

Д. А. Улахович

# ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ОБРАБОТКУ СИГНАЛОВ

УДК 004.383.3

ББК 32.811.3

У47

Рецензенты:

зав. кафедрой теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»

д-р техн. наук, проф. *Е. Б. Соловьёва*;

профессор кафедры автоматизированных систем управления и связи

Военной академии связи им. Маршала Советского Союза С. М. Будённого

д-р техн. наук, проф. *А. М. Чуднов*

**Улахович, Д. А.**

У47 Введение в цифровую обработку сигналов : учебник / Д. А. Улахович. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. – 436 с. : ил., табл.  
ISBN 978-5-9729-1128-8

Рассматривается обобщённая схема цифровой обработки аналогового сигнала, понятие режима реального времени, понятие нормированного времени, изучаются типовые дискретные сигналы. Дано описание линейных дискретных систем (ЛДС) во временной области: свойства, условия физической реализуемости, разностные уравнения, рекурсивные и нерекурсивные ЛДС. Приводится пример экспресс-анализа частотных характеристик, устанавливается взаимосвязь между временными, операторными и частотными характеристиками ЛДС. Изучается арифметика и квантование чисел в цифровых системах. Даются основы цифрового спектрального анализа. Исследуется дискретизация относительно узкополосных сигналов, преобразование спектра, изучается дискретное преобразование Фурье. Изложен принцип организации многоскоростной обработки сигналов: однократных и многократных систем децимации и интерполяции, а также способы реализации интерполяторов и дециматоров. Изучаются методы компандирования речевых сигналов.

Для студентов, аспирантов, преподавателей вузов связи. Учебник может быть полезен инженерам, занимающимся разработкой цифровых систем связи.

УДК 004.383.3

ББК 32.811.3

ISBN 978-5-9729-1128-8

© Улахович Д. А., 2023

© Захарова М. А., обложка, 2023

© Издательство «Инфра-Инженерия», 2023

© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2023

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Принятые сокращения . . . . .	9
Предисловие . . . . .	11
<b>Глава 1. Основные понятия цифровой обработки сигналов . . . .</b>	<b>14</b>
1.1. Введение . . . . .	14
1.1.1. Предмет дисциплины ЦОС . . . . .	16
1.1.2. Достоинства и недостатки ЦОС . . . . .	20
1.2. Классификация сигналов . . . . .	22
1.2.1. Основные типы сигналов . . . . .	22
1.2.2. Цифровой сигнал . . . . .	24
1.2.3. Типовые дискретные (цифровые) сигналы . . . . .	25
1.2.4. Свойство селективности цифрового единичного импульса . . . . .	29
1.3. Обобщённая схема цифровой обработки аналогового сигнала . . . . .	29
1.3.1. Режим реального времени . . . . .	32
1.3.2. Принцип построения структурной схемы передачи речевых сообщений с использованием ЦОС . . . . .	35
<b>Глава 2. Линейные дискретные системы (ЛДС) . . . . .</b>	<b>36</b>
2.1. Определение и свойства линейных дискретных систем (ЛДС). . . . .	36
2.2. Описание ЛДС во временной области . . . . .	40
2.2.1. Понятия о разностных уравнениях . . . . .	40
2.2.2. Рекурсивные и нерекурсивные ЛДС . . . . .	43
2.2.3. Временные характеристики линейных дискретных систем . . . . .	44
2.3. Устойчивость ЛДС, критерий устойчивости во временной области . . . . .	53
<b>Глава 3. Описание ЛДС в Z-области . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1. Определение и основные свойства Z-преобразования . . . . .	56
3.1.1. Определение Z-преобразования . . . . .	56
3.1.2. Основные свойства Z-преобразования . . . . .	57
3.1.3. Z-изображения функций типовых дискретных сигналов . . . . .	59
3.1.4. Обратное Z-преобразование . . . . .	65
3.2. Передаточные функции линейных дискретных систем . . . . .	68
3.2.1. Определение передаточной функции . . . . .	68
3.2.2. Нули и полюсы передаточной функции . . . . .	71
3.2.3. Виды передаточных функций . . . . .	74

3.2.4. Оценка устойчивости рекурсивной ЛДС по передаточной функции . . . . .	77
3.2.5. Карта нулей и полюсов . . . . .	78
3.3. Структурные схемы линейных дискретных систем . . . . .	79
3.3.1. Структуры нерекурсивных (КИХ) ЛДС . . . . .	81
3.3.2. Структуры рекурсивных (БИХ) ЛДС . . . . .	83
<b>Глава 4. Частотные характеристики линейных дискретных систем . . . . .</b>	<b>92</b>
4.1. Нормирование частоты. Основная полоса частот . . . . .	92
4.2. Определение частотных характеристик ЛДС . . . . .	94
4.3. Свойства частотных характеристик ЛДС . . . . .	97
4.4. Расчёт частотных характеристик ЛДС . . . . .	99
4.5. Экспресс-анализ частотных характеристик . . . . .	104
4.5.1. Экспресс-анализ частотных характеристик звена 1-го порядка . . . . .	105
4.5.2. Экспресс-анализ частотных характеристик звена 2-го порядка . . . . .	107
4.6. Взаимосвязь между характеристиками ЛДС . . . . .	110
<b>Глава 5. Арифметика и квантование чисел в цифровых системах . . . . .</b>	<b>112</b>
5.1. Способы квантования чисел . . . . .	113
5.1.1. Источники шума (ошибок) квантования . . . . .	113
5.1.2. Формы представления данных . . . . .	114
5.1.3. Квантование чисел с фиксированной точкой . . . . .	119
5.1.4. Кодирование чисел с фиксированной точкой . . . . .	122
5.2. Шум аналого-цифрового преобразования . . . . .	124
5.2.1. Собственный шум АЦП . . . . .	124
5.2.2. Шум АЦП, приведённый к выходу цифровой системы . . . . .	126
5.3. Собственный шум цифровой системы . . . . .	130
5.3.1. Собственный шум умножителя . . . . .	131
5.3.2. Полный собственный шум цифровой системы . . . . .	132
5.3.3. Полный выходной шум цифровой системы . . . . .	135
5.4. Эффекты квантования коэффициентов . . . . .	135
5.4.1. Влияние квантования коэффициентов на характеристики ЛДС . . . . .	135
5.4.2. Понятия о предельных циклах . . . . .	137
5.4.3. Переполнение в сумматорах и коэффициенты масштабирования . . . . .	139
<b>Глава 6. Цифровые фильтры . . . . .</b>	<b>142</b>
6.1. Основные определения и классификации цифровых фильтров . . . . .	142

