор момента будет перпендикулярен этой плоскости и его модуль равен

$$\left|\bar{M}\right| = \left|\bar{r}\right| \cdot \left|\bar{F}\right| \cdot \sin(\overset{\frown}{\bar{r}\,\bar{F}})$$

где $\overset{\frown}{\bar{r}\,\bar{F}}$ – это угол между векторами (угол $\boldsymbol{\beta}$ на рис. 1.25).

Знак момента определяется согласно правилу векторного произведения. В дальнейшем будем руководствоваться следующим правилом: момент считается положительным, если сила пытается повернуть конструкцию относительно центра момента против часовой стрелки.

Проведем перпендикуляр из выбранной точки (в данном случае это ***A***) к линии действия силы (на рис. 1.25 это линия ***AC***). Рассмотрим $\triangle$***AOC***. Он прямоугольный и, следовательно, имеем:

$$\left|\bar{r}\right| \cdot \sin(\overset{\frown}{\bar{r}\,\bar{F}}) = AC \text{ , то есть: } \left|\bar{M}\right| = \left|\bar{F}\right| \cdot AC \text{ .}$$

Плечо – это кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от выбранной точки до линии действия силы. Величина момента силы (модуль момента силы) равна произведению модуля силы на плечо. Два вектора называются ***коллинеарными***, если их линии действия параллельны.

При рассмотрении плоских задач вектор момента по свойствам векторного произведения всегда перпендикулярен плоскости действия сил и, следовательно, все вектора моментов ***коллинеарны***. Поэтому в плоских задачах можно считать момент скалярной величиной и складывать моменты чисто алгебраически.

1.7. Момент силы относительно оси

Вектор момента силы относительно выбранной точки можно представить своими компонентами $\bar{M} = (M_X, M_Y, M_Z)$. Компоненты разложения вектора $\bar{M}$ по осям координат M_X, M_Y, M_Z называют моментами силы относительно соот-

ветственно осей ***x, y*** и ***z*** (рис. 1.26).

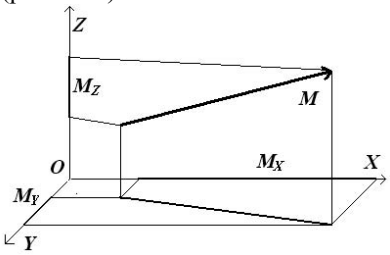


Рис. 1.26. Изображение момента силы относительно оси

Определяется момент силы относительно оси следующим образом: мысленно проводится любая плоскость, перпендикулярная оси; проектируется сила на эту плоскость; определяется момент проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости.

Рассмотрим рис. 1.27. Допустим, надо определить момент силы $\bar{F}$ относительно оси ***z***. Проводим плоскость, перпендикулярную оси ***z*** (на рис. 12 это горизонтальная плоскость ***xoy***). Проектируем вектор $\bar{F}$ на эту плоскость (на рисунке это вектор $\bar{F}'$). Определяем момент вектора $\bar{F}'$ относительно точки пересечения оси ***z*** и плоскости ***xoy*** (т.е. точки ***O***). Он равен $M_z = \left|\bar{F}'\right| \cdot OK$.

Теорема Вариньона: «Сумма моментов сил относительно выбранной точки равна моменту равнодействующей этих сил относительно той же точки».

Доказательство. Если к заданной системе сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$,..., $\bar{F}_n$, имеющих равнодействующую $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n$ добавить силу $\bar{R}'$, которая равна по величине, но противоположно направлена и лежит на одной прямой с их равнодействующей $\bar{R}' = -\bar{R}'$, то получим уравновешенную систему сил. Следовательно, по условию равновесия сумма моментов всех этих сил будет равна нулю, т.е.:

$$\overline{M}(\bar{F}_1) + \overline{M}(\bar{F}_2) + \ldots + \overline{M}(\bar{F}_n) + \overline{M}(\bar{R}') = 0 ,$$

но поскольку $\overline{M}(\bar{R}') = -\overline{M}(\bar{R})$, в силу определения силы $\bar{R}'$, то

$$\overline{M}(\bar{R}) = \overline{M}(\bar{F}_1) + \overline{M}(\bar{F}_2) + \ldots + \overline{M}(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i .$$

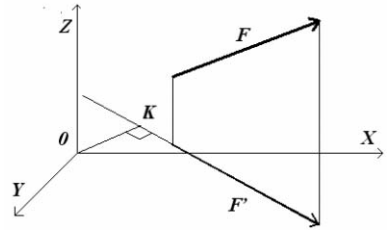


Рис. 1.27. Определение момента вектора

1.8. Пара сил

Пара сил – это две силы, равные по величине, противоположные по направлению и лежащие на параллельных прямых (рис. 1.28).

