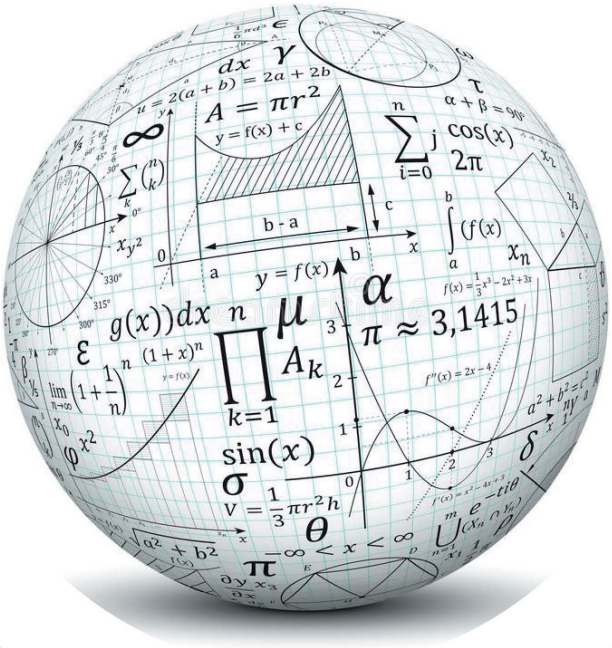
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ | SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY



К. А. КИРИЛЛОВ, С. В. КИРИЛЛОВА,
А. А. КЫТМАНОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

К. А. Кириллов, С. В. Кириллова, А. А. Кытманов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Красноярск
СФУ
2022

УДК 517.91(07)
ББК 22.161.61я73
К431

Р е ц е н з е н т ы:

К. В. Сафонов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики СибГУ им. М. Ф. Решетнева;

К. В. Симонов, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной механики деформируемых сред ИВМ СО РАН – обособленного подразделения ФГБНУ «ФИЦ КНЦ СО РАН»

Кириллов, К. А.

К431 Функциональный анализ : учеб. пособие / К. А. Кириллов, С. В. Кириллова, А. А. Кытманов. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2022. – 86 с.

ISBN 978-5-7638-4668-3

Приведены основные теоретические сведения и примеры решения задач по дисциплине «Функциональный анализ», а также упражнения для практических занятий и самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов бакалавриата направления 01.03.04 «Прикладная математика».

Электронный вариант издания см.:
http://catalog.sfu-kras.ru

УДК 517.91(07)
ББК 22.161.61я73

ISBN 978-5-7638-4668-3

© Сибирский федеральный университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **4**
1. Элементы теории меры **5**
1.1. Основные понятия и теоремы 5
1.2. Примеры решения задач 10
1.3. Упражнения для практических занятий и самостоятельной работы 13
2. Измеримые функции. Интеграл Лебега **16**
2.1. Основные понятия и теоремы 16
2.2. Примеры решения задач 22
2.3. Упражнения для практических занятий и самостоятельной работы 29
3. Метрические пространства. Линейные нормированные пространства **33**
3.1. Основные понятия и теоремы 33
3.2. Примеры решения задач 40
3.3. Упражнения для практических занятий и самостоятельной работы 50
4. Гильбертовы пространства **54**
4.1. Основные понятия и теоремы 54
4.2. Примеры решения задач 56
4.3. Упражнения для практических занятий и самостоятельной работы 60
5. Линейные операторы и линейные функционалы. Сопряженные пространства **63**
5.1. Основные понятия и теоремы 63
5.2. Примеры решения задач 68
5.3. Упражнения для практических занятий и самостоятельной работы 79
Заключение **83**
Список использованных источников **84**

ВВЕДЕНИЕ

Курс функционального анализа, изучаемый студентами различных направлений подготовки, является одним из наиболее абстрактных и потому наиболее сложных. Аппарат функционального анализа применяется почти во всех сферах современной математики и смежных областях науки. Именно его абстрактность позволяет исследовать очень широкий круг вопросов, которые на первый взгляд никак не связаны между собой. Хотя основные принципы функционального анализа были сформулированы в XX веке, эта отрасль математики бурно развивается именно в наше время. Математики разных стран мира продолжают исследования актуальных проблем, которые принято относить к функциональному анализу.

Понятно, что очень важно научить студентов применять уже известные принципы и методы функционального анализа при решении различных задач. Это первый шаг в подготовке будущих ученых и исследователей. К сожалению, количество аудиторных часов, отведенных на знакомство с функциональным анализом, постоянно уменьшается. Поэтому большое значение имеет самостоятельная работа студентов. Цель данного учебного пособия – ознакомить студентов с основными идеями и методами функционального анализа, научить их активно применять методы и принципы дисциплины, а также помочь студентам освоить методику решения классических типов задач.

Разделы учебного пособия освещают основные вопросы теории меры, интеграла Лебега, метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов в нормированных пространствах. В каждом разделе приведены упражнения для практических занятий и самостоятельной работы студентов, примеры решения задач, которые предлагают в указанных упражнениях.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ

Понятие меры – одно из важнейших понятий математики. Мера множества является естественным обобщением длины отрезка, площади плоской фигуры, объема пространственного тела.

В главе 1 приведены определения различных систем множеств (кольца, δ-кольца, σ-кольца, алгебры, σ-алгебры, полукольца), борелевской алгебры, меры на полукольце. Изложена теория лебегова продолжения меры в общем случае, а также в случае продолжения длины как функции множества с полуинтервалов числовой прямой на более широкий класс множеств.