6.1.1.	Задание требований к цифровым фильтрам . . . . .	144
6.1.2.	Условия безыскажённой передачи сигналов . . . . .	149
6.2.	КИХ-фильтры с линейной фазочастотной характеристикой . . . . .	154
6.2.1.	Утверждение о КИХ-фильтрах с линейной ФЧХ . . . . .	154
6.2.2.	Свойства КИХ-фильтров с линейной ФЧХ . . . . .	159
6.3.	Однородный фильтр . . . . .	172
6.3.1.	Определение и структурные схемы однородного фильтра . . . . .	172
6.3.2.	Частотные характеристики однородного фильтра . . . . .	174
6.3.3.	Свойства однородных фильтров . . . . .	179
6.4.	Синтез КИХ-фильтров методом окон . . . . .	180
6.4.1.	Постановка задачи. Определение метода . . . . .	180
6.4.2.	Явление Гиббса . . . . .	183
6.4.3.	Примеры окон . . . . .	183
6.4.4.	Методика синтеза КИХ-фильтров на основе окон . . . . .	190
6.5.	Синтез оптимальных (по Чебышёву) КИХ-фильтров . . . . .	194
6.5.1.	Постановка задачи оптимального синтеза . . . . .	195
6.5.2.	Процедура решения задачи. Понятие о критерии Чебышёва . . . . .	198
6.5.3.	Полиномиальный обменный алгоритм Ремеза . . . . .	207
6.6.	Блочные КИХ-фильтры с целочисленными коэффициентами . . . . .	214
6.7.	Синтез БИХ-фильтров . . . . .	219
6.7.1.	Синтез БИХ-фильтров методом инвариантности импульсной характеристики аналогового прототипа . . . . .	220
6.7.1.1.	Постановка задачи синтеза и её решение . . . . .	220
6.7.1.2.	Свойства БИХ-фильтров, синтезируемых методом инвариантности импульсной характеристики . . . . .	224
6.7.2.	Синтез БИХ-фильтров методом билинейного Z-преобразования . . . . .	226
6.7.2.1.	Определение билинейного Z-преобразования . . . . .	226
6.7.2.2.	Свойства билинейного Z-преобразования . . . . .	228
6.7.2.3.	Методика синтеза цифровых фильтров при билинейном Z-преобразовании . . . . .	232
6.7.2.4.	Расстановка и структура звеньев . . . . .	235
<b>Глава 7. Основы цифрового спектрального анализа . . . . .</b>		<b>243</b>
7.1.	Преобразование Фурье цифровых (дискретных) сигналов и его свойства . . . . .	243
7.1.1.	Свойства спектров дискретных сигналов . . . . .	246
7.1.2.	Связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов . . . . .	248
7.1.3.	Дискретизация относительно узкополосных сигналов . . . . .	253
7.1.4.	Сдвиг (перенос) спектра . . . . .	258

7.1.5. Инверсия спектра вещественного сигнала . . . . .	262
7.1.6. Формирование сигнала с одной боковой полосой . . . . .	265
7.1.7. Выбор частоты дискретизации при переносе спектра узко-полосного ВЧ сигнала в область нижних частот . . . . .	269
7.2. Дискретное преобразование Фурье . . . . .	274
7.2.1. Определение дискретного преобразования Фурье (ДПФ) . . . . .	275
7.2.2. Свойства ДПФ . . . . .	278
7.2.3. Пример вычисления ДПФ . . . . .	282
7.3. Быстрое преобразование Фурье (БПФ) . . . . .	283
7.3.1. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени . . . . .	286
7.3.2. Эффективность алгоритма БПФ . . . . .	290
7.3.3. Организация вычислений БПФ . . . . .	292
7.4. Применение алгоритма БПФ . . . . .	297
7.4.1. Вычисление обратного ДПФ (ОДПФ) . . . . .	297
7.4.2. Вычисление свёрток . . . . .	298
7.4.3. Вычисление реакции ЛДС с использованием БПФ . . . . .	300
7.4.4. Пример решения задачи вычисления 4-точечного ДПФ . . . . .	301
7.4.5. Процедура формирования бит-реверсивного адреса . . . . .	304
7.5. Дискретное преобразование Хартли (ДПХ) . . . . .	306
<b>Глава 8. Специальные фильтры . . . . .</b>	<b>308</b>
8.1. Цифровой преобразователь Гильберта . . . . .	308
8.1.1. Понятие о преобразовании Гильберта . . . . .	309
8.1.2. Дискретное преобразование Гильберта . . . . .	313
8.1.3. Частотные характеристики цифровых преобразователей Гильберта . . . . .	316
8.1.4. Импульсная характеристика ЦПГ . . . . .	318
8.1.5. Задание требований к цифровым преобразователям Гильберта . . . . .	320
8.2. Цифровые согласованные КИХ-фильтры . . . . .	323
8.2.1. Определение и основные характеристики согласованного фильтра . . . . .	323
8.2.2. Импульсная характеристика СФ . . . . .	328
8.2.3. Решающая схема обнаружителя сигналов . . . . .	332
8.3. Амплитудные корректоры . . . . .	335
8.4. Фазовые корректоры . . . . .	338
8.4.1. Понятия о фазовом корректировании . . . . .	338
8.4.2. Фазовые звенья . . . . .	339
8.5. Адаптивные фильтры . . . . .	345
8.5.1. Назначение и место адаптивных фильтров . . . . .	345

