А. А. ГАЖУР

ТЕПЛОТЕХНИКА.
ТЕПЛОПЕРЕДАЧА И ТЕРМОДИНАМИКА

«Инфра-Инженерия»

УДК 621.1.016
ББК 31.31
Г12

Рецензенты:
д-р техн. наук (РЭУ им. Г. В. Плеханова) *А. В. Быстров*;
канд. техн. наук (ФГАНУ «ВНИМИ») *П. В. Кузнецов*

Гажур, А. А

Г12 Теплотехника. Теплопередача и термодинамика : учебник / А. А. Гажур. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. – 312 с. : ил., табл.
ISBN 978-5-9729-1174-5

Освещаются основные положения теории теплопроводности, тепловые и холодильные процессы, термодинамические процессы и циклы. Уделено внимание практическим приложениям и решениям тепловых задач по теплопроводности и теплопередаче через многослойные стенки, теплоотдаче жидкости или газа при разных режимах и условиях течения, излучению между бесконечными пластинами, в замкнутом пространстве и др. Рассмотрены показатели энергоэффективности тепловых процессов и оборудования.

Для студентов, обучающихся по направлению 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», профили «Инжиниринг высокотехнологического оборудования», «Инженер-экономист».

УДК 621.1.016
ББК 31.31

ISBN 978-5-9729-1174-5

© Гажур А. А., 2023
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2023
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 8

ЧАСТЬ I. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Глава 1. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ 10
1.1. Теплообмен. Его виды 10
1.2. Температурное поле. Теплопроводность 10
1.3. Коэффициент теплопроводности 15
1.4. Особенности теплопроводности в разных средах 18
1.5. Дифференциальное уравнение теплопроводности 19
1.6. Принцип решения тепловой задачи. Источники теплоты. Краевые условия (начальное условие и граничные условия: ГУ I–IV рода) 23
1.7. Теплопроводность при стационарном режиме для случая трёхмерного потока тепла 28
1.8. Теплопроводность через плоскую стенку при стационарном режиме 29
1.9. Теплопроводность через цилиндрическую стенку 33
1.10. Теплопроводность через шаровую стенку 37
1.11. Дифференциальные уравнения в частных производных 39
1.12. Метод разделения переменных (метод Фурье) 40

Глава 2. ТЕПЛООТДАЧА ИЛИ КОНВЕКЦИЯ 51

2.1. Коэффициент теплоотдачи 51
2.2. Режимы движения жидкости 52
2.3. Вязкость 54
2.4. Теория подобия 56
2.5. Турбулентное движение жидкости или газа внутри гладких труб 60
2.6. Ламинарное движение потока жидкости внутри гладких труб 61
2.7. Теплоотдача в неограниченном пространстве 62
2.8. Теплоотдача в ограниченном пространстве 64
2.9. Теплоотдача при поперечном омывании цилиндра 66
2.10. Теплоотдача при омывании пучков труб 68
2.11. Теплоотдача при конденсации пара 71
2.12. Теплоотдача при кипении 74
2.13. Вывод критерия Нуссельта 79
2.14. Уравнение Навье – Стокса 79

Глава 3. ИЗЛУЧЕНИЕ 82

3.1. Спектр излучения. Инфракрасное излучение 82
3.2. Свойства тел относительно излучения. Абсолютно черное тело 83
3.3. Основные законы теплового излучения (Планка, Стефана – Больцмана, Вина, Ламберта, Кирхгофа). Закон Планка 85
3.4. Теплообмен излучением между телами 91
3.5. Поглощение излучения газами и излучение газов 97

Глава 4. СЛОЖНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ... 99

4.1. Эквивалентная теплоотдача ... 99
4.2. Эквивалентное излучение ... 102

Глава 5. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ... 103

5.1. Уравнение теплопередачи. Коэффициент теплопередачи ... 103
5.2. Теплопередача через плоскую стенку ... 103
5.3. Теплопередача через цилиндрическую стенку ... 105
5.4. Теплопередача через шаровую стенку ... 107
5.5. Теплообменные аппараты ... 106

Глава 6. ПОКАЗАТЕЛИ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ ... 112

6.1. Применяемые и предлагаемые показатели энергетической эффективности ... 112
6.2. Безразмерные показатели энергетической эффективности ... 112

Список литературы к части I ... 116

ЧАСТЬ II. ТЕРМОДИНАМИКА

РАЗДЕЛ 1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ... 118

Глава 7. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ ... 118

7.1. Основные определения ... 118
7.2. Идеальный газ. Параметры состояния ... 119

Глава 8. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ... 124

8.1. Термодинамическая система ... 124
8.2. Классификация термодинамических систем ... 124
8.3. Поверхность термодинамических процессов ... 125
8.4. Уравнение состояния идеального газа ... 127

Глава 9. ЗАКОН АВОГАДРО. КИЛОМОЛЬ. ГАЗОВАЯ ПОСТОЯННАЯ. ГАЗОВЫЕ СМЕСИ ... 129

9.1. Закон Авогадро. Киломоль ... 129
9.2. Определение величины газовой постоянной ... 129
9.3. Газовые смеси ... 130

Глава 10. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ... 135

10.1. Теплоемкость. Постоянная теплоемкость ... 135
10.2. Переменная теплоемкость ... 138

10.3. Истинная теплоемкость 139
10.4. Средняя теплоемкость 139
10.5. Теплоемкость газовой смеси 141

Глава 11. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. Pv-ДИАГРАММА. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ 142

11.1. Графический метод исследования термодинамических процессов. Pv-диаграмма 142
11.2. Внутренняя энергия состояния тела (газа) 143
11.3. Работа в термодинамическом процессе 145
11.4. Первый закон термодинамики 146

Глава 12. ИЗОПРОЦЕССЫ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ГАЗА. ИЗОХОРНЫЙ И ИЗОБАРНЫЙ ПРОЦЕССЫ. УРАВНЕНИЕ МАЙЕРА 147

12.1. Изопроцессы изменения состояния газа 147
12.2. Изохорный процесс 148
12.3. Изобарный процесс 150
12.4. Уравнение Майера 152

Глава 13. ЭНТАЛЬПИЯ. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНТАЛЬПИИ. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС 153

