



СИБИРСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

SIBERIAN
FEDERAL
UNIVERSITY

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Учебное пособие

Красноярск
СФУ
2021

УДК 621.3(07)
ББК 34.9я73
Э455

Р е ц е н з е н т ы:

Н. П. Боярская, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретические основы электротехники» Красноярского государственного аграрного университета;

С. М. Плотников, доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов» Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева

Э455 **Электротехника и электроника** : учеб. пособие / А. Ф. Синяговский, В. П. Довгун, В. В. Новиков, И. Г. Важенина. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2021. – 492 с.

ISBN 978-5-7638-4519-8

Рассмотрены методы анализа электронных цепей в установившемся и переходном режимах, элементная база современной микроэлектроники, основы аналоговой и цифровой схемотехники. Приведены примеры расчета аналоговых и цифровых электронных устройств.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 621.3(07)
ББК 34.9я73

ISBN 978-5-7638-4519-8

© Сибирский федеральный университет, 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника». Его основой являются лекции, которые авторы читают в Институте космических и информационных технологий Сибирского федерального университета.

Пособие состоит из трех разделов. В первом (гл. 1–7) даны основы теории электрических цепей в объеме, необходимом для изучения элементной базы электроники, основ аналоговой и цифровой схемотехники. При изложении материала учитывался уровень подготовки студентов, не изучавших до этого дисциплины электротехнического и радиотехнического профиля.

Во втором разделе (гл. 8–10) рассмотрены элементная база электроники, характеристики, параметры и схемы замещения диодов, биполярных и МОП-транзисторов. Сведения по физике полупроводниковых приборов даны в конспективной форме. Особое внимание уделено МОП-транзисторам как основным элементам современной микроэлектроники и принципам создания моделей реальных электронных компонентов. Представлены как простейшие схемы замещения электронных приборов, используемые для приближенных ручных расчетов, так и глобальные модели, применяемые в современных программах схемотехнического моделирования.

В третьем разделе (гл. 11–13) изложены основы аналоговой и цифровой схемотехники. Рассмотрены усилительные каскады на биполярных и МОП-транзисторах, аналоговые фильтры и генераторы периодических колебаний, принципы функционирования таких устройств и вопросы их реализации на интегральных операционных усилителях, а также схемотехника базовых логических элементов на биполярных и МОП-транзисторах, реализация типовых комбинационных и последовательностных цифровых устройств, аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей. Дано описание принципов работы и характеристик базовых логических элементов на комплементарных МОП-транзисторах.

Теоретический материал иллюстрируется примерами расчета типовых устройств обработки аналоговых и цифровых сигналов – усилителей, фильтров, генераторов периодических колебаний, базовых логических элементов. Каждая глава содержит контрольные вопросы для самопроверки.

В конце учебного пособия приведен список литературы, которая может быть использована при углубленном изучении отдельных разделов курса.

Первый раздел учебного пособия (главы 1–7) написан В. П. Довгуном, И. Г. Важениной и В. В. Новиковым, второй и третий раздел (гл. 8–13) – А. Ф. Сияговским и В. П. Довгуном.

Авторы благодарны рецензентам профессору С. М. Плотникову и доценту Н. П. Боярской, конструктивная критика которых способствовала улучшению содержания учебного пособия.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Электротехника и электроника» занимает важное место в базовой подготовке специалистов в области информатики и вычислительной техники. Содержание дисциплины составляет изучение процессов, происходящих в различных электротехнических и электронных устройствах, а также принципов их построения и использования.

Как наука электротехника начала формироваться в середине XIX века. Ее основы заложены в работах Г. Кирхгофа, Г. Ома, М. Фарадея, Дж. Максвелла, Г. Герца. Практическое использование электротехники связано с именами Т. Эдисона, Н. Теслы, П. Н. Яблочкова, М. О. Доливо-Добровольского.

За прошедшие 150 лет электротехника коренным образом изменила жизнь человеческого общества. Электричество стало основой развития промышленности, транспорта, связи, без него невозможна автоматизация производственных процессов. Столь широкому распространению электрической энергии способствовало удобство ее передачи на дальние расстояния и преобразования в другие виды энергии: механическую, тепловую, световую и др.

Первые десятилетия XX века ознаменовались развитием радиоэлектроники – области науки и техники, занимающейся разработкой устройств, предназначенных для передачи и обработки информации.

Началом первого этапа развития радиоэлектроники считается 1904 год, когда английским ученым Д. Флемингом была изготовлена первая электронная лампа – диод. Позднее был создан триод – лампа с управляющим электродом, способная усиливать и генерировать электрические сигналы. Триод стал первым управляемым электронным прибором.

Второй этап развития радиоэлектроники начался в конце 1940-х годов с изобретения американскими учеными У. Браттейном, Д. Бардиным и В. Шокли биполярного транзистора. Новый прибор мог усиливать и генерировать электрические сигналы, а также выполнять функции электронного ключа. За это изобретение его создатели были удостоены Нобелевской премии.

Первые транзисторы изготавливали на основе полупроводника *германия*. Рабочая температура таких приборов не превышала 70 °С. Во многих случаях этого было недостаточно. Во второй половине 1950-х годов вместо германия стали применять другой полупроводник – *кремний*. Рабочая температура кремниевых транзисторов составляет 120–150 °С.

Кроме того, для них была разработана *планарная технология*, позволяющая создавать на одной пластине полупроводника миллионы транзисторов.

Появление планарной технологии и совершенствование методов выращивания кристаллов кремния привело к созданию в 1960-е годы нового полупроводникового прибора – транзистора со структурой «металл – окисел – полупроводник» (МОП-транзистор).

Третий этап развития электроники связан с появлением *микроэлектроники* – направления, охватывающего разработку и производство качественно нового типа приборов – интегральных микросхем или просто интегральных схем (ИС). Это совокупность большого числа электронных компонентов, изготовленных в едином технологическом цикле на кристалле полупроводникового материала, которые выполняют определенные функции преобразования и обработки сигналов.

Первая цифровая интегральная схема была изготовлена в 1959 году и содержала всего 12 транзисторов. Но уже через несколько лет появились большие интегральные схемы (БИС), содержащие тысячи элементов. В настоящее время на кристалле сверхбольшой интегральной схемы (СБИС) расположены миллионы транзисторов, геометрические размеры которых составляют несколько нанометров.

В эпоху микроэлектроники кардинально изменилась не только цифровая, но и аналоговая схемотехника. Создание интегральных операционных усилителей связано с именем Р. Видлара, определившего на многие годы структуру аналоговых интегральных схем.

Начало 1970-х годов ознаменовалось созданием *микропроцессоров*. Они были разработаны в фирме Intel под руководством Ф. Фаггина и Т. Хоффа. Первый микропроцессор Intel 4004 содержал 2300 транзисторов и работал на частоте 750 кГц. Современные микропроцессоры содержат сотни миллионов транзисторов и работают на частотах, достигающих нескольких гигагерц. Они заменяют целые блоки и устройства радиоэлектронной аппаратуры предшествующих поколений. Благодаря микропроцессорам компьютеры стали массовым, общедоступным продуктом и широко используются для автоматизации технологических процессов и в быту.

Любой электронный прибор представляет собой электромагнитное устройство, работу которого можно строго описать методами теории электромагнитного поля, которая оперирует векторными величинами, такими как напряженность электрического поля, магнитная индукция, плотность тока. Методы теории поля дают возможность изучать различные явления в любых электротехнических и электронных устройствах. Однако они сложны и трудоемки даже при решении простых задач.

Для инженерных расчетов применяют приближенные методы анализа, позволяющие с достаточной степенью точности определять поведение электронных и электротехнических устройств. Такие методы дает теория электрических цепей, в которой вместо векторных величин теории поля, зависящих от пространственных координат и времени, используют скалярные величины: ток и напряжение. Для приближенного учета процессов, происходящих в электронных устройствах, в теории цепей введены идеальные элементы. Соединяя между собой эти идеальные элементы, получают *схему замещения* или модель, приближенно отображающую процессы в реальном устройстве.

Методы теории цепей менее универсальны, чем теории электромагнитного поля. В частности, их нельзя применять при действии высокочастотных сигналов, когда длина волны электромагнитного колебания сравнима с размерами исследуемого устройства. Тем не менее методы теории цепей широко используют как при ручных расчетах, так и в компьютерных программах моделирования электронных цепей.

Таким образом, теория цепей дает инженерам эффективный инструмент для исследования и проектирования электротехнических и электронных устройств. По существу она является языком радиоэлектроники. Без знания основ теории цепей невозможно изучить электронику и схемотехнику, а также специальные дисциплины, связанные с передачей и обработкой сигналов.

**– Раздел I –
ОСНОВЫ ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

– Глава 1 –

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕДИНИЦЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

Основными величинами, характеризующими состояние цепи, являются ток и напряжение.

Ток в проводящей среде есть явление упорядоченного движения электрических зарядов под действием электрического поля. Как известно, ток проводимости в металлах представляет собой перемещение отрицательных зарядов (электронов), а в полупроводниках – перемещение как отрицательных (электроны), так и положительных (дырки) носителей заряда.

В каждый момент времени t ток характеризуется мгновенным значением, равным скорости изменения заряда во времени:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

здесь Δq – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за интервал времени, равный Δt .