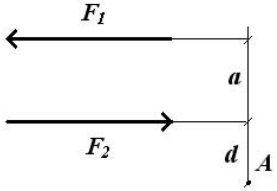


Рис. 1.28. Пара сил

Момент пары сил – это сумма моментов каждой из сил составляющих пару.

Две пары сил будут эквивалентны, если равны их моменты.

Теорема: «Момент пары сил есть величина постоянная и равная моменту одной из сил, составляющих пару, относительно любой точки, лежащей на линии действия другой силы».

Доказательство. Рассмотрим пару сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (рис. 13). Выбираем произвольную точку ***A*** и определяем момент пары сил относительно этой точки:

$$M = M_1 + M_2 = \left|\overline{F_1}\right| \cdot (d + a) - \left|\overline{F_2}\right| \cdot d =$$

$$= \left|\overline{F_1}\right| \cdot d + \left|\overline{F_1}\right| \cdot a - \left|\overline{F_2}\right| \cdot d = \left|\overline{F_1}\right| \cdot a$$

поскольку $\left|\overline{F_1}\right| = \left|\overline{F_2}\right|$ и точка выбиралась произвольно, теорема доказана.

Пары сил обладают следующими свойствами.

А. Пару сил можно свободно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия. **Б**. Пару сил можно переносить в любую точку твердого тела, сохраняя параллельность плоскостей действия пар. **В**. Пару сил всегда можно заменить другой парой сил, изменив обратно пропорционально расстояние между силами.

1.8. Условие равновесия произвольной системы сил

Лемма Пуансо: «Силу, действующую на данное тело можно переносить параллельно самой себе в любую точку тела, добавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту исходной силы относительно новой точки ее приложения».

Доказательство. Рассмотрим силу $\overline{F}$, действующую на тело в точке ***A*** (рис. 1.29, а). Добавим в некоторой другой точке тела, например ***B***, две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, такие, что $\left|\overline{F_1}\right| = \left|\overline{F_2}\right|$ и линии действия сил параллельны (рис. 1,29, б). Очевидно, что $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ представляют собой уравновешенную систему сил и, следовательно, состояние покоя тела не нарушится. Но силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F}$ образуют пару сил, и мы получаем систему, у которой имеется сила $\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{F_2}\right|$, приложенная в точке ***B***, и пара сил с некоторым моментом ***m*** (рис. 1.29, в), а равновесие тела сохраняется.

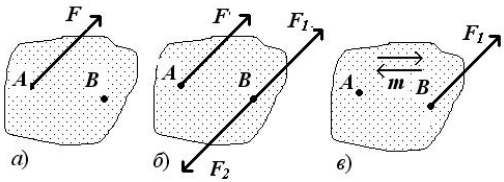


Рис. 1.29. Доказательство леммы Пуансо

Главный вектор – это сумма всех сил, действующих на рассматриваемую систему тел. Главный момент – это сумма моментов всех сил, действующих на рассматриваемую систему тел, относительно выбранного центра.

Теорема: «Любую систему сил, действующих на данное тело, можно свести к действию одной силы, приложенной в любой наперед выбранной точке тела, и одной пары сил».

Доказательство. Рассмотрим тело, на которое действует произвольная система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ и пар сил с моментами $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_k$ (рис. 1.30, а). Выбираем любую точку этого тела, например ***O***. Перенесем все силы в эту точку. Необходимо добавить соответствующее количество пар сил с моментами $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ (рис. 1.30, б). Поскольку все силы собраны теперь в одной точке, их можно сложить как векторы. В результате получим главный вектор системы

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

а также, используя свойства пар сил, можем сложить все действующие моменты пар сил и получим главный момент (рис. 1.30, в).