13.1. Энтальпия (теплосодержание) 153
13.2. Первый закон термодинамики с использованием энтальпии 154
13.3. Изотермический процесс 158

Глава 14. АДИАБАТНЫЙ ПРОЦЕСС. ПОЛИТРОПНЫЙ ПРОЦЕСС 160

14.1. Адиабатный процесс 160
14.2. Политропный процесс изменения состояния идеального газа 163

Глава 15. ЭНТРОПИЯ. Ts-ДИАГРАММА. ПЕРЕНОС ПРОЦЕССОВ ИЗ Pv-ДИАГРАММЫ В Ts-ДИАГРАММУ 167

15.1. Энтропия. Ts-диаграмма 167
15.2. Перенос процессов из Pv- в Ts-диаграмму 175

РАЗДЕЛ 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ 177

Глава 16. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕРМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ. ЦИКЛ И ТЕОРЕМА КАРНО. ОБРАТНЫЙ ЦИКЛ КАРНО. ХОЛОДИЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ 177

16.1. Второй закон термодинамики 177

16.2. Термический коэффициент 178
16.3. Цикл Карно. Теорема Карно 182
16.4. Обратный цикл Карно. Холодильный коэффициент 187

Глава 17. ЭНТРОПИЯ В ЦИКЛИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ. УРАВНЕНИЕ КЛАУЗИУСА. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭНТРОПИИ 189

17.1. Энтропия в циклическом процессе. Уравнение Клаузиуса 189
17.2. Основное уравнение термодинамики 193
17.3. Статистическая интерпретация энтропии 193

Глава 18. ВОДА И ВОДЯНОЙ ПАР. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ. PT-, Pv- И Ts-ДИАГРАММЫ ВОДЯНОГО ПАРА. ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА. ВОДЯНОЙ ПАР В Is-ДИАГРАММЕ 194

18.1. Вода и водяной пар 194
18.2. Фазовые переходы. PT-диаграмма 199
18.3. Pv- и Ts-диаграммы водяного пара. Параметры состояния водяного пара 201
18.4. Водяной пар в Is-диаграмме 209

Глава 19. ВЛАЖНЫЙ ВОЗДУХ. Pv-ДИАГРАММА ВЛАЖНОГО ВОЗДУХА. ТОЧКА РОСЫ. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВЛАЖНОСТЬ. ВЛАГОСОДЕРЖАНИЕ. id-ДИАГРАММА ВЛАЖНОГО ВОЗДУХА 214

19.1. Влажный воздух 214
19.2. Влажный воздух в Pv-диаграмме. Точка росы 215
19.3. Абсолютная и относительная влажность 217
19.4. Влагосодержание 219
19.5. Влажный воздух в id-диаграмме 221

Глава 20. ИДЕАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ОТТО, ДИЗЕЛЯ И ТРИНКЛЕРА. СРАВНЕНИЕ ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ 224

20.1. Циклы тепловых двигателей 224
20.2. Цикл Отто 226
20.3. Цикл Дизеля 228
20.4. Цикл Тринклера 230
20.5. Сравнение эффективности идеальных циклов 232
20.6. Эффективность реальных циклов 237

Глава 21. КОМПРЕССОР. КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПРЕССОРОВ. ОДНОСТУПЕНЧАТЫЙ, ДВУХСТУПЕНЧАТЫЙ И МНОГОСТУПЕНЧАТЫЙ КОМПРЕССОРЫ 240

21.1. Компрессор. Классификация компрессоров 240
21.2. Одноступенчатый компрессор 240
21.3. Двухступенчатый компрессор 246
21.4. Многоступенчатый компрессор 250

Глава 22. ХОЛОДИЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ. ИХ ЦИКЛЫ. ДРОССЕЛИРОВАНИЕ. БЫТОВОЙ ХОЛОДИЛЬНИК. АБСОРБЦИОННАЯ ХОЛОДИЛЬНАЯ УСТАНОВКА. ТЕПЛОВОЙ НАСОС 252

22.1. Холодильные установки. 252
22.2. Дросселирование. Уравнение первого закона термодинамики для потока газа. Дифференциальный и интегральный эффект Джоуля – Томсона 260
22.3. Бытовой холодильник 263
22.4. Абсорбционная холодильная установка 264
22.5. Тепловой насос 266

Глава 23. ЦИКЛ РЕНКИНА. ОБОБЩЕННЫЙ ЦИКЛ ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ. ИНДИКАТОРНАЯ ДИАГРАММА. ГАЗОВАЯ ТУРБИНА. ТЕПЛОВАЯ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЯ. ТЕПЛОФИКАЦИЯ 269

23.1. Цикл Ренкина 269
23.2. Обобщенный термодинамический цикл тепловых двигателей 273
23.3. Индикаторная диаграмма 276
23.4. Газовая турбина 277
23.5. Тепловая электростанция. Теплофикация 279

Глава 24. ЭКСЕРГИЯ. ЭНТРОПИЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НУЛЕВОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ 283

24.1. Эксергия 283
24.2. Энтропия и термодинамическая вероятность 287
24.3. Нулевое начало термодинамики (общее начало термодинамики). Третье начало термодинамики (теорема Нернста) 291

Список литературы к части II 292

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 293

ПРИЛОЖЕНИЕ 295

ЧАСТЬ I. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Глава 1
ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

1.1. Теплообмен. Его виды

Теплообмен (теплоперенос) (англ. *heat transfer*) – переход некоторого количества теплоты от одного тела к другому. Существуют два вида теплообмена:

1) *теплообмен излучением* (анг. *radiation*). Тепловая энергия первого тела переходит в лучистую энергию Е, достигает второго тела, поглощается им и переходит в тепловую энергию второго тела. И наоборот. Тела не соприкасаются;