Единица измерения тока в системе СИ – ампер (А). В электронных устройствах ток может достигать нескольких десятков ампер. Часто используют кратные единицы измерения тока: миллиамперы, $1 \text{ мА} = 10^{-3} \text{ А}$; микроамперы, $1 \text{ мкА} = 10^{-6} \text{ А}$; наноамперы, $1 \text{ нА} = 10^{-9} \text{ А}$.

Ток является скалярной алгебраической величиной, которая может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Для однозначного определения тока необходимо задать его направление. За направление тока принимают направление движения положительных зарядов. Положительное направление тока выбирают произвольно и показывают стрелкой на выводах элемента или участка цепи (рис. 1.1).

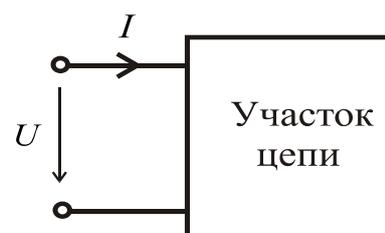


Рис. 1.1. Участок цепи

Если в результате расчета величина тока оказывается положительной, то это означает, что его фактическое направление совпадает с выбранным положительным направлением. Если ток отрицателен, он направлен противоположно выбранному направлению.

Перенос зарядов в цепи связан с преобразованием или потреблением энергии. Для определения энергии, затрачиваемой на перемещение заряда, используют другую величину – *напряжение*. Напряжение (разность потенциалов) между двумя точками цепи определяется количеством энергии, затрачиваемой на перемещение заряда из одной точки в другую:

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}. \quad (1.2)$$

Единица измерения напряжения в системе СИ – вольт (В). Напряжение различных электронных устройств варьируется в широких пределах. Например, для работы электронных устройств, предназначенных для преобразования электрической энергии, требуется напряжение, составляющее десятки киловольт, а для питания микропроцессоров – менее 3 В.

Напряжение – скалярная величина, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для однозначного определения знака напряжения выбирают положительное направление его отсчета, которое показывают стрелкой, направленной от одного зажима к другому, либо знаками «+» и «-» (рис. 1.1).

Положительную полярность напряжения удобно выбирать согласованной с положительным направлением тока. В этом случае стрелки, обозначающие ток и напряжение, совпадают.

Часто потенциалы напряжения всех точек цепи рассчитывают относительно общего узла, потенциал которого принимают равным нулю. Общий узел называют «землей» или общим проводом.

Согласно (1.1) и (1.2) энергия, затрачиваемая на перемещение заряда к моменту времени t , определяется формулой

$$w = \int_0^q u dq = \int_{-\infty}^t u i dt. \quad (1.3)$$

В формуле (1.3) принято, что $w = 0$ при $t = -\infty$.

Мгновенная мощность участка цепи равна производной энергии по времени:

$$p = \frac{dw}{dt} = ui.$$

Мощность измеряется в ваттах (Вт) и является алгебраической величиной. Если при согласованных направлениях тока и напряжения мощность положительна ($p > 0$), она потребляется участком цепи. Если мощность отрицательна ($p < 0$), то этот участок цепи является источником энергии.

По характеру изменения во времени различают постоянные, периодические и непериодические токи и напряжения. Для обозначения электрических величин используют прописные и строчные буквы. Прописными буквами обозначают постоянные напряжения, токи и мощности: U , I , P . Мгновенные значения переменных величин обозначают малыми (строчными) буквами: u , i , p .

1.2. ДВУХПОЛЮСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Исследование процессов, происходящих в реальных цепях, основано на идеализации элементов, составляющих цепь. Под элементами в теории цепей понимают не реальные устройства, а их идеализированные модели, обладающие определенными свойствами реальных прототипов. Такими идеализированными моделями являются резистивный, индуктивный и емкостный элементы, а также независимые источники напряжения и тока. Соединяя между собой идеализированные элементы, получают модель, или схему замещения, приближенно отображающую процессы в реальном электронном устройстве. Чем сложнее схема замещения, тем точнее она отражает свойства реальной электронной цепи.

Таким образом, идеализированные элементы являются «кирпичиками», из которых строятся модели реальных электронных устройств. Рассмотрим подробнее элементы, используемые в теории цепей.

Резистивный элемент. *Резистивным* называют идеализированный двухполюсный элемент, для которого связь между напряжением и током можно представить в виде графика, называемого вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Резистивный элемент моделирует процесс необратимого преобразования электромагнитной энергии в тепло и другие виды энергии, при этом запасание энергии в электромагнитном поле отсутствует.

По своим свойствам к идеальному резистивному элементу близки проволочный реостат, лампа накаливания, полупроводниковый диод.

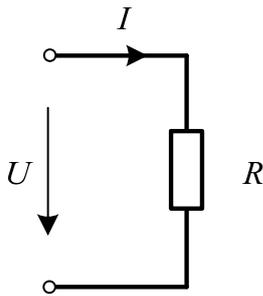


Рис. 1.2. Резистивный элемент

Условное графическое изображение резистивного элемента показано на рис. 1.2. Вольт-амперные характеристики резистивных элементов отличаются большим разнообразием (рис. 1.3, 1.4).

Если вольт-амперная характеристика резистивного элемента – прямая, проходящая через начало координат, его называют *линейным*. Любой реальный элемент можно рассматривать как линейный только в определенном диапазоне изменения напряжений и токов.

Для линейного резистора связь между напряжением и током определяется *законом Ома*:

$$u = Ri; \quad i = Gu. \quad (1.4)$$

В формулах (1.4) коэффициенты пропорциональности R и G называют *сопротивлением* и *проводимостью*. В соответствии с законом Ома поглощаемая резистором мощность

$$p = ui = Ri^2 = u^2/R.$$

Если параметры элемента зависят от токов и напряжений, его называют *нелинейным*.

Если характеристика нелинейного резистора расположена в первом и третьем квадрантах (кривая 1 на рис. 1.3), то элемент является пассивным, поскольку мгновенная мощность $p = ui$ положительна. Если какой-либо участок ВАХ находится во втором или четвертом квадрантах (кривая 2 на рис. 1.3), то произведение напряжения и тока отрицательно, что соответствует генерированию мощности.

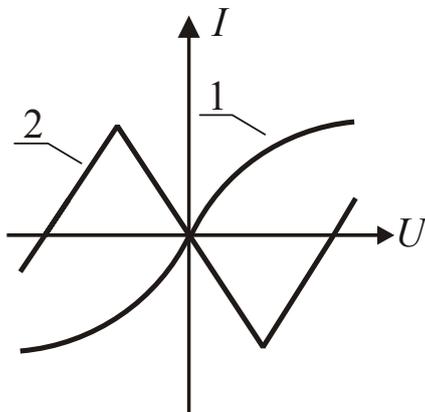


Рис. 1.3. ВАХ нелинейных резисторов

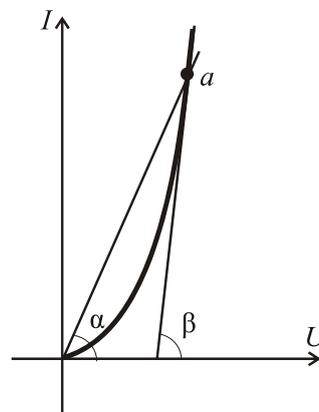


Рис. 1.4. Определение статического и динамического сопротивлений резистора

Для каждой точки ВАХ нелинейного резистора можно определить *статическое* и *динамическое* сопротивления. Статическим сопротивлением называют отношение постоянного напряжения нелинейного элемента к току в нем:

$$R_{\text{ст}} = U / I .$$

Статическое сопротивление обратно пропорционально тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в выбранную точку ВАХ (рис. 1.4):

$$R_{\text{ст}} = k / \operatorname{tg}(\alpha) . \quad (1.5)$$

Дифференциальное сопротивление нелинейного резистора – это отношение малых приращений напряжения и тока:

$$R_{\text{диф}} = du / di .$$

Оно характеризует элемент при малых изменениях напряжения и тока вблизи выбранной точки ВАХ. Дифференциальное сопротивление обратно пропорционально тангенсу угла наклона касательной, проведенной к выбранной точке ВАХ (рис. 1.4):

$$R_{\text{диф}} = k / \operatorname{tg}(\beta) . \quad (1.6)$$

Коэффициент пропорциональности k в формулах (1.5) и (1.6) равен отношению масштабных коэффициентов по осям напряжений и токов: $k = \mu_U / \mu_I$.

Независимые источники напряжения и тока. *Источник напряжения* – двухполюсный элемент, напряжение которого не зависит от тока через него и изменяется по заданному закону. Независимый источник напряжения изображают так, как показано на рис. 1.5, а.

Вольт-амперная характеристика источника напряжения представляет прямую, параллельную оси токов (рис. 1.5, б).

Стрелка ЭДС источника напряжения направлена к его положительному выводу.

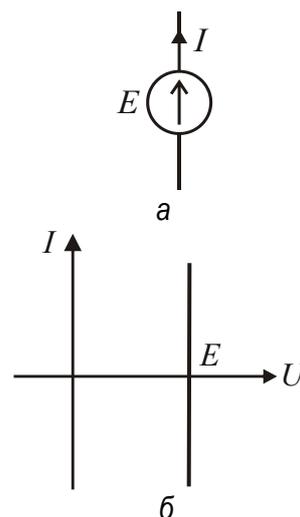


Рис. 1.5. Источник напряжения: обозначение (а); вольт-амперная характеристика (б)

Поэтому напряжение на внешних зажимах источника напряжения направлено в сторону, противоположную направлению ЭДС.