8.5.2. Принцип работы адаптивных фильтров . . . . .	348
8.5.3. Основное свойство адаптивного шумоподавителя . . . . .	350
8.5.4. Выбор критерия оценивания . . . . .	352
8.5.5. Оптимальное нерекурсивное винеровское оценивание . . . . .	353
8.6. Медианная фильтрация . . . . .	363
<b>Глава 9. Многоскоростная обработка сигналов . . . . .</b>	<b>366</b>
9.1. Система децимации . . . . .	368
9.1.1. Однократные системы децимации . . . . .	368
9.1.2. Спектральное представление децимации . . . . .	370
9.1.3. Многократные системы децимации . . . . .	373
9.2. Системы интерполяции . . . . .	377
9.3. Преобразование частоты дискретизации с рациональным коэффициентом . . . . .	380
9.4. Способы реализации интерполяторов и дециматоров . . . . .	382
9.4.1. Реализация интерполяторов . . . . .	382
9.4.2. Реализация дециматоров . . . . .	385
<b>Глава 10. Цифровая обработка речевых сигналов . . . . .</b>	<b>387</b>
10.1. Методы компандирования речевых сигналов . . . . .	388
10.1.1. Постановка задачи . . . . .	388
10.1.2. Компрессия сигнала . . . . .	389
10.2. Введение в линейное предсказание . . . . .	395
10.2.1. Постановка задачи линейного предсказания . . . . .	396
10.2.2. Вычисление коэффициентов линейного предсказания . . . . .	400
10.3. Понятия о линейных спектральных корнях (ЛСК) . . . . .	405
10.4. Принцип построения вокодеров с линейным предсказанием . . . . .	411
10.4.1. Основные параметры и характеристики речевого сигнала . . . . .	412
10.4.2. Структурная схема вокодера с линейным предсказанием . . . . .	416
10.5. Векторное квантование . . . . .	419
Список литературы . . . . .	425
Предметный указатель . . . . .	428

# Глава 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

---

Не сведущий в математике да не входит в этот дом.

Надпись над воротами платоновской Академии

Знание только тогда знание, когда оно приобретено  
усилиями своей мысли, а не памятью.

*Л. Н. Толстой*

#### 1.1. Введение

Сигналом называется изменяющаяся во времени физическая величина (ток, напряжение, электромагнитное поле, звуковая волна), отображающая сообщение. Все сигналы, независимо от их природы, подразделяются на два обширных класса: детерминированные (регулярные, задаются аналитическими функциями, их параметры известны в любой момент времени) и недетерминированные (случайные, для их описания применяется аппарат теории вероятностей и случайных процессов). Сигналы в процессе передачи от источника к получателю подвергаются различным преобразованиям, или обработке.



Рис. 1.1. Система обработки сигналов

**Определение:** под обработкой сигналов в общем смысле понимают совокупность процедур, целью которых является получение электромагнитных процессов с заданными свойствами, а также исследование (анализ) свойств самих сигналов.

Любая задача обработки сигналов в технических системах обычно сводится к преобразованию (рис. 1.1) множества  $X$  входных сигналов  $x \in X$  во множество выходных сигналов  $y \in Y$  по определённому правилу.

**Определение:** правило  $F$ , по которому выполняется преобразование  $F: X \rightarrow Y$ , называется оператором, а физический объект, реализующий это правило, называется системой обработки сигналов.

**Определение:** алгоритмом называется заданная строгая последовательность операций вычисления, которая, исходя из входных данных, обязательно приводит к требуемому результату.

Интуитивно ясна возможность представления оператора различными алгоритмами, что будет показано в гл. 2.



Возникновение цифровой обработки сигналов как самостоятельной научно-технической дисциплины относится к началу 1960-х годов, когда была создана не только математическая база, но появились быстродействующие общедоступные цифровые компьютеры (до этого времени использовалась аналоговая вычислительная техника) и цифровые процессоры, которые обеспечили обработку информации в реальном времени. История ЦОС тесно связана с историей цифровой фильтрации. Первые публикации по инженерным вопросам цифровой фильтрации появились в конце 1940-х годов в СССР (Л. М. Гольденберг, Я. З. Цыпкин) и в США (Гуревич). Первые монографии по вопросам ЦОС вышли во второй половине 1960-х годов (Кайзер, Блэкман, Голд, Рэйдер, Оппенгейм, Шафер). Большой вклад в развитие цифровой обработки сигналов внесён отечественной научной школой ЦОС, во главе которой стоял профессор А. А. Ланнэ, преподававший в военной академии связи.

Наиболее мощное продвижение цифровая обработка сигналов практически во все научно-технические приложения (рис. 1.2), включая военную область, получила в 1980-е годы благодаря появлению широкой номенклатуры специальных микросхем (цифровых процессоров, контроллеров, программируемых логических интегральных схем), а также программно-аппаратных средств для проектирования, отладки и контроля устройств, создаваемых на базе методов ЦОС.



Рис. 1.2. Связь ЦОС с различными дисциплинами и области применения ЦОС

**Определение:** цифровая обработка сигналов (ЦОС) – это область науки и техники, в которой изучаются общие для различных технических приложений принципы, методы и алгоритмы преобразования сигналов, основанные на численных методах и реализуемые средствами цифровой вычислительной техники.