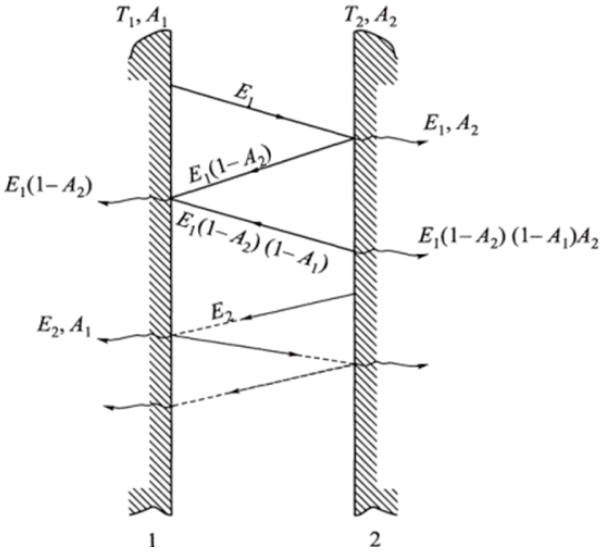


Рис. 1.1. Теплообмен излучением

2) *теплообмен соприкосновением*: а) теплообмен конвекцией или теплоотдача (англ. *convection*) – перенос теплоты нагретыми слоями жидкости или газа; б) теплоперенос теплопроводностью (кондукцией) (англ. *conductivity*) – перенос теплоты ($E_{кин}$) соседними молекулами (на рисунке – через заштрихованную область).

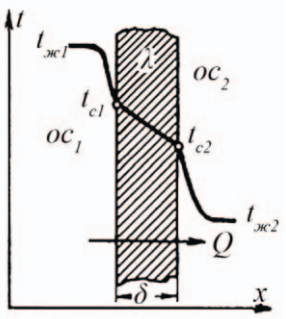


Рис. 1.2. Теплообмен соприкосновением

1.2. Температурное поле. Теплопроводность

Теплопроводность – передача теплоты от одной части тела к другой или от одного тела к другому, соприкасающемуся с ним.

Пусть:

1) имеется однородное твердое тело (например, в виде элемента пластины (стенка);

2) весь поток теплоты проходит через стенку (такой режим перехода теплоты называется стационарным или установившимся).

Стационарный режим – режим, при котором температура в каждой точке тела не изменяется с течением времени. Соответственно, *нестационарный* (неустановившийся) *режим* – режим, при котором часть теплоты идет на разогрев самого тела, т. е. температура в каждой точке тела изменяется с течением времени (как правило, этот режим предшествует или последует стационарному).

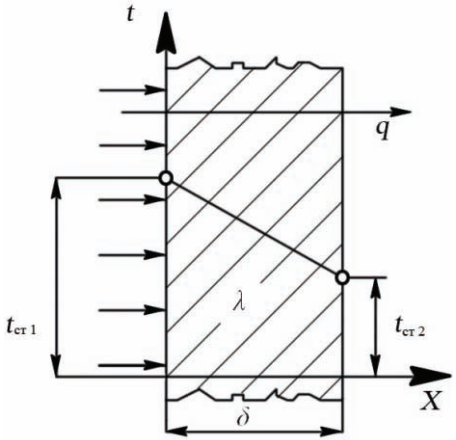


Рис. 1.3. Теплообмен теплопроводностью

Любое физическое явление происходит в пространстве и времени. Следовательно, может быть проведено аналитическое исследование (пространственно-временное). Основной интересующей нас при изучении тепловых процессов характеристикой является температура как физическая величина.

Температура является функцией, определенной на температурном поле.

Температурное поле – совокупность мгновенных (в данный момент времени) значений температуры во всех точках изучаемого пространства (рис. 1.4).

Нестационарное температурное поле – поле, температура которого меняется и в пространстве, и в течение времени (соответствует нестационарному режиму)

$$T = T(x, y, z, \tau). \tag{1.1}$$

Стационарное температурное поле – температура в каждой точке не изменяется в течение времени (соответствует стационарному режиму)

$$T = T(x, y, z),\ \partial T / \partial \tau = 0. \tag{1.2}$$

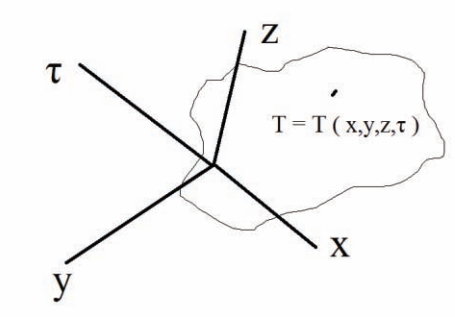


Рис. 1.4. Температурное поле

В зависимости от геометрических характеристик объекта рассматривают:

Трехмерное температурное поле:

1) нестационарное (например, температурное поле шара)

$$T = T(x, y, z, \tau);$$

2) стационарное

$$T = T(x, y, z),\ \partial T / \partial \tau = 0.$$

Двухмерное температурное поле (например, поле угла здания):

1) нестационарное

$$T = T(x, y, \tau),\ \partial T / \partial z = 0; \tag{1.3}$$

2) стационарное

$$T = T(x, y),\ \partial T / \partial \tau = 0,\ \partial T / \partial z = 0. \tag{1.4}$$

Одномерное температурное поле (температурное поле стержня):

1) нестационарное

$$T = T(x, \tau),\ \partial T / \partial \underline{z} = 0,\ \partial T / \partial y = 0; \qquad (1.5)$$

2) стационарное

$$T = T(x, y),\ \partial T / \partial \tau = 0,\ \partial T / \partial z = 0,\ \partial T / \partial y = 0. \qquad (1.6)$$

Рассмотрим существование температурного поля в некотором объекте (рис. 1.5). Такая модель внешне напоминает луковицу или матрешку с бесконечным числом вложенных элементов, называемых изотермическими поверхностями.

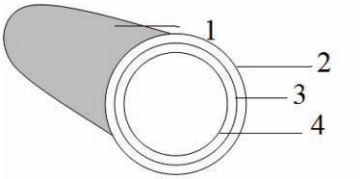


Рис. 1.5. Температурное поле в объекте: 1 – изотермическая поверхность; 2–4 – изотермы (сечения изотермических поверхностей плоскостью)

Изотермическая поверхность – множество точек, имеющих одинаковую температуру. *Изотерма* – сечение изотермической поверхности плоскостью. Свойства изотермической поверхности:

1) поверхности не пересекаются (иначе возможно существование хотя бы одной точки, имеющей две различные температуры);
2) поверхности не прерываются внутри непрерывного поля (иначе возможно существование хотя бы одной точки, где нет непрерывности, то есть температурное поле отсутствует).