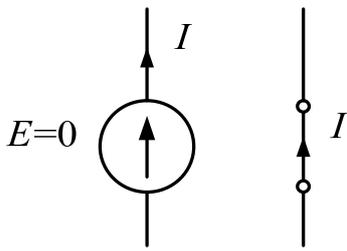


Рис. 1.6. Эквивалентная замена источника напряжения

Внутреннее сопротивление идеального источника напряжения равно нулю, в противном случае его напряжение будет зависеть от тока через него. Мощность такого источника бесконечна.

Если напряжение источника равно нулю, то это эквивалентно короткому замыканию выводов источника, поскольку его внутреннее сопротивление нулевое (рис. 1.6).

Источник тока – двухполюсный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах и изменяется в соответствии с заданным законом. Источники тока изображают так, как показано на рис. 1.7, а. Двойная стрелка показывает положительное направление тока источника.

Вольт-амперная характеристика источника тока представляет собой прямую, параллельную оси напряжений (рис. 1.7, б)

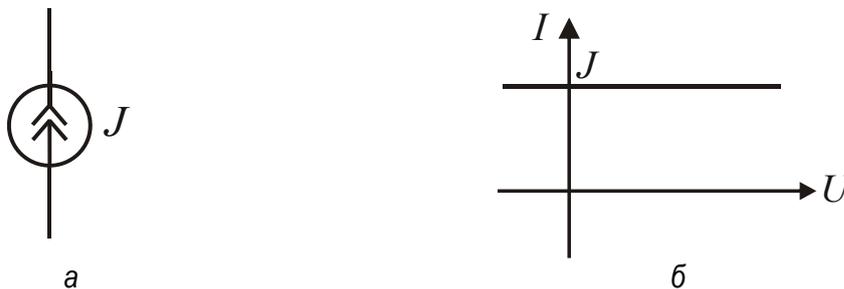


Рис. 1.7. Источник тока: обозначение (а); вольт-амперная характеристика (б)

Внутренняя проводимость идеального источника тока равна нулю, в противном случае ток будет зависеть от напряжения на его зажимах. Соответственно, внутреннее сопротивление такого источника бесконечно велико. Мощность такого источника также бесконечна. Если ток источника тока равен нулю, то это эквивалентно разрыву его выводов (рис. 1.8).

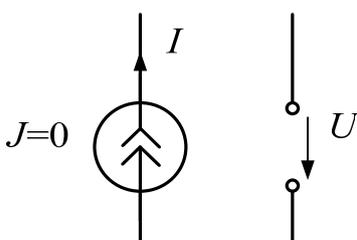


Рис. 1.8. Эквивалентная замена источника тока

Подчеркнем, что рассмотренные источники являются идеальными. В сочетании с другими элементами они используются для моделирования реальных источников энергии.

1.3. УПРАВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ

В теории цепей помимо независимых рассматривают зависимые, или управляемые, источники. Они представляют собой результат идеализации свойств реальных электронных приборов. *Управляемый источник* – четырехполюсный резистивный элемент, состоящий из двух ветвей и двух пар выводов: входной и выходной. Он обладает следующими свойствами:

- 1) выходная величина пропорциональна входной;
- 2) выходная величина не влияет на входную.

Входной и выходной величинами управляемого источника могут быть токи или напряжения. Поэтому различают четыре вида управляемых источников.

1. *Источник напряжения, управляемый напряжением* (ИНУН), рис. 1.9, а. Входной ток этого элемента равен нулю: $I_1 = 0$. Напряжение на выходе ИНУН пропорционально входному напряжению: $U_2 = KU_1$. Основным параметром является безразмерный *коэффициент усиления напряжения* K .

2. *Источник тока, управляемый напряжением* (ИТУН), рис. 1.9, б. Выходной ток этого источника пропорционален входному напряжению: $I_2 = SU_1$. Входной ток ИТУН равен нулю. Коэффициент пропорциональности S , имеющий размерность проводимости, называют передаточной проводимостью или *крутизной*.

3. *Источник тока, управляемый током* (ИТУТ), рис. 1.9, в. Поскольку входная ветвь представляет собой короткое замыкание, входное напряжение этого источника равно нулю: $U_1 = 0$. Выходной ток ИТУТ пропорционален входному: $I_2 = KI_1$. Безразмерный коэффициент пропорциональности K называют *коэффициентом усиления тока*.

4. *Источник напряжения, управляемый током* (ИНУТ), рис. 1.9, г. Напряжение на выходе ИНУТ пропорционально входному току: $U_2 = RI_1$. Управляющий параметр ИНУТ имеет размерность сопротивления.

Важно отметить, что входные зажимы источников, управляемых током, замкнуты накоротко, а входные зажимы источников, управляемых напряжением, разомкнуты.

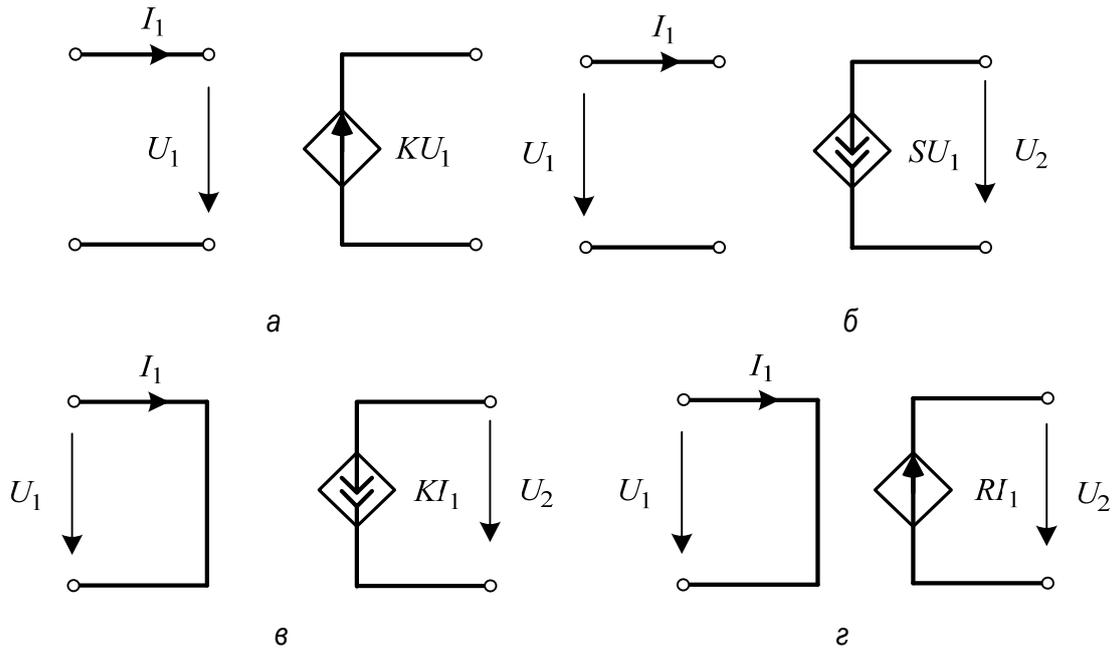


Рис. 1.9. Управляемые источники

Управляемые источники являются необратимыми элементами, так как передача сигнала осуществляется только от входа к выходу. Для передачи сигнала от выхода к входу источника необходима внешняя цепь, которую называют *цепью обратной связи*.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Определение резистивного элемента.
2. Как определить статическое и дифференциальное сопротивление нелинейного резистора?
3. Определения независимых и управляемых источников напряжения и тока.
4. Вольт-амперные характеристики независимых источников тока и напряжения.
5. Каково внутреннее сопротивление идеальных источников тока и напряжения?
6. Перечислите виды управляемых источников. Какими свойствами они обладают?

– Глава 2 – АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

2.1. ВЕТВИ, УЗЛЫ И КОНТУРЫ. ГРАФ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Электрическая цепь, образованная путем соединения между собой идеализированных элементов, является математической моделью реального электротехнического или электронного устройства. Чем больше элементов содержит такая цепь, тем точнее она отображает характеристики моделируемого устройства.

Основные понятия, касающиеся геометрической конфигурации, или *топологии*, электрических цепей:

Ветвь – участок цепи с двумя выводами. Ветвью может быть отдельный элемент либо группа элементов, соединенных последовательно или параллельно. В качестве ветви можно рассматривать короткозамкнутый или разомкнутый участок цепи.

Узел – точка соединения двух или более ветвей. Место соединения двух ветвей называют устранимым узлом. Такие узлы удобно использовать при машинных расчетах. При ручных расчетах несколько элементов, соединенных последовательно или параллельно, удобно рассматривать как одну ветвь. Поэтому в этом случае узлом считают соединение трех или более ветвей.

При ручных расчетах точки схемы, соединенные ветвью с нулевым сопротивлением, рассматривают как один узел. Такой узел называют расщепленным. Пример расщепленного узла – узел 1, обведенный пунктиром (рис. 2.1).