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i + \sum_{j=1}^{k} \overline{m}_j$$

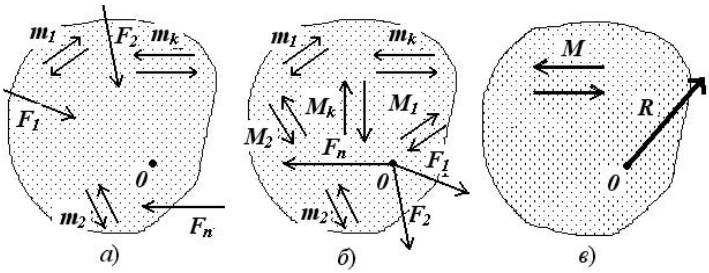


Рис. 1.30. Доказательство теоремы о приведении системы сил

Для того, чтобы тело под действием произвольной системы сил находилось в равновесии необходимо, чтобы главный вектор равнялся нулю и главный момент относительно произвольной точки тоже был равен нулю. Из этого следует, что при решении задач необходимо руководствоваться тем, что для равновесия тел необходимо $\overline{R} = 0$ и $\overline{M} = 0$ или же, спроектировав эти векторные равенства на соответствующие оси координат, получим систему из 6 уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0; \\ \sum\limits_i F_{iy} = 0; \\ \sum\limits_i F_{iz} = 0; \\ \sum\limits_i M_{ix} = 0; \\ \sum\limits_i M_{iy} = 0; \\ \sum\limits_i M_{iz} = 0. \end{cases}$$

1.10. Формы уравнений равновесия

В случае плоской системы сил (система координат ***x*** и ***y***) будет три уравнения равновесия. Их можно представить в различных формах.

Для того, чтобы плоское тело находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех действующих сил на каждую из координатных осей была равна нулю и сумма моментов всех сил относительно произвольно выбранной точки тоже была равна нулю. I-я форма уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0; \\ \sum\limits_i F_{iy} = 0; \\ \sum\limits_i M_{iA} = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы плоское тело находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно двух различных произвольно выбранных точек была равна нулю и сумма проекций сил относительно любой оси, не перпендикулярной линии, соединяющей эти две точки, тоже была равна нулю. II-я форма уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0; \\ \sum\limits_i M_{iA} = 0; \\ \sum\limits_i M_{iB} = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы плоское тело находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно трех различных произвольно выбранных точек, не лежащих на одной прямой, была равна нулю. III-я форма уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_i M_{iA} = 0; \\ \sum_i M_{iB} = 0; \\ \sum_i M_{iC} = 0. \end{cases}$$

1.11. Равновесие с учётом трения

В местах контакта реальных тел возникает сила, сопротивляющаяся взаимному смещению контактирующих поверхностей. Это ***сила трения***. Она всегда направлена по касательной к контактирующим поверхностям и всегда стремится препятствовать суммарной внешней силе.

Важнейшее свойство сил трения – это то, что они не могут вызывать движение. При отсутствии внешних сил сила трения всегда равна нулю. При достаточно малой суммарной внешней силе сила трения будет в точности равна ей по модулю и противоположна по направлению. При возрастании внешних сил, сила трения может их компенсировать только до определенного момента, а затем состояние равновесия тела нарушается и оно приходит в движение.

Состояние тела, когда малейшее увеличение внешней силы вызовет нарушение равновесия тела, называют предельным равновесием, а сила трения, действующая на тело в этот момент времени предельной силой трения.

Величина предельной силы зависит от многих факторов: от материала контактирующих тел, от чистоты обработки контактирующих поверхностей, от температуры окружающей среды и т.д., но в первом приближении можно определить предельную силу трения как

$$F_{TP}^{ПРЕД} = k \times N,$$

где k – безразмерный коэффициент трения, зависящий только от материала контактирующих тел и определяемый экспериментально; N – величина нормального давления между контактирующими поверхностями.