Рассмотрим сечение изотермических поверхностей плоскостью (рис. 1.6).

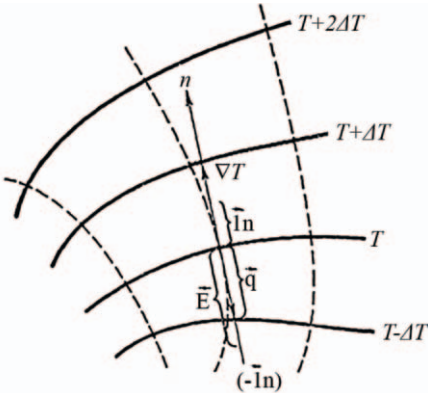


Рис. 1.6. Сечение изотермических поверхностей плоскостью

Наибольший перепад температуры происходит по нормали к изотермической поверхности. Наибольшее возрастание функции характеризуется величиной градиента, т. е. производной по направлению наибольшего роста функции. *Градиент температуры* характеризует возрастание температуры в направлении нормали

$$\text{grad}T = 1\text{n}\partial T / \partial n, \tag{1.7}$$

где 1n – единичный вектор по направлению нормали к изотермической поверхности в сторону роста температуры; ∂T / ∂n – производная температуры по направлению нормали.

В случае заданной системы декартовых координат градиент равен

$$\text{grad}T = \nabla T = 1x\,\partial T / \partial x + 1y\,\partial T / \partial y + 1z\,\partial T / \partial z, \tag{1.8}$$

где 1x, 1y, 1z – ортогональные векторы единичной длины, направленные по координатным осям. Другое написание: i, j, k – ортогональные векторы единичной длины. Тогда:

$$\text{grad}T = \nabla T = 1x\,\partial T / \partial x\,\mathbf{i} + 1y\,\partial T / \partial y\,\mathbf{j} + 1z\,\partial T / \partial z\mathbf{k}. \tag{1.9}$$

Отметим, что температурное поле является скалярным полем, то есть скалярной функцией на некотором конечномерном пространстве, ставящей в соответствие каждой точке из некоторой области этого пространства (области определения) скаляр, то есть действительное или комплексное число.

Пример.

Найти градиент функции $T(x,y,z) = \ln(2x^2+y^2+2^2)$ в точке A(1, 2, 4).

Вычислим частные производные:

$$\partial T/\partial x = \partial/\partial x \ln(x^2+y^2+2z^2) = 4x/(2x^2+y^2+z^2),$$
$$\partial T/\partial y = \partial/\partial y \ln(x^2+y^2+2z^2) = 2y/(2x^2+y^2+z^2),$$
$$\partial T/\partial z = \partial/\partial z \ln(x^2+y^2+2z^2) = 2z/(2x^2+y^2+z^2).$$

Найдем градиент в точке A(1, 2, 4), подставив в формулы для частных производных значения x = 1, y = 2, z = 4).

Тогда получим $\nabla T(A) = 2/11i+2/11j+4/11k$.

Передача тепла самопроизвольно происходит по нормали к изотермической поверхности от мест с большей температурой к местам с менее высокой. В связи с этим для описания температурного поля используется величина, равная градиенту по величине и противоположная по направлению, которая носит название *напряженности температурного поля* (или вектора напряженности температурного поля)

$$E = -\text{ grad } T. \tag{1.10}$$

Определим величину передаваемого в процессе теплообмена тепла. Для этого введем понятие плотности теплового потока.

Плотность теплового потока – функция от градиента (или напряженности) температурного поля. Плотность теплового потока (англ. *heat flow density*) – отношение потока к площади поверхности, через которую он проходит или количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности ([Вт/м^2])

$$q = -\lambda \mathrm{grad} T; \tag{1.11}$$

$$q = \lambda E; \tag{1.12}$$

$$q = -\lambda \partial T / \partial n; \tag{1.13}$$

$$q = dQ / (dF d\tau), \tag{1.14}$$

где $dQ / d\tau$ – скорость теплового потока – количество тепла, протекающего в единицу времени, Вт; dF – площадь изотермической поверхности, м^2; λ – коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом теплопроводности, Вт/мК (Λ, λ – ля́мбда, греч. Λάμδα).

Линии максимального перемещения теплоты совпадают с направлением скорости максимального теплового потока и называются *линиями теплового тока.*

Тепловой поток – количество теплоты, проходящей через изотермическую поверхность. Определим величину теплового потока.

$$Q = \int_F q dF; \tag{1.15}$$

$$Q = -\int_F \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) dF. \tag{1.16}$$

Перейдем к основному закону теплопроводности – закону Фурье, найденному экспериментально.

Закон Фурье (Fourier, 1807): количество теплоты, проходящее через единицу площади изотермической поверхности в единицу времени прямо пропорционально зависит от градиента температуры:

$$dQ = -\lambda(\partial \mathrm{T} / \partial n) dF d\tau, \tag{1.17}$$

$$\vec{Q} = -\lambda(\mathrm{grad} T)\, F. \tag{1.18}$$

1.3. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности (англ. *heat conductivity factor, K-factor*) имеет существенное значение для тепловой характеристики веществ. Исследуем физический смысл коэффициента λ.

Рассмотрим стационарное одномерное температурное поле

$$q = -\lambda\, \partial T / \partial x = -\lambda\, (1x\, \partial T / \partial x + 0 + 0). \quad (1.19)$$

Температура зависит от одной координаты (нормали к поверхности)

$$\text{grad}T = \text{const},\ \partial T/\partial x = \text{const}. \quad (1.20)$$

При интегрировании получим

$$T = ax + b \quad (1.21)$$

Это означает, что рост температуры T с ростом x идет по линейному закону (рис. 1.7).