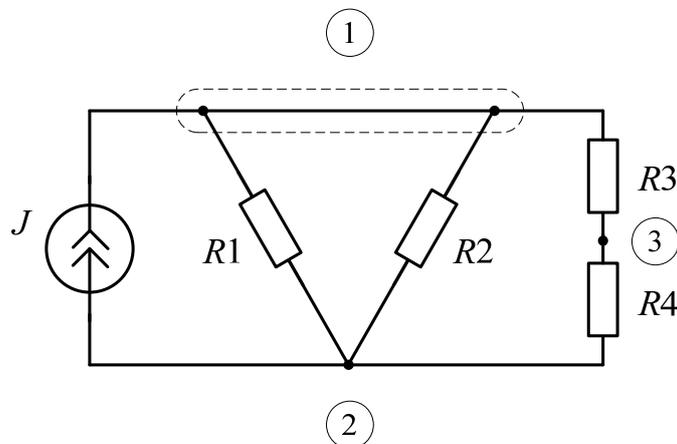


Рис. 2.1. Пример расщепленного узла

Контур – замкнутый путь, проходящий через ряд ветвей и узлов. Контур называют независимыми, если они отличаются по крайней мере одной ветвью.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, образующих ветвь. Поэтому каждую ветвь цепи можно изобразить отрезком. В результате получим граф электрической цепи. Например, электрической цепи (рис. 2.2, а) соответствует граф, показанный на рис. 2.2, б.

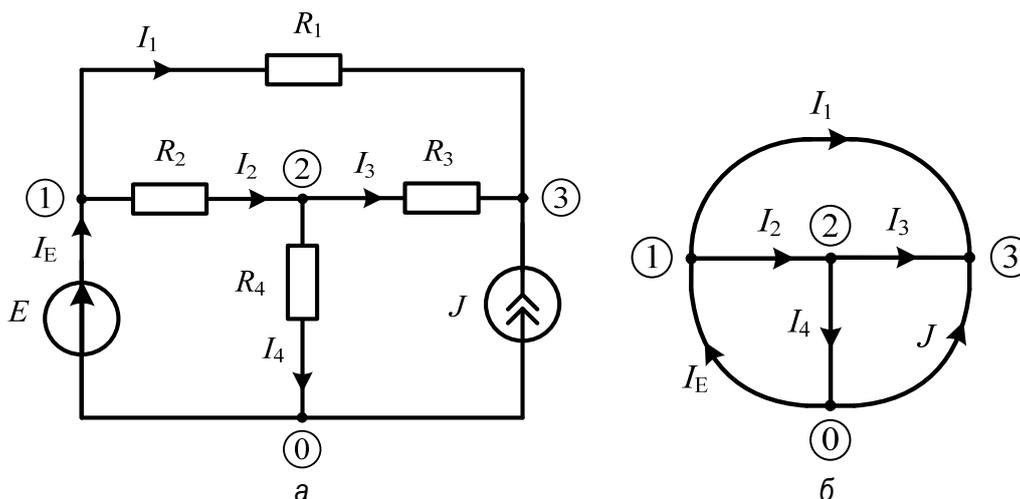


Рис. 2.2. Электрическая цепь (а) и ее граф (б)

Отрезок линии, соединяющий узлы электрической цепи, является ветвью графа. Граф называют связным, если любые два его узла связаны, т. е. соединены ветвями.

Часть графа называют *подграфом*. *Дерево* графа – связный подграф, содержащий все узлы, но не содержащий ни одного контура. Ветви графа, не вошедшие в дерево, называют *ветвями связи*. В общем случае для графа можно выбрать несколько деревьев.

Главным контуром графа называют контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи. Иными словами, главный контур образуется при включении ветви связи в дерево графа.

2.2. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Уравнения, описывающие поведение электрической цепи, составляют на основании законов Кирхгофа. Они определяют связь между токами и напряжениями элементов, образующих цепь. Уравнения, составленные согласно этим законам, называют уравнениями Кирхгофа.

Чтобы записать уравнения по законам Кирхгофа, необходимо сначала выбрать положительные направления токов и напряжений ветвей. Положительное направление тока показывают стрелкой на выводе элемента. Положительное направление напряжения обозначают стрелкой, расположенной рядом с элементом. Направления токов и напряжений резистивных элементов выбирают согласованными. Сопротивление проводников, соединяющих элементы, очень мало по сравнению с сопротивлениями резисторов, и им пренебрегают.

Направления напряжений и токов источников следует рассмотреть особо. Стрелка ЭДС источника напряжения направлена к его положительному выводу. Поэтому напряжение на внешних зажимах этого источника направлено в сторону, противоположную ЭДС.

Первый закон Кирхгофа определяет баланс токов в узлах электрической цепи. Он формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (2.1)$$

В уравнении (2.1) токи, направленные от узла, записывают с положительным знаком. Токи, направленные к узлу, записывают со знаком минус.

Система уравнений по первому закону Кирхгофа, записанная для всех узлов цепи, линейно зависима. В этом легко убедиться, сложив все уравнения. Поскольку ток каждой ветви входит в два уравнения с разными знаками, уравнение для последнего узла равно сумме предыдущих. Поэтому число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа равно $n_y - 1$, где n_y – число узлов цепи.

Второй закон Кирхгофа устанавливает баланс напряжений в контуре цепи: *алгебраическая сумма напряжений ветвей в контуре равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (2.2)$$

Если напряжение ветви совпадает с направлением обхода контура, то напряжению приписывают положительный знак, если же нет – отрицательный. Перенесем напряжения источников напряжения, равные ЭДС этих источников, в правую часть. Уравнение (2.2) примет вид

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n e_k.$$

В соответствии с последним равенством во всяком контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений ветвей равна алгебраической сумме ЭДС источников.

Число независимых уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров. Можно показать, что число таких контуров определяется формулой $n_b - n_y + 1$, где n_b – число ветвей.

В качестве независимых контуров удобно выбирать внутренние ячейки цепи. Можно воспользоваться и другим способом: выбрать по порядку контуры, так чтобы каждый следующий контур содержал по меньшей мере одну ветвь, не входящую в предыдущие контуры.

Суммарное число уравнений, составленных по законам Кирхгофа, равно числу ветвей n_b . Система уравнений линейной цепи имеет единственное решение, которое позволяет найти токи в ветвях цепи, а по ним – и значения напряжений.

Законы Кирхгофа справедливы как для линейных, так и нелинейных цепей при любой форме напряжений и токов.

Порядок составления уравнений по законам Кирхгофа.

1. Выбирают положительные направления токов и напряжений ветвей. Полярности напряжений резисторов выбирают согласованными с направлениями токов, направления токов источников напряжения – совпадающими с направлениями их ЭДС.

2. Записывают уравнения по первому закону Кирхгофа для $n_y - 1$ узлов.

3. Выбирают направления обхода контуров и записывают уравнения по второму закону Кирхгофа. Сопротивление проводников, соединяющих элементы, очень мало по сравнению с сопротивлениями резисторов, и им пренебрегают.

4. Решают полученную систему уравнений и определяют токи и напряжения цепи.

5. После определения токов и напряжений выполняют проверку. Для этого вычисленные значения переменных подставляют в одно из уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

При составлении уравнений в качестве неизвестных рассматривают либо токи, либо напряжения резистивных элементов.

В первом случае уравнения цепи составляют относительно неизвестных токов резистивных элементов и напряжений на источниках тока. Напряжения на резистивных элементах, входящие в уравнения по второму закону Кирхгофа, выражают через токи по закону Ома. Такой способ составления уравнений называют *методом токов ветвей*.

Число совместно решаемых уравнений в методе токов ветвей можно сократить, если контуры выбрать так, чтобы они не включали

источники тока. В этом случае неизвестными будут только токи резистивных элементов, и по второму закону Кирхгофа достаточно составить $n_{\text{в}} - n_{\text{у}} - n_{\text{ит}} + 1$ уравнений, где $n_{\text{ит}}$ – количество источников тока.

Во втором случае уравнения цепи составляют относительно напряжений резистивных элементов и токов источников напряжения. Токи резисторов представляют произведением проводимости на напряжение на резисторе. Этот способ составления уравнений называют *методом напряжений ветвей*.

В дальнейшем для решения задач будем использовать в основном метод токов ветвей.

2.3. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ КИРХГОФА ДЛЯ АНАЛИЗА РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Приведем примеры анализа линейных цепей с помощью законов Кирхгофа.

Пример 2.1. Записать уравнения Кирхгофа для цепи (рис. 2.3).

Решение. Сначала выберем направления токов резистивных элементов и пронумеруем узлы. Направления токов показаны стрелками на выводах элементов. Неизвестными переменными являются токи резистивных элементов $I_1 - I_5$. Поэтому необходимо составить пять уравнений. Цепь содержит четыре узла. Это означает, что по первому закону Кирхгофа можно составить три независимых уравнения. Оставшиеся два уравнения составим по второму закону Кирхгофа.