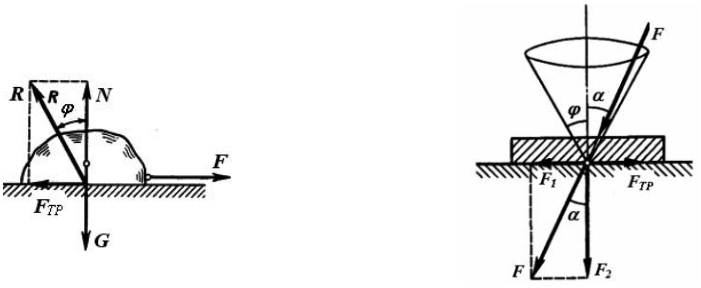
Рассмотрим предельное равновесие тела (пренебрегая его собственным весом), покоящегося на шероховатой поверхности и к которому приложена некоторая сила F (рис. 1.31, а).

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{TP}^{ПРЕД} - P \cdot \sin\beta = 0, \\ N - P \cdot \cos\beta = 0. \end{cases}$$

Если учесть определение предельной силы трения, то силу N можно определить следующим образом: $k \times F \times \cos\beta - F \times \sin\beta = 0$. Поскольку $F \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$, то в случае предельного равновесия должно выполняться равенство: $k = tg\beta$ или $\beta = arctg(k)$. Угол, определяемый этим соотношением, называют ***предельным углом трения***. Если к телу прикладывать какую угодно большую силу, но под углом меньшим предельного угла β, то нарушить состояние покоя тела невозможно. Если рассмотреть пространственную задачу, то получим ***предельный конус трения***

(рис. 1.31, б), показывающий, что, если сила действует внутри этого конуса, тело сохранит состояние покоя. В технике такое явление называют ***заклиниванием механизма***.



А *б*

Рис. 1.31. Равновесие тела на шероховатой поверхности и конус трения

Рассмотрим цилиндрическое тело, покоящееся на шероховатой поверхности. К нему приложена некая внешняя сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 1.32, а).

Очевидно, что силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F_{TP}}$ образуют пару сил с моментом $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$, который ничем не компенсирован, следовательно, при любой малой силе $\boldsymbol{F}$ должно начинаться движение тела. Но на практике это не так. Тело начнет движение только при определенном значении силы $\boldsymbol{F}$. Этот парадокс объясняется тем, что у реальных тел контакт осуществляется не в точке, а всегда по определенной поверхности и поэтому реакцию $\boldsymbol{N}$ необходимо прикладывать не к середине поверхности контакта, а на ее краю (рис. 1.32, б). В этом случае силы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{G}$ образуют пару сил, противодействующую паре $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F_{TP}}$.



А *б*

Рис. 1.32. Схемы к определению трения качения

Момент пары сил $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{G}$ называют ***моментом трения качения***, а в случае предельного равновесия это будет ***предельный момент трения качения***, определяемый как

$$M_{TP}^{ПРЕД} = \lambda \times N,$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – коэффициент трения качения, зависящий только от материала контактирующих тел, определяемый экспериментально и имеющий линейную единицу размерности.

Физический смысл коэффициента трения качения заключается в том, что он представляет собой полуширину поверхности контакта (рис. 3.2, б). Также как и

силы трения скольжения, силы трения качения всегда противодействуют суммарному моменту внешних сил. Для реальных материалов, которые используются в технике, $\lambda << k \times r$, и потери энергии при трении качения меньше, чем при скольжении, поэтому там, где возможно, стремятся заменять скольжение качением.

При решении задач на трение после определения реакций связи, включающих $\boldsymbol{F_{TP}}$ и $\boldsymbol{M_{TP}}$, необходимо дополнительно проверять выполнение условий:

$$\left|F_{TP}\right| \le F_{TP}^{ПРЕД}$$

$$\left|M_{TP}\right| \le M_{TP}^{ПРЕД} \quad .$$

Если эти условия не выполняются, то равновесие невозможно.

Пример 1.5. Однородный стержень ***AB*** длиной 10 *м* и массой $\boldsymbol{G}$ = 2000 Н опирается на гладкую стенку ***OA***, а концом ***B*** – на шероховатую горизонтальную поверхность. При каком коэффициенте трения $\boldsymbol{f}$ стержень будет находиться в том положении, которое указано на рис. 1.33, если на него действует сила $\boldsymbol{F}$ = 1000 Н?

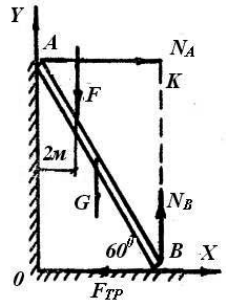


Рис. 1.33. Стержень

Решение.