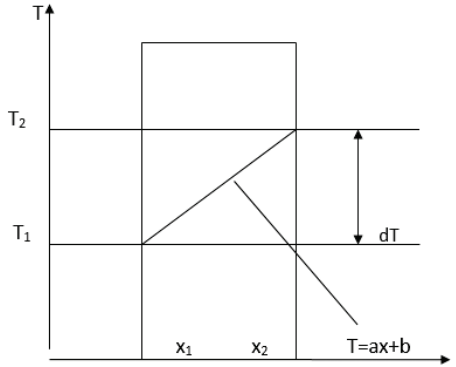


Рис. 1.7. Зависимость температуры от толщины стенки

Производная – разность координат

$$\partial T / \partial x = (T_2 - T_1) / (x_2 - x_1) = \text{const} \quad (1.22)$$

Тогда

$$dQ = -\lambda(\partial T / \partial n) dF d\tau = -\lambda(T_2 - T_1 / x_2 - x_1)\, dF d\tau \quad (1.23)$$

Тепловой поток равен

$$\partial Q / \partial \tau = Q / \tau = \text{const}. \quad (1.24)$$

Скорость теплового потока постоянна

$$q = -Q / (\tau F), \quad (1.25)$$

или

$$q = \lambda\, (T_1 - T_2) / (x_2 - x_1). \quad (1.26)$$

Переданная теплота

$$Q = \lambda\, (T_1 - T_2)\, \tau F / (x_2 - x_1). \quad (1.27)$$

Коэффициент теплопроводности λ равен

$$\lambda = Q\, (x_2 - x_1) / F\tau (T_2 - T_1). \quad (1.28)$$

Из формулы (1.27) следует определение коэффициента теплопроводности (принимая за единичные все компоненты формулы, которые возможно).

Коэффициент теплопроводности λ – количество тепла, протекающего за единицу времени (1 с) через единицу изотермической поверхности (1 м^2) при перепаде температур в 1 градус на единицу длины нормали (1 м). Размерность коэффициента теплопроводности λ [Дж·м/м^{2}СК = Вт/мК]. λ – физическая характеристика тела относительно теплопроводности.

$$\lambda = Q\,(x_2 - x_1) / F\tau(T_2 - T_1) = Q\,(F,\ \tau,\ \Delta T,\ \Delta x) \qquad (1.29)$$

Производные от коэффициента теплопроводности λ величины:

1) *тепловая проводимость* [Вт/м^{2}К]

$$\lambda / (x_2 - x_1) = \lambda / \Delta x = \lambda / \delta \qquad (1.30)$$

2) *термическое сопротивление* [м^{2}К/Вт]

$$\Delta x / \lambda = \delta / \lambda. \qquad (1.31)$$

Пределы изменения коэффициента теплопроводности: от λ = 0,0086 [Вт/мК] у CCl_4 (четыреххлористого углерода при 100 °С) до λ = 0,416 [Вт/мК] у Ag (серебра при 0 °С).

Ниже приведены коэффициенты теплопроводности различных веществ (табл. 1.1)

Таблица 1.1

Коэффициенты теплопроводности различных веществ

Материал	Теплопроводность, λ, Вт/(мК)
1	2
Алмаз	1 001–2 600
Серебро	430
Золото	320
Железо	92
Олово	67
Сталь	47
Кварц	8
Стекло	1
Вода	0,6
Кирпич строительный	0,2–0,7
Пенобетон	0,14–0,3
Дерево	0,15
Шерсть	0,05
Минеральная вата	0,045
Пенополистирол	0,04
Воздух (сухой, неподвижный)	0,024–0,031
Аргон	0,0177
Альфоль	0,055
CCL_4	0,0086
Вакуум (абсолютный)	0

1.4. Особенности теплопроводности в разных средах

Теплопроводность максимальна у чистых металлов и минимальна у газов. Коэффициент теплопроводности зависит: 1) от химического состава; 2) физического строения; 3) состояния вещества.

Твердые тела: в металлах кристаллическая молекулярная структура способствует переносу тепла. Тепловая энергия переносится свободными электронами. В твердых телах два основных механизма: перенос свободными электронами (электронная теплопроводность λe) и атомными колебаниями (фононная или решеточная теплопроводность λp). Фононная характерна для диэлектриков, а электронная – для металлов. Перенос теплоты в полупроводниках сложнее, чем в диэлектриках и металлах. Важны оба механизма, а также влияют примеси, перенос экситонов (квазичастицы: подвижное электронное возбуждение – связное состояние электрона и дырки) и другие факторы. Решеточная теплопроводность в металлах может быть оценена из выражения

$$\lambda p = 2{,}41 r C v (E\rho) 1/2, \tag{1.32}$$

где r – расстояние между атомами; Cv – удельная изохорная теплоемкость; ρ – плотность; E – модуль Юнга (модуль продольной упругости).

$$E = FL / (S\Delta L), \tag{1.33}$$

где F – нормальная составляющая силы, S – площадь, по которой распределено действие силы, L – длина деформируемого стержня, ΔL – модуль изменения длины стержня при упругой деформации.

Коэффициент λ зависит от анизотропии (неоднородности строения по разным направлениям). Например, теплопроводность дуба вдоль волокон равна $\lambda_{дуб} = 0{,}23$, поперек волокон $\lambda_{дуб} = 0{,}1$. Коэффициент λ увеличивается с ростом температуры (из-за увеличения кинетической энергии молекул). С ростом температуры растет λ воздуха в порах материала и интенсивность излучения в них. Для многих материалов зависимость λ от температуры можно принять линейной

$$\lambda = \lambda_o [1 + b(t - t_0)], \tag{1.34}$$

где λ_o – значение λ при t_0; b – постоянная, определяемая опытным путем.

Жидкости: в жидкостях распространение тепла аналогично распространению звука (с помощью продольных колебаний). Теплопроводность жидкостей (кроме ртути) невелика. Для большинства с ростом температуры λ снижается (кроме воды и глицерина). Для воды зависимость сложная: при росте температуры λ растет, но, дойдя до максимального значения (130 °С), снижается.

λ жидкостей: от 0,07 до 0,7 [Вт/(мК)]. Теплопроводность жидкостей растет с возрастанием давления.