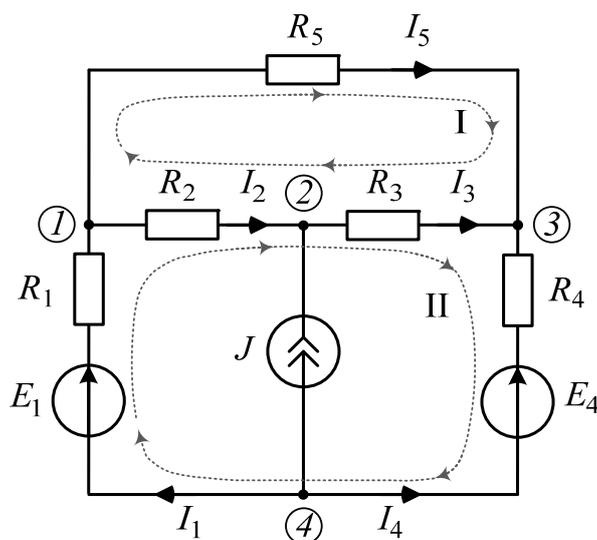


Рис. 2.3. Цепь к примеру 2.1

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2, 3. Контуры I и II выберем так, чтобы они не включали источник тока, иначе в системе уравнений появится дополнительная переменная – напряжение источника тока. Направления обхода контуров выберем совпадающими с направлением движения часовой стрелки. В результате получим систему из пяти уравнений с пятью неизвестными токами:

$$\text{Узел 1: } -I_1 + I_2 + I_5 = 0;$$

$$\text{Узел 2: } -I_2 + I_3 = J;$$

$$\text{Узел 3: } -I_3 - I_4 - I_5 = 0;$$

$$\text{Контур I: } -R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0;$$

$$\text{Контур II: } R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_1 - E_4.$$

Для решения системы уравнений целесообразно использовать математические пакеты, например MathCAD или Matlab.

Напряжение на зажимах источника тока можно затем найти, записав уравнения для контуров, включающих R_1, R_2, E_1, J или R_3, R_4, E_4, J .

Пример 2.2. Рассчитать токи в цепи (рис. 2.4). Номиналы элементов: $R_1 = 0,1$ кОм; $R_2 = 0,6$ кОм; $R_3 = 0,4$ кОм; $R_4 = 1,0$ кОм; $R_5 = 0,8$ кОм; $R_6 = 1,6$ кОм; $E_1 = 10$ В; $E_5 = 12$ В; $J = 0,02$ А.

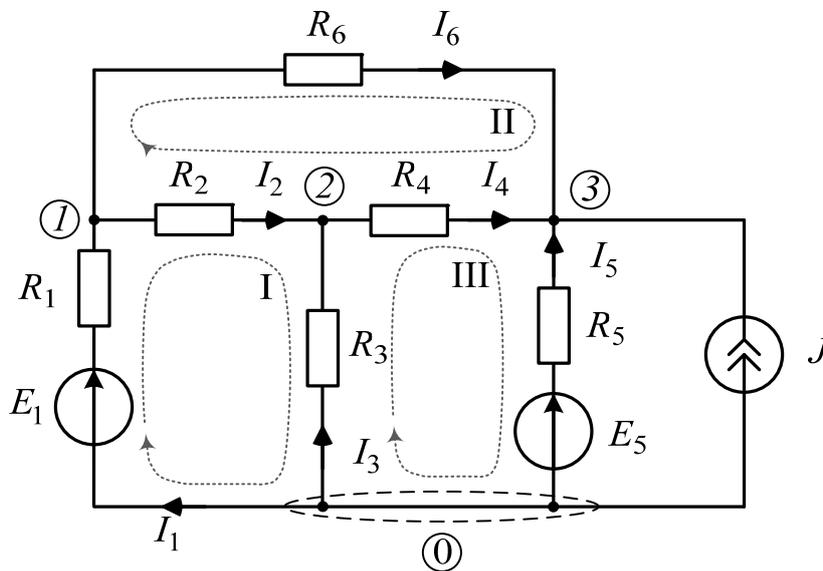


Рис. 2.4. Цепь к примеру 2.2

Решение. Сначала выберем направления токов резистивных элементов и пронумеруем узлы. В рассматриваемой схеме шесть неизвестных токов ($I_1 - I_6$), следовательно, необходимо составить шесть уравнений. Цепь содержит четыре узла. Это означает, что по первому закону

Кирхгофа можно составить три независимых уравнения. Еще три уравнения составим по второму закону Кирхгофа.

Уравнения по первому закону Кирхгофа запишем для узлов 1, 2 и 3. Уравнения по второму закону Кирхгофа запишем для контуров I, II, III. Направление обхода контуров выберем по часовой стрелке.

В результате получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными токами:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_6 = 0; \\ -I_2 - I_3 + I_4 = 0; \\ -I_4 - I_5 - I_6 = J; \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_1; \\ -R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_6 I_6 = 0; \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_5 I_5 = -E_5. \end{cases}$$

В матричной форме записи система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & -R_4 & 0 & R_6 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & -R_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \\ E_1 \\ 0 \\ -E_5 \end{bmatrix}.$$

Решением системы являются следующие значения токов: $I_1 = 1,6$ мА; $I_2 = 5,7$ мА; $I_3 = -15,9$ мА; $I_4 = -10,1$ мА; $I_5 = -5,6$ мА; $I_6 = -4,2$ мА.

Знак минус в численных значениях токов означает, что направление токов при заданных условиях выбрано навстречу истинному.

Пример 2.3. Анализ цепи с управляемым источником.

Необходимо определить напряжение на выходе усилителя напряжения в схеме (рис. 2.5). Коэффициент передачи усилителя равен K , входное сопротивление бесконечно, а выходное – равно нулю.

Решение. Заменяем усилитель простейшей моделью – источником напряжения, управляемым напряжением (рис. 2.6). Выходное напряжение $U_{\text{вых}} = KU_d$.

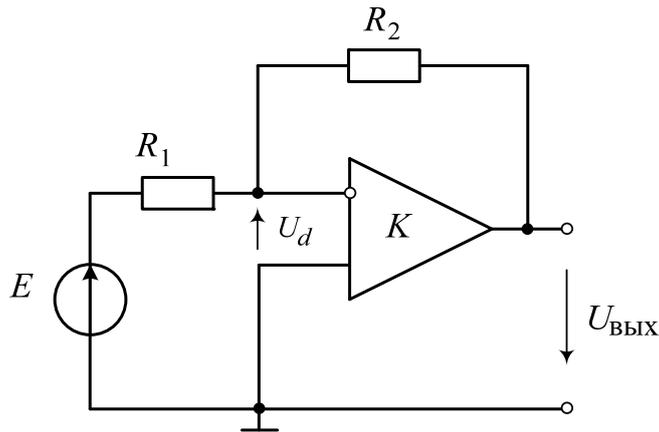


Рис. 2.5. Цепь к примеру 2.3

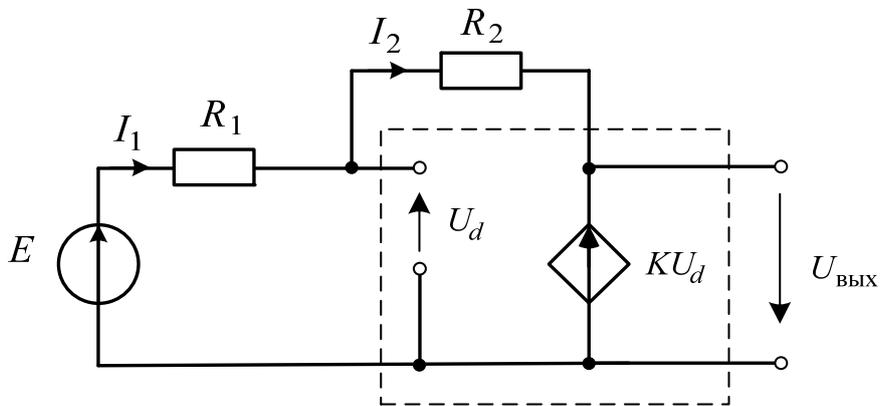


Рис. 2.6. Цепь с управляемым источником напряжения
(к примеру 2.3)

Поскольку входное сопротивление усилителя бесконечно, токи резисторов одинаковы: $I_1 = I_2 = I$. Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_1 I + R_2 I = E - K U_d ;$$

$$R_1 I - U_d = E .$$

Решив эти уравнения, найдем, что

$$U_d = -\frac{R_2}{(K+1)R_1 + R_2} E ; \quad (2.3)$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = KU_d = -\frac{KR_2}{(K+1)R_1 + R_2} E. \quad (2.4)$$

Итак, выходное напряжение рассматриваемой схемы зависит как от коэффициента усиления K , так и сопротивлений R_1 и R_2 . Резисторы R_1 и R_2 образуют цепь отрицательной обратной связи. Она служит для передачи части выходного напряжения на вход усилителя. При этом часть входного напряжения усилителя компенсируется.

Особый интерес представляет случай, когда коэффициент усиления K очень велик. Такой усилитель называют *операционным*. Из формул (2.3) и (2.4) следует, что при $K \rightarrow \infty$ напряжение на входе усилителя $U_d \rightarrow 0$, а выходное напряжение не зависит от коэффициента усиления активного элемента:

$$U_{\text{ВЫХ}} = -\frac{R_2}{R_1} E.$$

На основе операционного усилителя получили схему, коэффициент усиления которой определяется отношением сопротивлений резисторов R_1 и R_2 .