1. Объект равновесия – стержень. На него действуют силы: активные – $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{F}$; реакции нормальные – $\boldsymbol{N_A}$ и $\boldsymbol{N_B}$ и сила трения $\boldsymbol{F_{TP}}$. Коэффициент трения находим из неравенства: $\boldsymbol{F_{TP} \le f N_B}$.

2. Силу трения найдём из уравнений равновесия:

$$\Sigma M_K = 3F + 2{,}5\ G - F_{TP} \times 10 \times sin60^0 = 0,$$

откуда F_{TP} = 924 Н;

$$\Sigma F_Y = -F - P + N_B = 0,$$

откуда $N_B = F + P$ = 3000 Н.

3. Находим искомое значение: $\boldsymbol{f} \ge F_{TP}/ N_B$, т.е. $\boldsymbol{f} \ge$ 0,308.

Задание 1.6. По лестнице длиной 5 *м*, сила тяжести которой $\boldsymbol{G}$ = 0,15 кН, поднимается человек массой $\boldsymbol{F}$ = 0,7 кН (рис. 1.33). Определить наибольший угол между полом и нижним концом лестницы, при котором не произошло бы её смещение? Коэффициент трения лестницы о пол и стену принять равным 0,5.

1.12. Понятие о статической определимости

Если количество неизвестных в задаче равняется количеству уравнений равновесия, то такая задача называется статически определимой, если больше, то статически неопределимой, если меньше – статически переопределенной. В статике решаются только статически определимые задачи. Из определения понятия состояния покоя следует, что если вся конструкция находится в покое, то и любая ее часть также находится в состоянии покоя. Поэтому для любой части конструкции также можно составлять уравнения равновесия, учитывая при этом, что отброшенная часть конструкции является связью. Разрывать конструкцию следует не в произвольных местах, а там, где имеются внутренние не жесткие связи (например, шарнир внутри конструкции, ползун на направляющей и т.д.). Каждая такая не жесткая связь снимает одну или несколько (в зависимости от конструктивных осо-

бенностей) степеней статической неопределимости. В частности шарнир снимает одну степень статической неопределимости. Если приходится рассматривать равновесие двух взаимодействующих частей конструкции, то следует учитывать, что силы их воздействия друг на друга равны по величине, лежат на одной прямой и противоположно направлены.

1.13. Система параллельных сил

Систему сил, линии действия которых параллельны, называют системой параллельных сил. Лемма: «Две параллельные силы всегда имеют равнодействующую». Доказательство. Рассмотрим две параллельные силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (рис.1.34, а). Выберем некоторую точку ***A***, лежащую между линиями действия этих сил, причем соответствующие расстояния h_1 и h_2 связаны следующей пропорцией: $h_1/h_2 = |\overline{F_1}|/|\overline{F_2}|$. Перенесем силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ параллельно самим себе в точку ***A***. Согласно ранее доказанной теореме, мы получим результирующую $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ и пару сил с моментом $M = |\overline{F_1}| \cdot h_1 - |\overline{F_2}| \cdot h_2$. Правая часть выражения для момента в силу выбора точки ***A*** будет равна нулю, т.е. момент будет отсутствовать, а значит, что $\overline{R}$ будет действительно равнодействующей (рис. 1.34, б). Если силы будут направлены в разные стороны, то доказательство сохраняется с маленьким изменением: точку ***A*** надо выбирать не между линий действия, а со стороны меньшей силы.



А *б*

Рис. 1.34. Доказательство леммы о равнодействующей параллельных сил

Система параллельных сил всегда имеет равнодействующую. К любым двум силам системы, мы получим из системы ***n*** сил систему ***n-1*** сил. Повторив эту процедуру ***n-1*** раз, мы наверняка получим только одну силу, заменяющую всю систему, т.е. равнодействующую. ***Равнодействующая приложена к определенной точке, называемой центр параллельных сил***.

1.14. Координата центра параллельных сил

Рассмотрим систему $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$ параллельных сил (рис. 1.35). Заметим, что силы могут быть направлены и в противоположные стороны. Выберем систему координат таким образом, чтобы одна из осей была перпендикулярна линиям действия этих сил (ось ***x*** на рис. 1.35).