Из определения цифровой обработки сигналов следует её широкий междисциплинарный характер, поскольку:

*во-первых*, фундамент ЦОС составляют теоретические базы смежных областей знания: математика (численные методы, дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика, теория принятия оптимальных решений, включая многокритериальный выбор), теория линейных электрических цепей, теория электросвязи;

*во-вторых*, обеспечивается как технологическая связь между различными областями знания, так и единство технической реализации, чему способствует универсальная элементная база (разнообразная вычислительная техника, цифровые процессоры, контроллеры, программируемые логические интегральные схемы);

*в-третьих*, цифровая обработка оказывает прямое влияние и на совершенствование элементной базы, и на развитие других дисциплин.

Отсюда явствует непреложный установившийся факт: цифровая обработка стала одной из тех наиболее мощных комплексных технологий, которые в XXI веке определяют дальнейшее развитие многих областей науки и техники.

### 1.1.1. Предмет дисциплины ЦОС

Дисциплина ЦОС, как и теория линейных электрических цепей, является конкретизированным фрагментом общей теории систем, поэтому терминология и основные понятия теории систем не только распространяются на указанные дисциплины, но и облегчают понимание связей между ними и сходства применяемых методов исследования.

**Предметом дисциплины являются** принципы и методы построения алгоритмов, программ и технических средств обработки цифровых сигналов.

В отличие от непрерывных (аналоговых) систем, где все переменные и процессы являются функциями непрерывного времени, в цифровой обработке все процессы и переменные являются функциями дискретного времени. Это означает, что в цифровой обработке все сигналы представляют собой последовательности чисел (отсчётов), над которыми, независимо от сложности алгоритма, осуществляются *элементарные арифметические операции сложения, вычитания и умножения*. В математиче-

ской логике [27] доказывается, что алгоритм любой сложности может быть построен и вычислен с использованием конечного числа только простейших математических и логических операций, а также операций сдвига и пересылки, причём вычисление одного отсчёта осуществляется за ограниченное число шагов.

Сказанное объясняет проблематику ЦОС, которая порождается особенностью сигналов, подлежащих обработке, набором элементарных операций и ограниченностью ресурса устройств, с помощью которых ЦОС может быть выполнена. Так, среди наиболее острых проблем ЦОС можно отметить две: точность вычислений и обеспечение обработки в реальном времени. Последнее означает, что обработка должна осуществляться в такт с поступлением информации в систему обработки сигналов, о чём более подробно будет сказано в дальнейшем.

Всю совокупность задач, решаемых методами ЦОС, можно разделить на две группы: *задачи анализа* и *задачи синтеза*.

К задачам анализа относятся:

- изучение методов описания как цифровых сигналов и их моделей, так и цифровых цепей, а также их свойств;
- изучение методов анализа процессов, протекающих в цифровых цепях, а также собственно анализ этих процессов.

К задачам синтеза относятся:

- поиск и изучение методов преобразования сигналов;
- построение эффективных алгоритмов таких преобразований;
- конструирование процедур синтеза самих алгоритмов;
- реализация алгоритмов ЦОС.

Характер выполнения алгоритма зависит не только от организации вычислений, но и от способа его реализации. Возможны три способа реализации алгоритмов ЦОС (рис. 1.3):

- аппаратный;
- программный;
- аппаратно-программный.

### **Аппаратная реализация**

*Аппаратная реализация* подразумевает использование разнообразных функциональных блоков: регистров, сумматоров, шифраторов и дешифраторов, счётчиков, линий задержек, устройств памяти, умножителей, сдвигателей, логических элементов, цифровых процессоров обработки сигналов (ЦПОС), программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) и т. д. Совокупность функциональных блоков и связей между ними определяет реализуемый алгоритм.

Достоинство аппаратной реализации состоит в очень высоком быстродействии, что позволяет обрабатывать сигналы на частоте дискретиза-

ции в десятки мегагерц. Это достигается применением функциональных блоков на базе ТТ-логики, распараллеливанием операций и узкой направленностью (специализацией) создаваемых устройств.

К недостаткам аппаратной реализации следует отнести, во-первых, её ориентированность на решение узкоспециальных задач, что подразумевает создание систем с жёсткой логикой, когда любое изменение алгоритма требует изменения структуры устройства, т. е. введения дополнительных функциональных блоков. Во-вторых, аппаратная реализация приводит к большому потреблению энергии и необходимости организовывать теплоотвод. В-третьих, всё сказанное определяет высокую стоимость аппаратной реализации, к тому же проектирование, изготовление и отладка оказываются весьма трудоёмкими при больших временных затратах.

### Программная реализация

*Программная реализация* подразумевает представление алгоритма в виде программы, которую последовательно от команды к команде выполняет один или одновременно несколько независимых блоков. Программа должна быть написана на языке программирования, соответствующем конкретному операционному блоку. Так, для персонального компьютера это может быть любой из языков высокого уровня (Pascal, C++, Java и др.), а для микропроцессорного комплекса или цифрового процессора – соответствующий язык ассемблера (машинный язык).



Рис. 1.3. Способы реализации алгоритмов и систем ЦОС

Программа, написанная на каком-либо из языков высокого уровня, должна быть переведена на машинный язык процессора для получения исполняемой программы. Процесс перевода называется трансляцией. Трансляция осуществляется с помощью специальных программ-трансляторов с языков высокого уровня на языки ассемблеров. Такие программы называются компиляторами.

К достоинствам программной реализации относятся:

- неизменная структура системы при различных алгоритмах и областях применения;
- хорошая гибкость, позволяющая достаточно легко изменять алгоритм работы системы за счёт коррекции или изменения программы;
- существенное ускорение, облегчение и удешевление проектирования, изготовления и отладки системы, поскольку вместо прибора (устройства) разрабатывается программа.

Недостатком программной реализации является относительно низкое быстродействие по причине последовательного выполнения операций программы в одном процессоре. Отсюда и вытекает задача обеспечения реального времени, что достигается применением языка ассемблера.

### **Аппаратно-программная реализация**

*Аппаратно-программная реализация* (рис. 1.4) подразумевает, что часть функций системы ЦОС выполняется аппаратно (аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразования, умножение, приём/передача данных и др.), а другая часть функций выполняется программно. Рассмотрим рис. 1.4 подробнее.