2.4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЧАСТКА ЦЕПИ

При анализе разветвленных электрических цепей часто целесообразно преобразовать участок цепи в более простой и удобный для расчета. Например, последовательно или параллельно соединенные элементы заменяют одним. Схему с несколькими источниками часто удается преобразовать в одноконтурную или в схему с двумя узлами, что значительно упрощает последующий расчет.

Два участка цепи называют *эквивалентными*, если при замене одного участка на другой токи и напряжения остальной части цепи остаются неизменными.

Одним из основных видов преобразования является замена источника напряжения эквивалентным источником тока. Часто используют также преобразование треугольника ветвей в эквивалентную звезду.

Последовательное и параллельное соединения двухполюсных элементов. Делители напряжения и тока

Простейшими соединениями двухполюсных элементов являются последовательное и параллельное.

При *последовательном соединении* двухполюсников (рис. 2.7) их токи равны. Общее напряжение равно сумме напряжений отдельных элементов:

$$U = U_1 + U_2.$$

В соответствии с законом Ома

$$U = R_1 I + R_2 I = R_3 I, \quad (2.5)$$

здесь

$$R_3 = R_1 + R_2.$$

Итак, последовательное соединение резисторов можно заменить одним резистором, сопротивление которого равно сумме сопротивлений резисторов, образующих последовательную цепь.

Ток в цепи (рис. 2.7):

$$I = \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Напряжения на отдельных элементах делятся пропорционально их сопротивлениям:

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U,$$

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U.$$

Поэтому цепь, образованную последовательным соединением элементов, называют *делителем напряжения*.

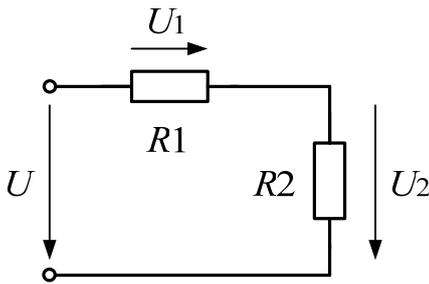


Рис. 2.7. Последовательное соединение элементов

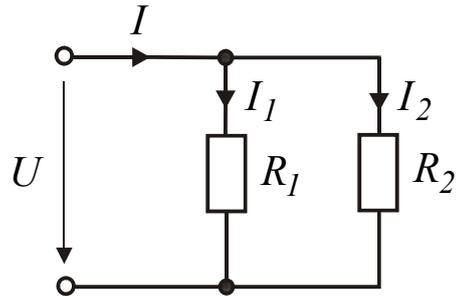


Рис. 2.8. Параллельное соединение элементов

Если в цепи имеются несколько источников напряжения, соединенных последовательно, в соответствии со вторым законом Кирхгофа их можно заменить одним источником, напряжение которого равно сумме напряжений источников, входящих в соединение.

Отличительной особенностью *параллельного соединения* двухполюсных элементов является равенство напряжений на их зажимах. Пример параллельного соединения резисторов показан на рис. 2.8. Общий ток такой цепи равен сумме токов отдельных элементов:

$$I = I_1 + I_2 .$$

В соответствии с законом Ома

$$I = G_1 U + G_2 U = G_3 U ,$$

где $G_3 = G_1 + G_2$.

Итак, при параллельном соединении резисторов эквивалентная проводимость участка цепи равна сумме проводимостей отдельных элементов. Сопротивление цепи, состоящей из двух параллельных резисторов (рис. 2.8) можно найти по формуле

$$R_3 = \frac{1}{G_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Токи в параллельных ветвях делятся обратно пропорционально их сопротивлениям:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} , I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} .$$

Эти равенства называют *формулами разброса* или *формулами чужой ветви*, а параллельную цепь – *делителем тока*.

Если в схеме имеется несколько источников тока, включенных параллельно, в соответствии с первым законом Кирхгофа их можно заменить одним источником, ток которого равен алгебраической сумме токов источников, входящих в соединение.

Преобразование источников напряжения и тока

Цепь (рис. 2.9, *а*) образована последовательным соединением источника напряжения и резистора. Для этой цепи справедливо равенство

$$U + RI = E.$$

Выразим из этого уравнения ток:

$$I = -\frac{U}{R} + \frac{E}{R} = -\frac{U}{R} + J.$$

Последнему равенству соответствует цепь, образованная параллельным соединением источника тока $J = E/R$ и резистора сопротивлением R (рис. 2.9, *б*). Поскольку токи и напряжения на внешних зажимах обеих схем одинаковы, они эквивалентны. Разумеется, возможно и обратное преобразование источника тока в эквивалентный источник напряжения. При этом $E = RJ$.

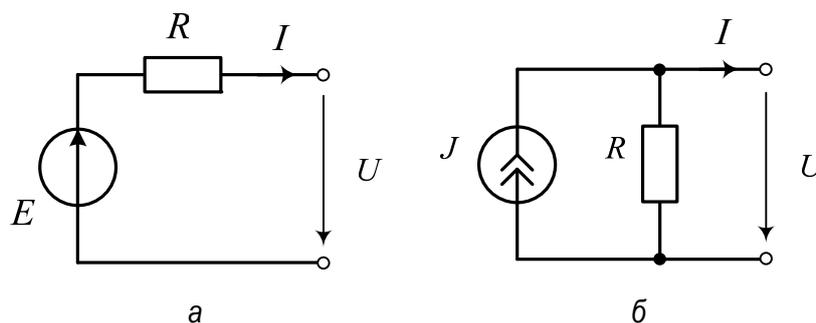


Рис. 2.9. Эквивалентные источники напряжения и тока

В некоторых случаях замена источника напряжения эквивалентным источником тока, или наоборот, позволяет существенно упростить расчет.

Преобразование треугольника ветвей в эквивалентную звезду

При расчетах разветвленных цепей возникает задача преобразования треугольника ветвей в эквивалентную звезду. Эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными зажимами токи, входящие в одноименные зажимы, одинаковы. Найдем формулы, позволяющие выполнить такое преобразование.

Для схемы треугольника (рис. 2.10, а) справедливы уравнения:

$$I_{12} - I_{31} = I_1; \quad (2.6a)$$

$$I_{12} - I_{31} = I_1; \quad (2.6б)$$

$$I_{31} - I_{23} = I_3; \quad (2.6в)$$

$$R_{12} I_{12} + R_{23} I_{23} + R_{31} I_{31} = 0. \quad (2.6г)$$

Решив систему уравнений (2.6) относительно I_{12} , получим

$$I_{12} = \frac{R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2.$$

Напряжение

$$U_{12} = R_{12} I_{12} = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2. \quad (2.7)$$

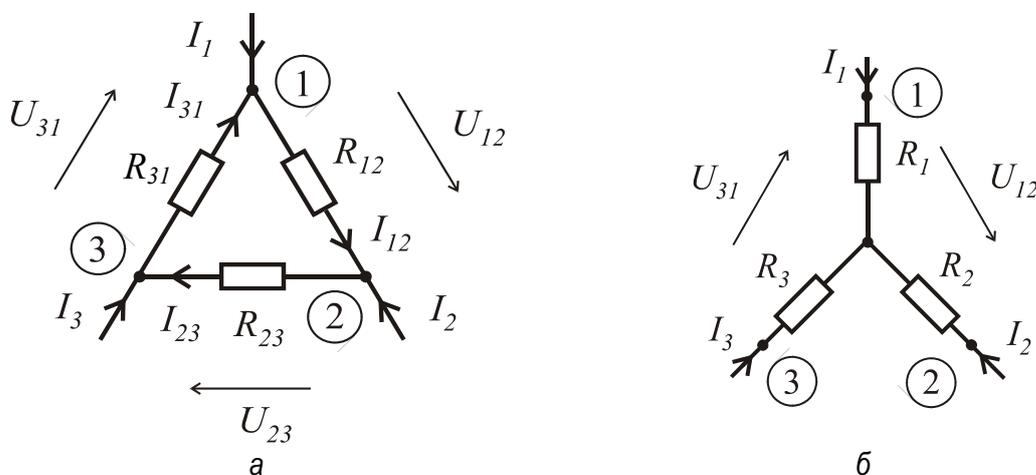


Рис. 2.10. Преобразование треугольника ветвей в эквивалентную звезду

Решая систему (2.6) относительно I_{23} , получаем

$$U_{23} = R_{23}I_{23} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2 - \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_3. \quad (2.8)$$

Уравнениям (2.7) и (2.8) соответствует эквивалентная схема на рис. 2.10, б, в которой резисторы соединены звездой. Сопротивления резисторов в схеме (рис. 2.10, б) определяются равенствами:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Итак, *сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений сторон треугольника.*

Можно выполнить и обратное преобразование, заменив звезду ветвей эквивалентным треугольником. Сопротивления резисторов, образующих стороны треугольника, определяются следующими равенствами:

$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Следовательно, *проводимость стороны треугольника равна произведению проводимостей прилегающих лучей звезды, деленному на сумму проводимостей лучей звезды.*

Расчет цепей с двумя узлами

При расчетах разветвленных цепей встречаются случаи, когда анализируемая цепь образована параллельным соединением нескольких ветвей, т.е. является схемой с двумя узлами (рис. 2.11).

