

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Электронное издание

Красноярск
СФУ
2021

УДК 51(07)
ББК 22.161я73
С232

Рецензенты:

А. М. Кытманов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ИМиФИ СФУ;

Е. К. Лейнартас, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций ИМиФИ СФУ.

Составитель: **Мысливец** Симона Глебовна

С232 Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие / сост.: С. Г. Мысливец. (800 Кб). – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2021. – Систем. требования: РС не ниже класса Pentium I ; 128 Mb RAM ; Windows 98/XP/7 ; Adobe Reader V8.0 и выше. – Загл. с экрана.

Представлено большое количество примеров и задач, способствующие усвоению курса математического анализа.

Предназначено для студентов первого и второго курсов экономических специальностей ИЭГУиФ и других институтов СФУ.

УДК 51(07)
ББК 22.161я73

© Сибирский федеральный университет, 2021

Электронное учебное издание

Подготовлено к публикации издательством
Библиотечно-издательского комплекса

Подписано в свет 13.08.2021. Заказ № 14142
Тиражируется на машиночитаемых носителях

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391)206-26-16; <http://rio.sfu-kras.ru>
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru

Содержание

1. Элементарные функции и их графики	5
2. Предел числовой последовательности	5
3. Предел функции	6
4. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация	8
5. Производная	8
5.1. Производная сложной функции	9
5.2. Логарифмическая производная	9
5.3. Производная функции, заданной неявно	9
5.4. Производная параметрической функции	10
6. Дифференциал функции	11
7. Производные и дифференциалы высших порядков	12
8. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора. Геометрические приложения производной	13
9. Правило Лопиталя вычисления пределов	14
10. Исследование функций	14
11. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной	16
12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	17
13. Интегрирование рациональных функций	18
14. Интегрирование тригонометрических функций	18
15. Интегрирование иррациональных функций	19
16. Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал ф.н.п.	21
17. Частные производные сложных функций и функций, заданных неявно	21
18. Частные производные и дифференциалы высших порядков	23
19. Градиент и производная по направлению. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	24
20. Локальный экстремум функций нескольких переменных	25
21. Условный экстремум функций нескольких переменных	25
22. Наибольшее и наименьшее значения функции	26
23. Определенный интеграл	26
24. Геометрические приложения определенного интеграла	28
24.1. Площадь плоской фигуры	28
24.2. Длина дуги кривой	29
24.3. Объем тел вращения	29
25. Несобственные интегралы	29
25.1. Интегралы с бесконечными пределами	29
25.2. Интегралы от неограниченных функций	30
26. Двойной интеграл, его вычисление в декартовой системе координат	31
27. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярной системе координат	32
28. Вычисление площадей плоских фигур	33
29. Вычисление объемов тел	34
30. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	34
31. Однородные дифференциальные уравнения	35

32.	Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли	35
33.	Уравнения в полных дифференциалах. Приложения дифференциальных уравнений 1-ого порядка	36
34.	Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	36
35.	Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	37
36.	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	37
36.1.	Метод вариации решения неоднородных уравнений	37
36.2.	Неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью	38
37.	Системы дифференциальных уравнений	38
38.	Числовые ряды с положительными членами	40
39.	Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница	41
40.	Функциональные ряды	41
41.	Степенные ряды	42
42.	Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена	43
43.	Применение степенных рядов	44
	Ответы	45

1. Элементарные функции и их графики

1.1. Построить графики основных элементарных функций, указать их области определения:

$y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, ($0 < a < 1$, $a > 1$), $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Найти область определения D каждой из следующих функций:

1.2. $y=\sqrt{4-x^2}$. 1.3. $y=\arccos(1-2x)$.

1.4. $y=\ln\frac{x-2}{x+1}$. 1.5. $y=\log_{x+1}(7-x)$.

1.6. $y=2\sqrt{\arcsin(1-x)}$. 1.7. $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$.

Следующие элементарные функции записать в виде композиции основных элементарных функций:

1.8. $y=\sqrt{\sin x^2}$. 1.9. $y=\sin^2 \ln x$.

1.10. $y=\ln \cos \sqrt[3]{\sin x}$. 1.11. $y=2^{\operatorname{arctg} \ln \sin x}$.

Используя график функции $y=x^2$, построить графики функций:

1.12. $y=2x^2+1$. 1.13. $y=(x-1)^2-1$.

С помощью графического сложения и вычитания построить графики функций:

1.14. $y=x^3+2x$. 1.15. $y=x-\sin x$.

1.16. Построить график произведения функций $y=x \cdot \sin x$.

Построить графики следующих элементарных функций:

1.17. $y=|2-x|+|2+x|$. 1.18. $y=|x^2+2x|-3$.

1.19. $y=\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

1.20. $y=[x]$, где $[x]$ — целая часть x , которая определяется как наибольшее целое число, не превосходящее данное число x .

1.21. $y=\{x\}$, где $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть x .

1.22. $y=2^{|x+1|}+2$.

2. Предел числовой последовательности

Написать первые пять членов последовательности:

2.1. $u_n=1+(-1)^n \frac{1}{n}$. 2.2. $u_n=\frac{3n+5}{2n-3}$.

Написать формулу общего члена последовательности:

2.3. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$ 2.4. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \dots$

2.5. Доказать, что последовательность $u_n=\frac{n}{4n-3}$ монотонно убывает и ограничена.

2.6. Доказать, что последовательность $u_n=\frac{n}{n+1}$ монотонно возрастает и ограничена.

Найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

2.7. $u_n=3n^2-10n-14$. 2.8. $u_n=\sqrt[n]{n}$.

Найти $a=\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ и определить номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|u_n-a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$, если:

2.9. $u_n=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon=0,005$.

2.10. $u_n=\frac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\varepsilon=0,005$.

Вычислить пределы:

- 2.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{3-2n}$. 2.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-5n+2}{2n^2+3}$.
- 2.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{3+n^3}$. 2.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{5n-1} - \frac{2n^2+n}{5n^2-2} \right)$.
- 2.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$. 2.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2+2})$.
- 2.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{n!(2n+1)}$. 2.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - n!}{(3n^2+1)n! - (n-1)!}$.
- 2.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - 3(n+1)!}{(n+2)n! - (n-1)!}$. 2.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)! - 1}{(2n+5)n!}$.
- 2.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$. 2.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^{n-1}}{3^{n-1} + 5^{n+1}}$.
- 2.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+2} + 1}{5 \cdot 7^n + 3^{n+1}}$. 2.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - 3 \cdot 5^n}{1 + 5^{n-1}}$.
- 2.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.
- 2.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2n^2+1} + \frac{7}{2n^2+1} + \dots + \frac{3n+1}{2n^2+1} \right)$.
- 2.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$.
- 2.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.
- 2.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$.
- 2.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n} \right)$.
- 2.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$.

2.32. Доказать, что если последовательность $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ бесконечно малая и $\forall n \in \mathbb{N}$ ($u_n \neq 0$), то последовательность $\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ бесконечно большая.

3. Предел функции

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

- 3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. 3.2. $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$.
- 3.3. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$. 3.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 3.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. 3.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- 3.7. $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 2$. 3.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

Вычислить пределы:

- 3.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 2}$. 3.10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{2x}$.
- 3.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 3}{4 - x^3}$. 3.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{4x^2 + 3x}$.
- 3.13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + x^2 - 6}{x^2 + 3x - 1}$. 3.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x+6}$.
- 3.15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x}{1 - x^3}$. 3.16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{x^2-4}$.
- 3.17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+3}$. 3.18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+3}$.
- 3.19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+6}}{2x^2+x}$. 3.20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+2}}{3x+5}$.