Газы: в газах и парах теплопроводность вызвана молекулярными переносами кинетической энергией движения молекул, взаимным обменом энергией при соударении молекул. Молекула с большей $E_{кин}$, ударившись о молекулу с меньшей $E_{кин}$, передает последней часть своей энергии, что выравнивает температуру газа. λ газа (как и жидкости) в чистом виде наблюдается в тонких слоях стратифицированной жидкости (более нагретые слои находятся выше). λ можно определить по формуле

$$\lambda = (wLc\rho)/3, \tag{1.35}$$

где w – средняя скорость перемещения молекул; L – средняя длина свободного пробега, c – теплоемкость (v = const, то есть C_v); ρ – плотность.

С ростом температуры λ идеальных газов увеличивается. Величина коэффициента теплопроводности для газов находится в диапазоне:

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-3} - 10^{-1} \text{ [Вт/мК]}.$$

Другая экспериментальная формула для λ

$$\lambda = K\mu C_v, \tag{1.36}$$

где K – модуль Максвелла. $K \approx$ const в большой области температур и давлений. K зависит от числа атомов в молекуле и имеет следующие приближенные значения: многоатомные газы ≈ 1,30; трехатомные газы ≈ 1,70; двухатомные газы ≈ 1,90; одноатомные газы ≈ 2,50, μ – относительная молекулярная масса.

1.5. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Выведем дифференциальное уравнение теплопроводности, которое характеризует процесс изменения температуры тела T:

1) в любой точке тела;

2) в любой момент времени.

Дифференциальное уравнение теплопроводности дает зависимость между температурой тела T, длительностью процесса τ для точки с координатами x, y, z.

Рассмотрим элемент бесконечной пластины. Считаем, что изменение температурного поля происходит только по нормали к поверхности бесконечной пластины.

Допущения к выводу: 1) рассматриваем одномерное температурное поле (тепло распространяется в направлении Ox); 2) термические коэффициенты независимы от координат (изотропность) и времени. В качестве объекта рассмотрим элементарный параллелепипед в однородной, изотропной, неограниченной пластине (рис. 1.5).

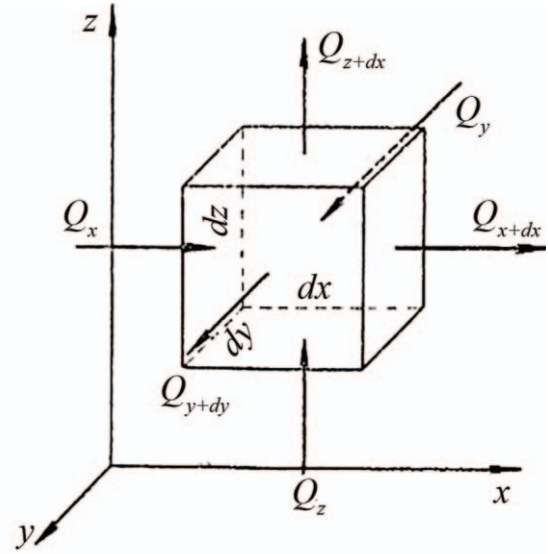


Рис. 1.8. Математическая модель трехмерного потока тепла (одномерный поток тепла – в направлении О*x*) через выделенный в однородной изотропной неограниченной пластине элементарный параллелепипед

Вывод:

1) объем параллелепипеда равен

$$V = dxdydz, \tag{1.37}$$

где *dx, dy, dz* – размеры элементарного параллелепипеда, [м];

2) количество тепла, втекающего через левую грань (*dydz*) в единицу времени равно

$$Q_1 = q_x dydz, \tag{1.38}$$

где q_x – поток тепла через единицу площади, [Дж/м^2];

3) количество тепла, вытекающего через правую грань в единицу времени равно

$$Q_2 = q_{x+dx}\, dydz. \tag{1.39}$$

Если $q_x > q_{x+dx}$, то элементарный параллелепипед будет нагреваться. Разница между потоками тепла будет равна теплу, аккумулированному выделенным элементарным параллелепипедом

$$Q_{\text{акк}} = c\rho\, \partial T / \partial \tau\, dxdydz. \tag{1.40}$$

Тепловой баланс (по закону сохранения энергии)

$$q_x dydz - q_{x+dx} dydz = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dxdydz, \tag{1.41}$$

где c – теплоемкость тела [Дж/(м^{3}К)]; $m = \rho \cdot V = \rho\, dxdydz$ – масса тела [кг]; ρ – плотность тела [кг/м^3]; $\partial T / \partial \tau$ – скорость изменения температуры [К/с].

Количество тепла q_x предполагается известным. Неизвестным является значение q_{x+dx} в бесконечно малой окрестности dx точки с координатой x. Для нахождения приближенного значения q_{x+dx} воспользуемся разложением функции в *ряд Тэйлора.* Ряды Тейлора применяются при аппроксимации функции многочленами (аппроксима́ция – приближе́ние, лат. *proxima* – ближайшая – замена объектов сходными, но более простыми). Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Ряд Тэйлора в точке x_0 – ряд, составленный из многочленов равен:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n) \ / n! \tag{1.42}$$

Ряд Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 есть степенной ряд относительно двучлена $(x - x_0)$

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) / 1! + f''(x_0)\,(x - x_0)^2 / 2! + \ldots + \\ + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n! + \ldots \tag{1.43}$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд Тэйлора дает

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) / 1! + f''(x_0)(x - x_0)^2 / 2! + \ldots + \\ + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n! + . \tag{1.44}$$

Ограничимся в аппроксимации двумя первыми членами разложения

$$f(x) \sim f(x_0) + (\partial f(x) / \partial x)\, dx. \tag{1.45}$$

Переходя к потоку тепла

$$q_{x+dx} \sim q_x + (\partial q_x / \partial x) dx. \tag{1.46}$$

Подставим это значение в выражение баланса (1.38)

$$q_x dydz - (q_x + (\partial q_x / \partial x)\, dx) dydz = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}\, dxdydz. \tag{1.47}$$

Преобразуем

$$-(\partial q_x / \partial x)\, dx\, dydz = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}\, dxdydz. \tag{1.48}$$

Или

$$-\partial q_x / \partial x = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}. \tag{1.49}$$