Анализ цепи (рис. 2.11) можно упростить, определив сначала напряжение между узлами a и b . Используя преобразование источников напряжения в эквивалентные источники тока, получим формулу для определения напряжения между узлами a и b :

$$U_{ab} = \frac{\sum_{(j)} E_j / R_j + \sum_{(i)} J_i}{\sum_{(j)} 1 / R_j}. \quad (2.9)$$

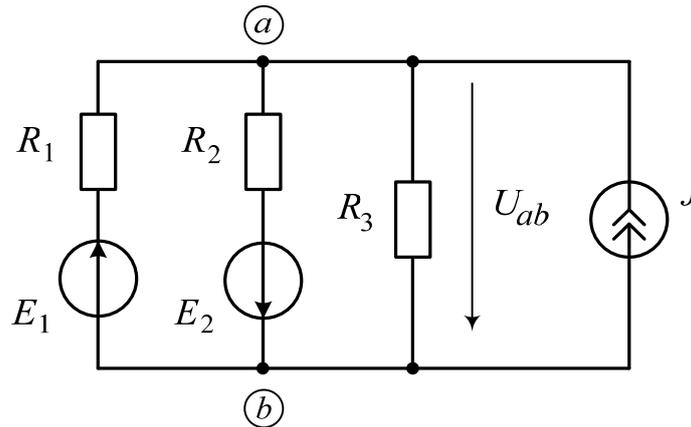


Рис. 2.11. Схема с двумя узлами

При вычислении напряжения U_{ab} с положительным знаком записываются те слагаемые числителя, которые соответствуют источникам, направленным к узлу a .

После того как определено напряжение U_{ab} , легко могут быть вычислены токи ветвей.

Выражение (2.9) широко используется для расчета цепей с двумя узлами, а также более сложных цепей, которые могут быть представлены в виде схем с двумя узлами. Этот метод расчета является частным случаем общего метода анализа разветвленных цепей, называемого *методом узловых напряжений*. Он будет рассмотрен далее.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения ветви, узла, контура электрической цепи.
2. Сформулируйте законы Кирхгофа.
3. От чего зависит число независимых уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа?
4. Порядок составления уравнений по законам Кирхгофа.
5. В чем суть расчета цепей методом токов ветвей?
6. Сформулируйте правило преобразования последовательной цепи с источником напряжения в параллельную цепь с источником тока.
7. Какие цепи называют делителями напряжения?
8. Какие токи и напряжения остаются неизменными при преобразовании треугольника ветвей в эквивалентную звезду и обратно?

– Глава 3 –

МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

3.1. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Задачу анализа разветвленных цепей можно значительно упростить, если воспользоваться специальными методами, предназначенными для расчета сложных цепей. Одним из методов, позволяющих получить систему уравнений меньшей размерности, является *метод узловых напряжений*. Независимыми переменными здесь будут напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного (опорного) узла. Эти величины называют *узловыми напряжениями*. Положительные направления узловых напряжений указывают стрелками, направленными от рассматриваемых узлов к базисному. В качестве последнего удобно выбирать заземленный узел или тот, в котором сходится наибольшее число ветвей. Уравнения составляют только на основе первого закона Кирхгофа, поэтому общее число уравнений равно $n_y - 1$.

Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то узловые напряжения будут равны потенциалам соответствующих узлов. Поэтому метод называют также *методом узловых потенциалов*.

Составление уравнений по методу узловых напряжений рассмотрим на примере. На рис. 3.1 изображена цепь, имеющая четыре узла. Примем узел 0 за базисный. Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов, кроме базисного:

$$\text{узел 1: } I_1 + I_2 = J_1; \quad (3.1)$$

$$\text{узел 2: } -I_2 + I_3 + I_4 = -J_4; \quad (3.2)$$

$$\text{узел 3: } -I_4 + I_5 = J_4 - J_5. \quad (3.3)$$

В схеме (рис. 3.1) обозначим узловые напряжения V_1, V_2, V_3 . Выразим токи ветвей через узловые напряжения и проводимости ветвей:

$$I_1 = G_1 V_1; \quad I_2 = G_2 (V_1 - V_2); \quad I_3 = G_3 V_2; \quad I_4 = G_4 (V_2 - V_3); \quad I_5 = G_5 V_3.$$

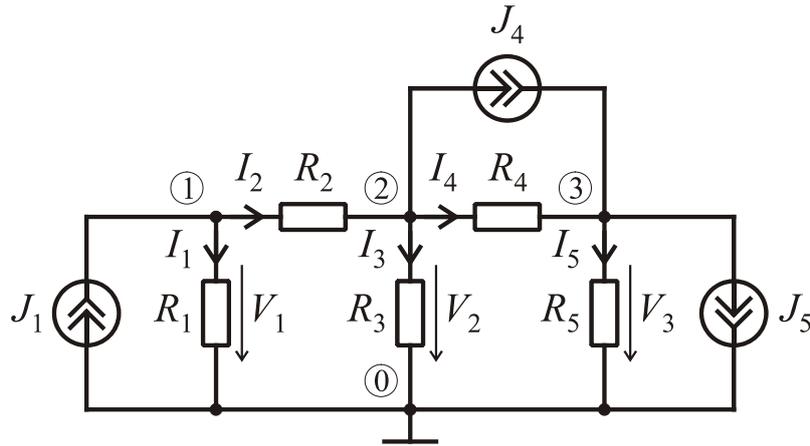


Рис. 3.1. Цепь с четырьмя узлами

Подставим полученные равенства в уравнения (3.1)–(3.3). После простых преобразований имеем

$$\begin{aligned}(G_1 + G_2)V_1 - G_2V_2 &= J_1, \\ -G_2V_1 + (G_2 + G_3 + G_4)V_2 - G_4V_3 &= -J_4, \\ -G_4V_2 + (G_4 + G_5)V_3 &= J_4 - J_5.\end{aligned}$$

Полученная система уравнений позволяет найти искомые узловые напряжения. Ее называют *системой узловых уравнений*. В общем случае, если цепь имеет n_y узлов, необходимо составить $n_y - 1$ узловых уравнений.

Узловые уравнения записаны на основе уравнений по первому закону Кирхгофа. Поэтому анализируемая цепь может содержать только независимые источники тока. Если в схеме имеются источники напряжения, они должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

Узловые уравнения удобно записывать в матричной форме. В общем виде для цепи, имеющей $n + 1$ узел, эти уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix}.$$

В более компактном виде

$$[G][V] = [J],$$

здесь $[V]$ – вектор узловых напряжений.

Квадратную матрицу коэффициентов $[G]$ называют *матрицей узловых проводимостей*, а вектор правой части $[J]$ – *вектором узловых токов*.

Для рассмотренного примера узловые уравнения в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ -J_4 \\ J_4 - J_5 \end{bmatrix}.$$

Элементы на главной диагонали матрицы узловых проводимостей называют *собственными проводимостями узлов*. Собственная проводимость i -го узла g_{ii} равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле. Элементы матрицы $[G]$, расположенные вне главной диагонали, называют *взаимными проводимостями*. Взаимная проводимость g_{ij} между узлами i и j равна проводимости ветви, соединяющей эти узлы, взятой со знаком минус. В пассивной цепи, которая не содержит управляемых источников, $g_{ij} = g_{ji}$, и матрица узловых проводимостей симметрична относительно главной диагонали.

Из сказанного следует, что если k -я ветвь включена между узлами i и j (рис. 3.2, а), ее проводимость G_k войдет в элементы матрицы узловых проводимостей, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами i и j (рис. 3.2, б).

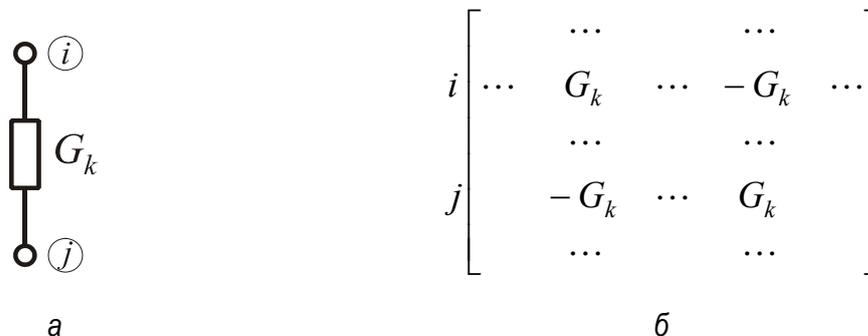


Рис. 3.2. Пассивная ветвь

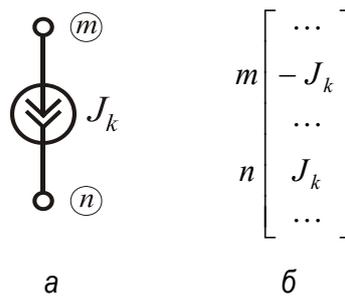


Рис. 3.3. Источник тока

Элементы вектора узловых токов равны алгебраической сумме токов источников, сходящихся в соответствующем узле. Если независимый источник тока J_k включен между узлами m и n (рис. 3.3, а), ток этого источника необходимо учесть в векторе узловых токов так, как показано на рис. 3.3, б.

3.2. ФОРМИРОВАНИЕ УЗЛОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПАССИВНОЙ ЦЕПИ

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей и вектора узловых токов не зависят от выбора направлений токов ветвей или нумерации узлов. Они позволяют сформировать узловые уравнения непосредственно по схеме, без предварительной записи уравнений по первому закону Кирхгофа.