К процессору, работающему по заданной программе, подключены:

- аналого-цифровой преобразователь (АЦП) на входе системы;
- цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) на выходе системы;
- модули внешней памяти, хранящие программы, разнообразные константы и таблицы функций (например,  $\sin$  и  $\cos$ ), что позволяет заменять длительное их вычисление быстрым обращением к памяти (такая реализация является прекрасным примером обмена скорости вычисления на дополнительное оборудование, т. е. действует закон, согласно которому невозможно получить абсолютный выигрыш: любой выигрыш требует платы за себя);
- интерфейсы – специальные вспомогательные микросхемы, обеспечивающие согласование сигналов на стыках с модулями внешней памяти, АЦП, ЦАП, с каналом связи (регистры стыковки также могут быть отнесены к интерфейсу);
- система синхронизации и контроллер, обеспечивающие временное и логическое согласование всех элементов системы.

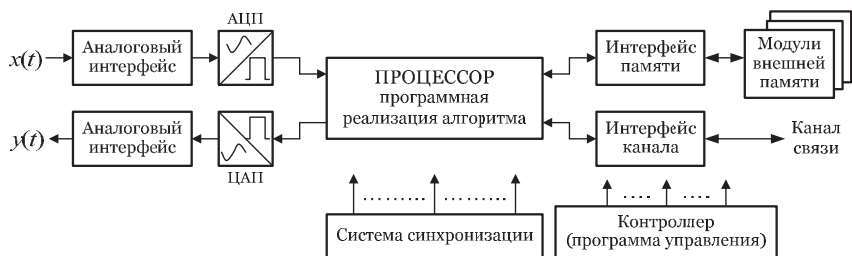


Рис. 1.4. Аппаратно-программная реализация

Аппаратно-программная реализация сочетает положительные свойства аппаратной и программной реализаций. Разумное сочетание аппаратных и программных средств позволяет снизить требования к вычислительным возможностям элементной базы и упростить реализацию системы ЦОС в целом, для отладки которой требуются специальные средства отладки; при этом обязательность наличия отладочных средств не является недостатком, поскольку они создаются для конкретной элементной базы и по сути являются инструментом разработки многочисленных систем ЦОС на этой элементной базе.

### 1.1.2. Достоинства и недостатки ЦОС

Как уже отмечалось, в цифровой обработке все сигналы представляют собой последовательности чисел, над которыми, вообще говоря, осуществляются только элементарные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение. Именно этим объясняются как достоинства, так и недостатки ЦОС относительно аналоговой обработки. Достоинства ЦОС можно разделить на три группы: принципиальные, реализационные и технико-эксплуатационные. Кратко рассмотрим каждую из указанных групп.

**К принципиальным достоинствам относятся:** многофункциональность, мультиплексирование, реализация произвольных преобразований сигналов, отсутствие ограничений на сложность алгоритма.

*Многофункциональность* состоит в том, что одно и то же устройство может исполнять различные алгоритмы в разные моменты времени только за счёт изменения программы: фильтрацию, коррекцию, детектирование, нелинейные преобразования и т. д.

*Мультиплексирование* означает, что с помощью одного процессора можно обслуживать несколько источников сигналов; это объясняется существенной разницей между частотой дискретизации  $f_d$  аналогового

сигнала в АЦП и тактовой частотой  $f_t$  работы процессора, а именно:  $f_t \gg f_d$ . Иначе говоря, период дискретизации  $T_d$  аналогового сигнала во много раз больше периода тактовой частоты  $T_t$  процессора  $T_d \gg T_t$ , поэтому в промежутках между отсчётами одного сигнала  $x_i(n)$  можно обрабатывать отсчёты других сигналов.

Возможность *реализации произвольных преобразований* обеспечивается тем, что процессор обработки сигналов гарантирует реализацию любого алгоритма, допускаемого в рамках дискретной математики, в то время как аналоговые цепи на заданном элементном базисе обеспечивают обработку, допускаемую возможностями этого базиса. Например, с помощью аналоговых  $RLC$ -цепей принципиально невозможна реализация фильтров со строго линейной фазочастотной характеристикой. В рамках ЦОС это возможно, причём такие фильтры обладают очень простой структурой. В ходе изучения дисциплины ЦОС будут рассмотрены многочисленные примеры простой цифровой реализации алгоритмов, либо нереализуемых, либо трудно реализуемых методами аналоговой техники.

**Реализационные достоинства ЦОС** составляют: высокая стабильность и повторяемость характеристик, уникальные возможности для адаптации, высокая точность реализации алгоритмов обработки сигнала.

*Высокая стабильность и повторяемость характеристик* (параметров, коэффициентов) обработки определяется программной реализуемостью соответствующих алгоритмов. Параметры (коэффициенты) не подвержены действию традиционных дестабилизирующих факторов (температуры, давления, влажности и т. п.). Верность результатов обработки определяется стабильностью частоты задающего генератора и правильностью функционирования арифметико-логических элементов вычислителя.

*Уникальные возможности адаптации* связаны с программным характером перестройки алгоритма обработки.

*Высокая точность реализации алгоритма* обеспечивается особыми методами организации вычислений и представления данных.

**Технико-эксплуатационные достоинства** составляют: высокая надёжность, малые массогабаритные характеристики и малое энергопотребление, широкие возможности унификации, т. е. использование одного и того же процессора для реализации разнообразных алгоритмов.

Всё сказанное выше показывает, что методы цифровой обработки предоставляют широкие возможности для реализации алгоритмов произвольной сложности.