1.1. Основные понятия и теоремы

Симметрической разностью $A\Delta B$ множеств A и B называется множество, определяемое равенством

$$A\Delta B = \left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right).$$

Симметрическая разность множеств обладает следующими свойствами:

1) $A\Delta B = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$;

2) $A \setminus B = A \cap \left(A\Delta B\right)$;

3) $A \cup B = \left(A \cap B\right)\Delta\left(A\Delta B\right)$.

Системой множеств называется множество, элементы которого сами являются множествами.

Пусть $X \neq \varnothing$, $\mathrm{P}\left(X\right)$ – множество всех подмножеств множества X.

Непустая система подмножеств $\Phi \subset \mathrm{P}\left(X\right)$ называется *кольцом*, если для любых множеств $A, B \in \Phi$ выполняются соотношения $A \cap B \in \Phi$, $A\Delta B \in \Phi$.

Теорема 1.1. Система множеств Φ – кольцо тогда и только тогда, когда для любых $A, B \in \Phi$ выполнено $A \cap B \in \Phi$, $A \cup B \in \Phi$, $A \setminus B \in \Phi$.

Кольцо множеств $\Phi \subset \mathrm{P}\left(X\right)$ называется *алгеброй*, если $X \in \Phi$.

Теорема 1.2. Для любой системы подмножеств $\Phi \subset \mathrm{P}\left(X\right)$ существует кольцо $\Sigma\left(\Phi\right)$ такое, что любое кольцо, содержащее Φ, включает в себя также и $\Sigma\left(\Phi\right)$.

Кольцо $\Sigma(\Phi)$ называют наименьшим из колец, содержащих Φ, а также *кольцом, порожденным системой подмножеств* Φ. Кольцо Φ носит название δ-*кольца*, если оно замкнуто относительно счетного пересечения множеств, т. е. если $A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots \in \Phi$, то

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Phi.$$

Кольцо множеств Φ называется σ-*кольцом*, если оно замкнуто относительно счетного объединения множеств, т. е. если для любой счетной совокупности множеств $A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots \in \Phi$ выполняется соотношение

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Phi.$$

Аналогично вводится понятие σ-алгебры: σ-*алгеброй* будем называть алгебру множеств, замкнутую относительно счетного объединения множеств.

Непустая система множеств Φ называется *полукольцом*, если выполняются два условия:

1) для любых множеств $A, B \in \Phi$ имеет место соотношение $A \cap B \in \Phi$;

2) для любых множеств $A, B \in \Phi$ таких, что $A \subset B$, существует конечный набор попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots A_n \in \Phi$, удовлетворяющих равенству

$$B \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k .$$

Например, полукольцами будут

а) система, состоящая из полуинтервалов вида $[a,b) \subset \mathbf{R}$ и $\varnothing$;

б) система, состоящая из полуинтервалов вида $[a,b) \subset [\alpha,\beta)$ и $\varnothing$, где $[\alpha,\beta) \subset \mathbf{R}$ – фиксированный полуинтервал.

Теорема 1.3. Кольцо $\Sigma(\Phi)$, порожденное полукольцом Φ, состоит из множеств, представляющих собой попарно непересекающиеся конечные объединения множеств, принадлежащих полукольцу Φ.

Пусть $X \neq \varnothing$. *Топологией* на множестве X называется система τ подмножеств множества X $\left(\tau \subset \mathrm{P}(X)\right)$, удовлетворяющая трем условиям (аксиомам топологии):

1) если $U_\alpha \in \tau$ для любого $\alpha \in \Omega$ (Ω – произвольное множество индексов α), то

$$\bigcup_{\alpha\in\Omega} U_\alpha \in \tau;$$

2) если $U_1 \in \tau$ и $U_2 \in \tau$, то $U_1 \bigcap U_2 \in \tau$;

3) $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$.

Множества, принадлежащие системе множеств τ, называются *открытыми множествами* в топологии τ, а их дополнения – *замкнутыми множествами*. Множество X с заданной на нем топологией (т. е. пара (X,τ)) называется *топологическим пространством*.

Пусть (X,τ) – топологическое пространство. *Борелевской алгеброй* на X называется σ-алгебра, порожденная топологией τ. Элементы борелевской алгебры носят название *борелевских множеств*.

Пусть $X \neq \varnothing$, $\Phi \subset \mathrm{P}(X)$ – полукольцо. *Мерой* μ на полукольце Φ называется отображение $\mu : \Phi \to \mathbf{R}$, удовлетворяющее двум условиям (аксиомы меры):

1) если $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \Phi$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Phi$ – попарно непересекающиеся множества, то

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \text{ (аддитивность);}$$

2) $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \Phi$ (неотрицательность).

Мера μ, заданная на полукольце Φ, называется *счетно-аддитивной* (σ-*аддитивной*), если при выполнении условия $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Phi$, где $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \Phi$ – попарно непересекающиеся множества, имеет место равенство $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Например, длина $\mu(A) = b - a$ полуинтервала $A = [a,b)$ – счетно-аддитивная мера на полукольце, состоящем из полуинтервалов вида $[a,b) \subset \mathbf{R}$ и $\varnothing$ (считают, что $\varnothing = [a,a)$, поэтому $\mu(\varnothing) = 0$).

Пусть m – мера, заданная на полукольце Φ. Мера μ, заданная на полукольце Σ, называется *продолжением меры* m, если выполнены два условия:

1) $\Phi \subset \Sigma$;

2) $\mu(A) = m(A)$ для любых $A \in \Phi$.

Теорема 1.4. Пусть m – мера на полукольце $\Phi \subset \mathrm{P}(X)$ и $\Sigma(\Phi)$ – кольцо, порожденное полукольцом Φ. Тогда на кольце $\Sigma(\Phi)$ существует