Алгоритм формирования узловых уравнений включает следующие шаги:

1. Выбирают базисный узел.
2. Остальным узлам присваивают номера $1, 2, \dots, n_v - 1$.
3. Представляют матрицу узловых проводимостей в виде таблицы, имеющей $(n_v - 1)$ строк и $(n_v - 1)$ столбцов.
4. Полагают все элементы матрицы узловых проводимостей и векторы узловых токов равными нулю. Это эквивалентно исключению из схемы всех элементов.

5. Поочередно включают элементы в схему. Если резистор включен между узлами i и j , его проводимость записывают в элементы матрицы, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами i и j (рис. 3.2). Если резистор включен между узлом i и базисным, его проводимость записывают в собственную проводимость i -го узла g_{ii} . Если

между узлами i и j включен источник тока, его ток записывают в i -ю и j -ю строки вектора узловых токов (см. рис. 3.3).

6. Формирование узловых уравнений заканчивается, когда в схему включены все элементы.

3.3. УЗЛОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СХЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Цепь содержит источник тока, управляемый напряжением (ИТУН). Для того чтобы упростить выкладки, включим управляемый источник в схему (рис. 3.4).

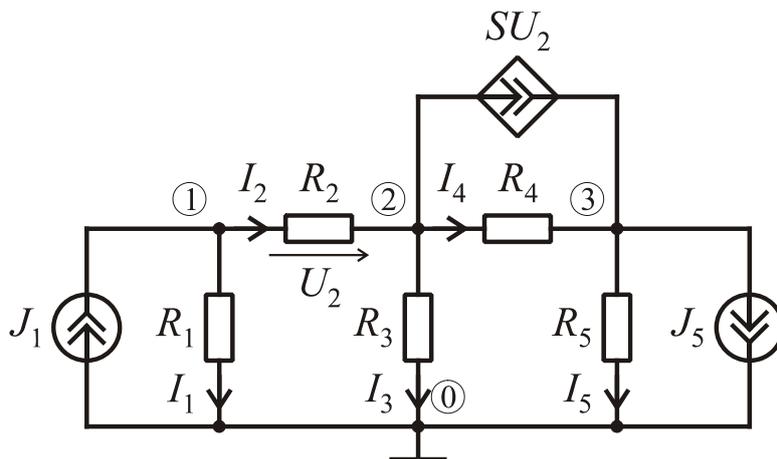


Рис. 3.4. Цепь с управляемым источником тока

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\text{узел 1: } I_1 + I_2 = J_1;$$

$$\text{узел 2: } -I_2 + I_3 + I_4 + SU_2 = 0;$$

$$\text{узел 3: } -I_4 + I_5 - SU_2 = -J_5.$$

Выражая токи через узловые напряжения и проводимости ветвей, получим систему узловых уравнений. Запишем ее в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + S & G_2 + G_3 + G_4 - S & -G_4 \\ -S & -G_4 + S & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ -J_5 \end{bmatrix}.$$

Параметр управляемого источника входит в элементы матрицы узловых проводимостей, которые находятся на пересечении строк 2, 3 и столбцов 1, 2.

В общем случае, если ИТУН включен между узлами i, j, k, l (рис. 3.5), его параметр S войдет в матрицу узловых проводимостей следующим образом:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & i & j \\
 & \dots & \dots \\
 l & +S & -S & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 k & -S & +S & \dots & \dots & \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

Заметим, что матрица узловых проводимостей цепи, содержащей управляемые источники, в отличие от матрицы пассивной цепи не будет симметричной.

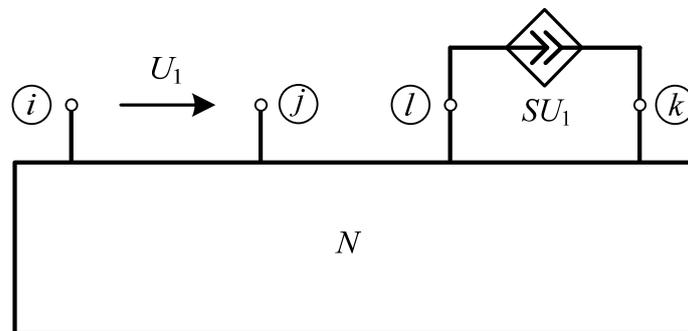


Рис. 3.5. Цепь с источником тока, управляемым напряжением

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей используются в алгоритме формирования узловых уравнений, основанном на последовательном переборе ветвей.

Метод узловых напряжений широко используется в программах машинного анализа электронных схем. Это объясняется простотой алгоритма формирования узловых уравнений и хорошей численной обусловленностью матрицы узловых проводимостей.

Пример 3.1. Для иллюстрации рассмотренного алгоритма составим систему узловых уравнений для цепи (рис. 3.6).

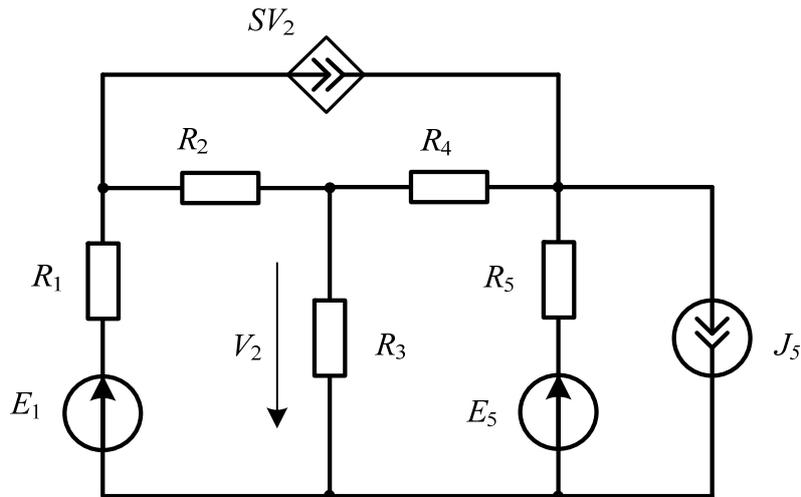


Рис. 3.6. Цепь к примеру 3.1

Поскольку цепь содержит источники напряжения, на первом шаге преобразуем их в эквивалентные источники тока (рис. 3.7).

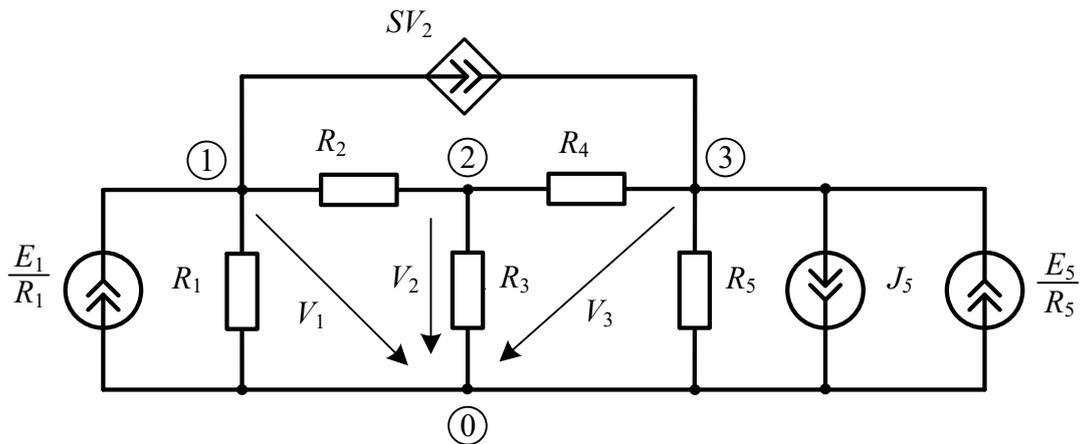


Рис. 3.7. Преобразованная цепь с источниками тока

Цепь содержит четыре узла. Поэтому необходимо записать три уравнения. Система узловых уравнений в матричной форме имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 + S & 0 \\ -G_2 + S & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 - S & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1/R_1 \\ 0 \\ -J_5 + E_5/R_5 \end{bmatrix}.$$

Источник тока, управляемый напряжением, включен между узлами 1 и 3. Управляющей величиной является напряжение второго узла V_2 . Поэтому параметр ИТУН включен в элементы матрицы узловых проводимостей, расположенные на пересечении 1-й и 3-й строк и столбца 2.

Элементы матрицы узловых проводимостей, учитывающие пассивные элементы цепи, находятся симметрично относительно главной диагонали. Поскольку пассивная ветвь между узлами 1 и 3 отсутствует, соответствующие элементы матрицы узловых проводимостей нулевые: $g_{13} = g_{31} = 0$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. На основе какого закона Кирхгофа составляются уравнения по методу узловых напряжений?
2. Какое напряжение называется узловым?
3. От чего зависит число уравнений, составляемых по методу узловых напряжений?
4. Каков порядок расчета цепи методом узловых напряжений?
5. Дайте определения собственной проводимости узла и взаимной проводимости между узлами.
6. Сформулируйте свойства матрицы узловых проводимостей пассивной цепи
7. Объясните, как рассчитать напряжения и токи ветвей по известным узловым напряжениям.
8. Какие элементы может содержать цепь при расчете методом узловых напряжений?