Цифровой обработке присущи и **недостатки**:

– *ограниченность частотного диапазона*: в зависимости от применяемых процессоров возможна реализация алгоритмов ЦОС для сигналов, спектры которых сосредоточены в частотных полосах до 30 МГц;

при этом во всех случаях сложность алгоритма обработки обменивается на полосу частот: чем проще алгоритм (т. е. чем меньше операций необходимо выполнить для получения одного отсчёта выходного сигнала), тем более широкополосный сигнал может быть обработан;

– нежелательные эффекты: *шумы округления, эффекты переполнения сумматоров, предельные циклы*; шумы округления являются следствием конечной (ограниченной) точности результатов вычислений; эффекты переполнения и предельные циклы возникают вследствие нелинейных операций при ограничении длин слов операндов (усечении или округлении).

## 1.2. Классификация сигналов

### 1.2.1. Основные типы сигналов

К основным типам сигналов (рис. 1.5) относят: *аналоговый, дискретный и цифровой*.

*Аналоговый* называют сигнал (рис. 1.5, а), непрерывный по времени и состоянию. Такой сигнал описывается *непрерывной* или кусочно-непрерывной функцией  $x(t)$ , при этом и аргумент, и функция могут принимать любые значения в пределах некоторых интервалов  $\min x(t) \leq x \leq \max x(t)$ .

*Дискретным* называют сигнал (рис. 1.5, б), дискретный по времени и непрерывный по состоянию. Такой сигнал описывается решётчатой функцией (*последовательностью*) вида  $x(nT)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , которая определена только в дискретные моменты времени  $nT$  и может принимать *любые значения* из некоторого интервала  $\min x(nT) \leq x(nT) \leq \max x(nT)$ .

Интервал  $T$  называют *периодом* дискретизации, а обратную величину – *частотой* дискретизации:

$$f_d = \frac{1}{T}. \quad (1.1)$$

Значения дискретного сигнала в моменты времени  $nT$  называют *отсчётами*. Дискретный сигнал  $x(nT)$  может быть как *вещественным*, так и *комплексным*:

$$x(nT) = \operatorname{Re}[x(nT)] + j \operatorname{Im}[x(nT)] = x_1(nT) + jx_2(nT), \quad (1.2)$$

где вещественная и мнимая части описываются вещественными последовательностями  $x_1(nT)$  и  $x_2(nT)$  соответственно.



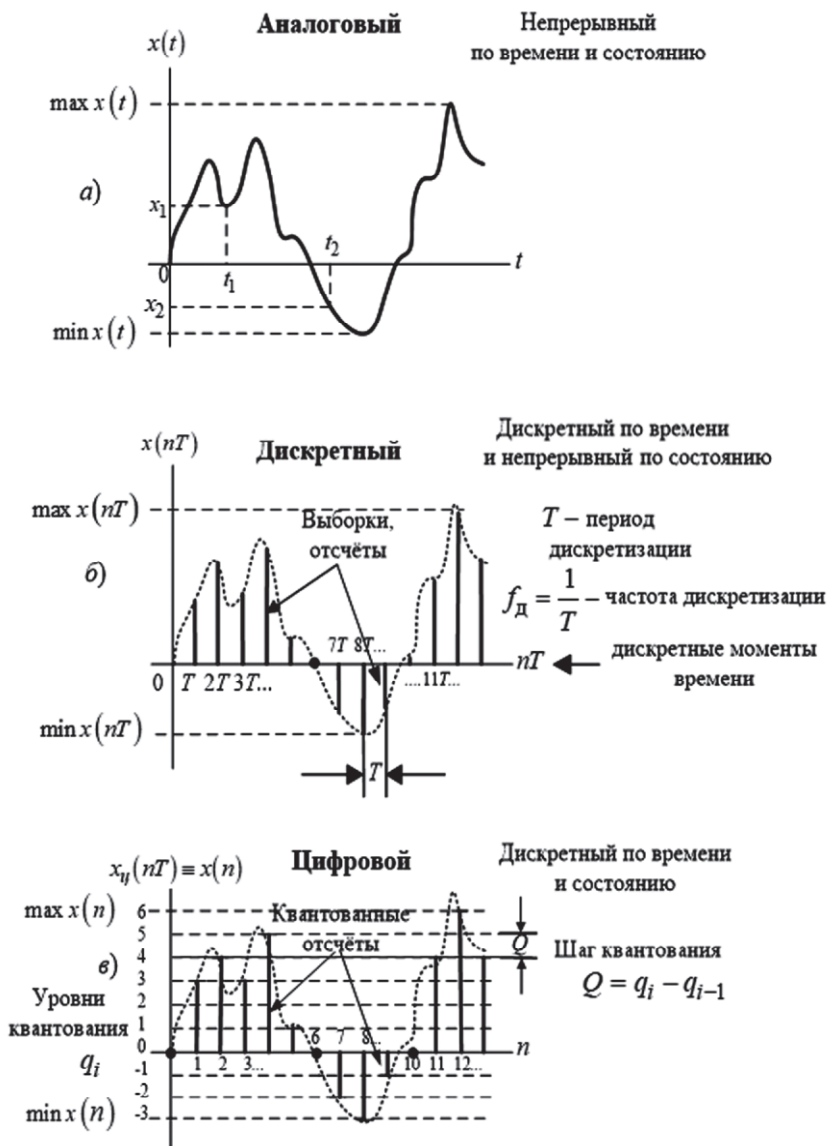


Рис. 1.5. Основные типы сигналов

### 1.2.2. Цифровой сигнал

При описании дискретных и цифровых сигналов удобно пользоваться *нормированным временем*  $\hat{t}$ :

$$\hat{t} = \frac{t}{T}.$$

Нормированное время при  $t = nT$  имеет смысл *номера* отсчёта  $n$ :

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n \quad (1.3)$$

и означает, что: во-первых, отсчёт взят в момент  $nT$ ; во-вторых, дискретный сигнал представляет собой функцию целочисленной переменной  $n$ ; в-третьих, обозначения дискретного сигнала  $x(n)$  и  $x(nT)$  являются тождественными:

$$x(nT) \equiv x(n).$$

**Определение:** *цифровым* называют сигнал (рис. 1.5, в), дискретный по времени и квантованный по состоянию (по уровню).