Из уравнения теплопроводности $q = -\lambda\, \partial T / \partial x$ получим при дифференцировании

$$\partial q_x / \partial x = -\lambda(\partial^2 T / \partial x_2). \quad (1.50)$$

Подставим в уравнение баланса полученное выражение

$$\lambda(\partial^2 T / \partial x_2) = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (1.51)$$

Получили дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного потока тепла. Набор постоянных из уравнения теплопроводности заменяется общим показателем, называемым *коэффициентом температуропроводности a* с размерностью [м^2/с].

$$a = \lambda/(c\rho). \quad (1.52)$$

Физический смысл *a*: коэффициент температуропроводности пропорционален скорости распространения изотермической поверхности. Он характеризует инерционные свойства тела относительно распространения температурного поля (молекулярный перенос внутренней энергии тела). Смысл коэффициента температуропроводности, объединяющего совокупность тепловых характеристик данного вещества, становится яснее через понятие термического времени, которое представляет собой промежуток времени [*c*], за который тело, состоящее из данного вещества, теряет половину тепловой энергии. Между термическим временем и коэффициентом температуропроводности существует обратно пропорциональная зависимость

$$a = F(\tau_T^{-1}) \quad (1.53)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного потока тепла через коэффициент температуропроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a(\partial^2 T / \partial x_2). \quad (1.54)$$

Такой вид дифференциального уравнения теплопроводности является наиболее употребимым. Рассмотрим запись в координатных осях теплового потока по нормали к изотермической поверхности. Вектор *q* в трехмерной декартовой системе координат примет вид

$$\partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y + \partial q_z / \partial z. \quad (1.55)$$

Аккумулированное элементарным объемом тепло будет равно

$$Q_{акк} = (\partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y + \partial q_z / \partial z)\, dxdydz. \quad (1.56)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\,(\partial^2 T / \partial x_2 + \partial^2 T / \partial y_2 + \partial^2 T / \partial z_2). \quad (1.57)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности в ином виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\,\nabla^2 T, \tag{1.58}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа в ортонормированном базисе (трехмерных декартовых координатах)

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_2 + \partial^2 / \partial y_2 + \partial^2 / \partial z_2. \tag{1.59}$$

Рассмотрим случай, когда внутри тела имеются источники тепла (например, воздействие на влагу СВЧ-поля, пассажиры в метрополитене и т. п.). Удельную мощность w [Вт/м^3] таких источников тепла, т. е. количество выделяемого тепла в единице объема в единицу времени, будем считать известной. Тогда количество тепла, выделенного в элементарном объеме в единицу времени будет равно

$$Q_{\text{внутр}} = w dx dy dz. \tag{1.60}$$

Рассмотрим одновременно внешний и внутренний нагрев тела

$$q_x dy dz - q_{x+dx} dy dz = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz - w dx dy dz. \tag{1.61}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла при одномерном потоке тепла после аналогичных преобразований будет иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a(\partial^2 T / \partial x_2) + w / (c\rho). \tag{1.62}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла (в трехмерном случае) равно

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\,\nabla^2 T + w / (c\rho). \tag{1.63}$$

1.6. Принцип решения тепловой задачи. Источники теплоты. Краевые условия (начальное условие и граничные условия: ГУ I–IV рода)

Дифференциальное уравнение теплопроводности математически моделирует процесс изменения температуры тела T, т. е. перенос тепла. Для того чтобы решить дифференциальное уравнение теплопроводности, а именно, найти температурное поле внутри тела в любой момент времени, надо знать краевые условия тепловой задачи.

Принцип решения тепловой задачи

Для решения тепловой задачи необходимо знать:

1. *Геометрическую форму нагреваемого* (охлаждаемого) тела (параллелепипед, цилиндр, шар …).

2. *Временное краевое условие*: начальное условие задачи (н. у.): распределение температуры внутри тела в начальный момент времени.

3. *Пространственное краевое условие*: граничные условия (ГУ): закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела.

4. *Внутренние источники тепла* – интенсивность w и расположение (при их наличии).

5. *Теплофизические характеристики* материала тела (λ, *c*, ρ).

Краевые условия – это совокупность начального условия задачи (н. у.) и граничных условий задачи (ГУ).

Условия однозначности – условия, однозначно определяющие ход температуры в теле, т. е. обеспечивающие единственность решения. Условия однозначности – сумма всех вышеприведенных параметров.

Источники теплоты

Изменение температурного поля в теле есть следствие воздействия на тело источников тепла. Приведем примерную классификацию видов источников тепла:

1. По тепловой характеристике источника: а) источники заданной температуры I_t; б) источники заданной интенсивности (мощности) I_s.

2. По направлению потока тепла: а) положительные источники (тепло поступает от них); б) отрицательные источники или стоки (поглощающие тепло).

3. По форме: а) точечные источники (например, СВЧ); б) линейные источники (например, ТЭНы); в) плоские источники (например, чугунная плита); г) объемные источники (например, водяное пространство автоклава).

4. По расположению: а) внутренние источники (расположены внутри тела, например, СВЧ); б) внешние (поверхностные) источники (оказывают тепловое воздействие на поверхность тела).

5. По длительности воздействия: а) источники непрерывного действия; б) мгновенные источники.

6. По режиму работы: а) постоянные во времени; б) переменные.

7. По перемещению относительно тела: а) статичные; б) подвижные.

Источники, классифицированные по пунктам 1; 3–7 не зависят от температурного состояния тела.

Источники пункта 2 зависят от *T*: источник с температурой меньшей, чем температура тела, является стоком.

Пример 1. Проложенный в объекте провод, по которому идет ток постоянной силы (ТЭН). Признаки источника: 1) источник заданной мощности I_s; 2) положительный; 3) линейный; 4) внутренний; 5) непрерывного действия; 6) постоянный во времени; 7) статичный.

Пример 2. Нагревание тела конвективным теплообменом с окружающей средой в печи. Признаки источника: 1) источник заданной температуры I_t; 2) положительный; 3) объемный; 4) внешний; 5) непрерывного действия; 6) переменный; 7) неподвижный (статичный).