Цифровой сигнал описывается квантованной решётчатой функцией (*квантованной последовательностью*)  $x_{ц}(nT)$ , отсчёты которой в каждый момент времени  $nT$  принимают *квантованные значения* из некоторого интервала  $x_1(nT) \leq x(nT) \leq x_2(nT)$ .

*Квантование по уровню (квантование)* означает, что точные значения отсчётов дискретного сигнала  $x(nT)$  представляются в виде двоичных чисел конечной разрядности – *квантованных отсчётов*  $x(n)$ .

Для получения цифрового сигнала динамический диапазон дискретного сигнала  $\min x(nT) \leq x(nT) \leq \max x(nT)$  разбивается на конечное число  $R$  дискретных уровней – *уровней квантования*  $q_i$ ; каждому отсчёту по определённому правилу (см. п. 5.1.3) присваивается значение одного из ближайших уровней, между которыми этот отсчёт оказался (1.5, в). Разность между соседними уровнями квантования  $Q = q_i - q_{i-1} = const$  называется *шагом квантования*. Количество уровней квантования зависит от принятой разрядности регистров. Например, при разрядности  $b = 3$  количество уровней квантования  $R$  без учёта знака составит:

$$R = 2^b = 2^3 = 8 \quad (1.4)$$

с номерами от  $i = 0$  до  $i = 7$ ; но при такой записи имеем беззнаковое число, т. е. ни положительное, ни отрицательное. Для учёта знака трёхзначное двоичное число требуется дополнить ещё одним разрядом ( $m = b + 1$ ) и все отсчёты  $x_{ц}(nT)$  необходимо кодировать (табл. 1.1) четырёхразрядными двоичными числами.

Таблица 1.1

**Примеры записи четырёхразрядных двоичных чисел  
(рис. 1.5, в)**

Номер $n$	0	1	2	3	...	7	8	...	11	12
$q_i$	0	3	4	4	...	-2	-3	...	4	6
$x(n)$	0000	0011	0100	0100	...	1010	1011	...	0100	0110

Для хранения таких чисел требуются четырёхразрядные регистры памяти (рис. 1.6), в которых один разряд отводится для записи знака и называется знаковым, три разряда отводятся для беззнакового числа и называются значащими.

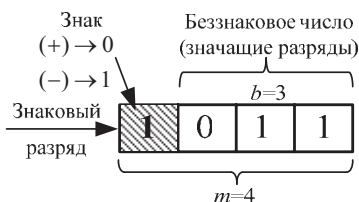


Рис. 1.6. Содержание регистра памяти

**1.2.3. Типовые дискретные (цифровые) сигналы**

Рассматриваемые ниже дискретные (цифровые) сигналы используются в качестве испытательных воздействий и называются *типовыми*.

1. *Цифровой единичный импульс* описывается последовательностью:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

т. е. этот сигнал равен единице при  $n = 0$  и нулю при всех остальных значениях  $n \neq 0$  (рис. 1.7, а).

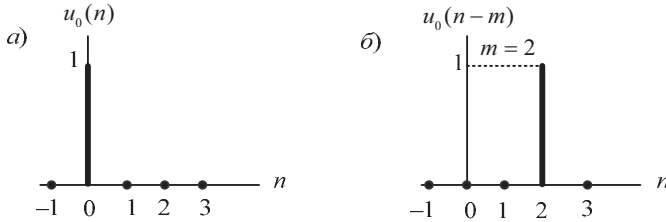


Рис. 1.7. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) импульсы

2. **Единичный импульс, задержанный на  $m$  периодов дискретизации** (рис. 1.7, б) описывается последовательностью:

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (1.6)$$

т. е. этот сигнал, в отличие от не задержанного, равен единице при  $n = m$  и нулю при всех остальных значениях  $n$ .

3. **Цифровой единичный скачок** описывается последовательностью:

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

т. е. этот сигнал равен единице при всех неотрицательных значениях  $n$  (рис. 1.8, а).

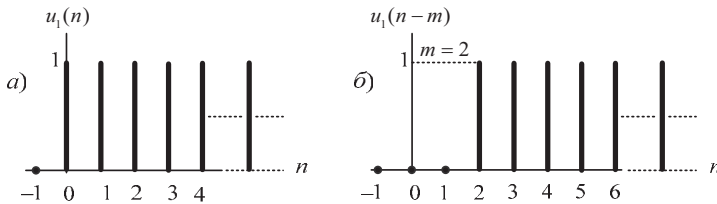


Рис. 1.8. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) скачки

4. **Единичный скачок, задержанный на  $m$  периодов дискретизации** (рис. 1.8, б) описывается последовательностью:

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m, \end{cases} \quad (1.8)$$

т. е. этот сигнал, в отличие от не задержанного, равен единице при всех значениях  $n \geq m$  и нулю при значениях  $n - m < 0$ .

5. *Дискретная экспонента* описывается последовательностью:

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

где  $a$  – вещественная константа (рис. 1.9).