Выбор источников существенен для решения следующих задач:

1. *Прямая задача:* определение теплового состояния тела как следствия действия источников тепла.
2. *Обратная задача*: подбор источников для проведения теплового процесса по требуемому конечному тепловому состоянию тела.

Краевые условия

Краевые условия – необходимые условия постановки тепловой задачи.

1. *Начальное условие* (н. у.) или временное краевое условие

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \tag{1.64}$$

где $f(x, y, z)$ – известная функция, определяющая распределение (закон распределения) температуры внутри тела в начальный момент времени (отыскание решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется задачей Коши).

Пример 3. Задача Коши. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y` – 6x^2 = 0$ при условии $y(1) = 3$.

Решение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в уравнение оно обращается в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения – его интегрирование.

1. Запишем данное уравнение в виде: $y` = 6x^2$.
2. Нахождение функции по её производной есть нахождение первообразной для $6x^2$, в данном случае это $y = 2x^3 + C$. Это общее решением дифференциального уравнения n-го порядка (в данном случае первого). Меняя в нём величину C, получим бесконечное семейство решений дифференциального уравнения первого порядка.
3. Применим начальное условие в виде $y(1) = 3$. В общее решение уравнения подставляют значения $x_0 = 1$ и $y_0 = 3$ и находят значение произвольной постоянной C: $C = y_0 – 2x_0^3 = 3 – 2 = 1$.
4. Затем находят частное решение уравнения $y = 2x^3 + C$ при полученном значении $C = 1$: $y = 2x^3 + 1$. Это и есть решение задачи Коши.

Пример распределения: равномерное распределение температур в начальный момент времени (температура в начальный момент времени одинакова в любой точке тела)

$$T(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const}. \tag{1.65}$$

2. *Граничное условие* (ГУ) или пространственное краевое условие:

1) граничное условие I-го рода (ГУ I) или условие Дирихле. Задается распределение температуры на поверхности тела в любой момент времени течения процесса $f(\tau)$

$$T_{\text{п}}(\tau) = f(\tau). \tag{1.66}$$

Пример: температура на поверхности тела поддерживается постоянной в течение всего процесса теплообмена

$$T_{\text{п}}(\tau) = T_0 = \text{const}. \tag{1.67}$$

Граничные условия I-го рода характеризуют, например, нагрев теплопроводностью через соприкасающиеся поверхности тел;

2) граничное условие II-го рода (ГУ II) или условие Неймана. Задается плотность теплового потока для каждой точки поверхности тела как функция времени $q_{\text{п}}(\tau)$

$$q_{\text{п}}(\tau) = f(\tau). \tag{1.68}$$

Пример: поток на поверхность тела поддерживается постоянным в течение всего процесса теплообмена

$$q_{\text{п}}(\tau) = q_0 = \text{const}. \tag{1.69}$$

Граничные условия II-го рода характеризуют нагрев излучением при высокой разности температур тела и источника;

3) граничное условие III-го рода (ГУ III) или условие Робена. Задается закон конвективного теплообмена между окружающей средой и поверхностью тела

$$q_{\text{п}}(\tau) = \alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{с}}), \tag{1.70}$$

где α – коэффициент пропорциональности, который носит название коэффициента теплоотдачи, [Вт/(м^{2}К)]. В случае ламинарного обтекания поверхности твердого тела жидкостью или газом теплообмен можно описать с помощью закона Фурье, используя коэффициент теплопроводности жидкости $\lambda_{\text{ж}}$

$$q_{\text{п}} = -\lambda_{\text{ж}} \partial T / \partial n = \lambda_{\text{ж}}(T_{\text{п}} - T_{\text{с}}) / \delta, \tag{1.71}$$

где δ – толщина ламинарного слоя жидкости, м.

Для этого случая коэффициент α можно выразить как

$$\alpha = \lambda_{\text{ж}} / \delta. \tag{1.72}$$

В нестационарных условиях δ меняется во времени в зависимости от скорости, физических свойств жидкости и др.

$$\delta = f(\tau). \tag{1.73}$$

В приближенных расчетах можно воспользоваться значениями α, полученными с использованием теории подобия. Граничное условие III-го рода применимо и для излучения при малой разнице температур источника $T_и$ и тела $T_п$. В этом случае можно заменить закон Стефана – Больцмана, описывающий излучение, на формулу с использованием коэффициента теплоотдачи

$$q_п(\tau) = [\sigma]\,[T^4_и - T^4_п] = [\sigma]\,[T^2_и + T^2_п][T_и + T_п][T_и - T_п] =$$
$$= \alpha(T)(T_и - T_п), \qquad (1.74)$$

где [σ] – приведенный коэффициент излучения, [Вт/(м^{2}К^4)];

4) граничное условие IV-го рода (ГУ IV). Характеризует теплообмен тела с жидкостью, если температуры тела $T_п(\tau)$ и жидкости $T_с(\tau)$ одинаковы

$$T_п(\tau) = [T_с(\tau)]_п. \qquad (1.75)$$

Классификация геометрических форм

1. *Неограниченное тело* – тело, размеры которого существенно больше исследуемого объекта, если объект контактирует с неограниченным телом. Если сам объект – неограниченное тело, то это означает, что размеры его не ограничены ни в каком направлении.
2. *Неограниченная пластина* – пластина, ширина и длина которой бесконечно больше толщины (тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями).

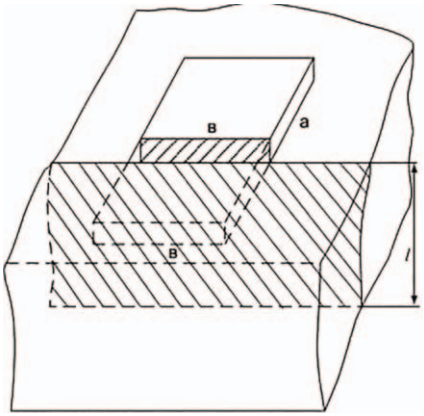


Рис. 1.9. Неограниченная пластина и полуограниченная пластина (один из размеров много меньше двух остальных)

3. *Полуограниченное тело* – тело, с одной стороны ограниченное плоскостью *yz*, а с другой – бесконечное (например, стержень бесконечной длины).