В зависимости от величины и знака константы  $a$  дискретная экспонента называется:

$a = 1$  – цифровым единичным скачком (рис. 1.8);

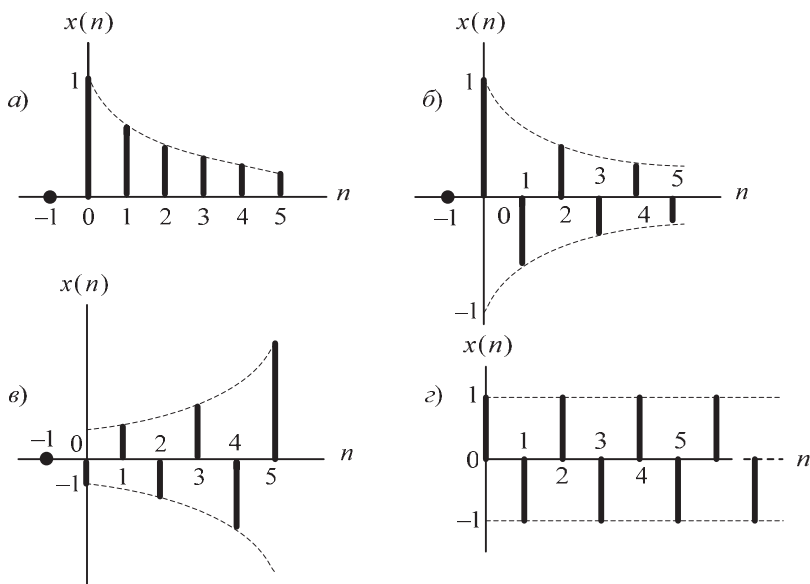


Рис. 1.9. Дискретные экспоненты: убывающая знакопостоянная (а), убывающая знакопеременная (б), возрастающая знакопеременная (в), знакопеременная последовательность единиц (г)

$a < 1$  и  $a > 0$  – убывающей знакопостоянной (рис. 1.9, а);  
 $|a| < 1$  и  $a < 0$  – убывающей знакопеременной (рис. 1.9, б);

$|a| > 1$  и  $a < 0$  – возрастающей (рис. 1.9, в);

$a = -1$  – знакопеременной последовательностью единиц (рис. 1.9, з).

6. **Дискретная экспонента, задержанная на  $m$  периодов** дискретизации описывается последовательностью:

$$x(n-m) = \begin{cases} a^{n-m}, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases} \quad (1.10)$$

7. **Дискретный гармонический сигнал**, например, дискретная косиноида, описывается последовательностью:

$$x(n) \equiv x(nT) = A \cos(2\pi f n T) = A \cos(\omega n T), \quad (1.11)$$

где  $T$  – период дискретизации;  $A$  – амплитуда;  $\omega$  – *круговая частота*:

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.12)$$

Дискретная косинусоида получается из аналоговой

$$x(t) = A \cos(2\pi f t) = A \cos(\omega t) \quad (1.13)$$

в результате замены непрерывного времени дискретным (рис. 1.10, а):

$$x(nT) = x(n) = A \cos(\omega t) \Big|_{t=nT} = A \cos(\omega T n). \quad (1.14)$$

Дискретная синусоида (рис. 1.10, б) описывается аналогично.

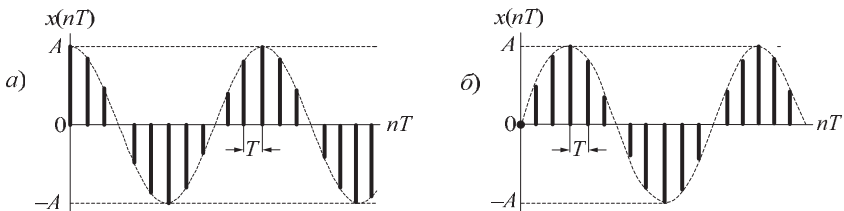


Рис. 1.10. Дискретный гармонический сигнал: косинусоида (а), синусоида (б)

8. **Дискретный комплексный гармонический сигнал** описывается комплексной последовательностью:

$$x(nT) = A e^{j\omega T n} \quad (1.15)$$

или двумя вещественными последовательностями: косинусоидой (вещественная часть) и синусоидой (мнимая часть):

$$x(nT) = A \cos(\omega T n) + j A \sin(\omega T n). \quad (1.16)$$

### 1.2.4. Свойство селективности цифрового единичного импульса

Из определения задержанного цифрового единичного импульса (1.5) вытекает важное для практики соотношение:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n-m), \quad (1.17)$$

с помощью которого можно записать всю последовательность  $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(n), x(n+1), \dots\}$ .

Действительно, по определению (1.6) отсчёты последовательности  $u_0(n-m)$  равны нулю при всех  $n$ , кроме  $n=m$  (где  $m$ -й отсчёт равен единице), поэтому слагаемые в (1.17) при всех значениях  $m$ , кроме фиксированного  $m=n$ , равны нулю, а это означает, что сумма равна  $x(n)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n-m) &= x(0)u_0(n) + x(1)u_0(n-1) + \dots + x(n)u_0(n-n) + \\ &+ x(n+1)u_0[n-(n+1)] + \dots = 0 + 0 + \dots + x(n)u_0(0) + 0 + \dots = x(n). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Например, при  $n=2$  из (1.18) имеем:

$$\underbrace{x(0)u_0(2)}_0 + \underbrace{x(1)u_0(1)}_0 + \underbrace{x(2)u_0(0)}_{x(2)} + \underbrace{x(3)u_0(-1)}_0 + \underbrace{\dots}_0 = x(2).$$

По аналогии со свойством дельта-функции [28] соотношение (1.18) называют *фильтрующим свойством*, или *свойством селективности* (избирательности) цифрового единичного импульса.

### 1.3. Обобщённая схема цифровой обработки аналогового сигнала

Обобщённая схема ЦОС (рис. 1.11) отображает последовательность процедур, необходимых для преобразования исходного аналогового сигнала  $x(t)$  в другой аналоговый сигнал  $y(t)$  по заданному алгоритму средствами цифровой вычислительной техники.

В цифровой обработке сигналов можно выделить *три* основных этапа:

- формирование *цифрового* сигнала  $x(nT)$  из исходного *аналогового* сигнала  $x(t)$ ;
- преобразование *цифрового* сигнала  $x(nT)$  в *цифровой* сигнал  $y(nT)$  по заданному алгоритму;
- формирование конечного *аналогового* сигнала  $y(t)$  из *цифрового* сигнала  $y(nT)$ .

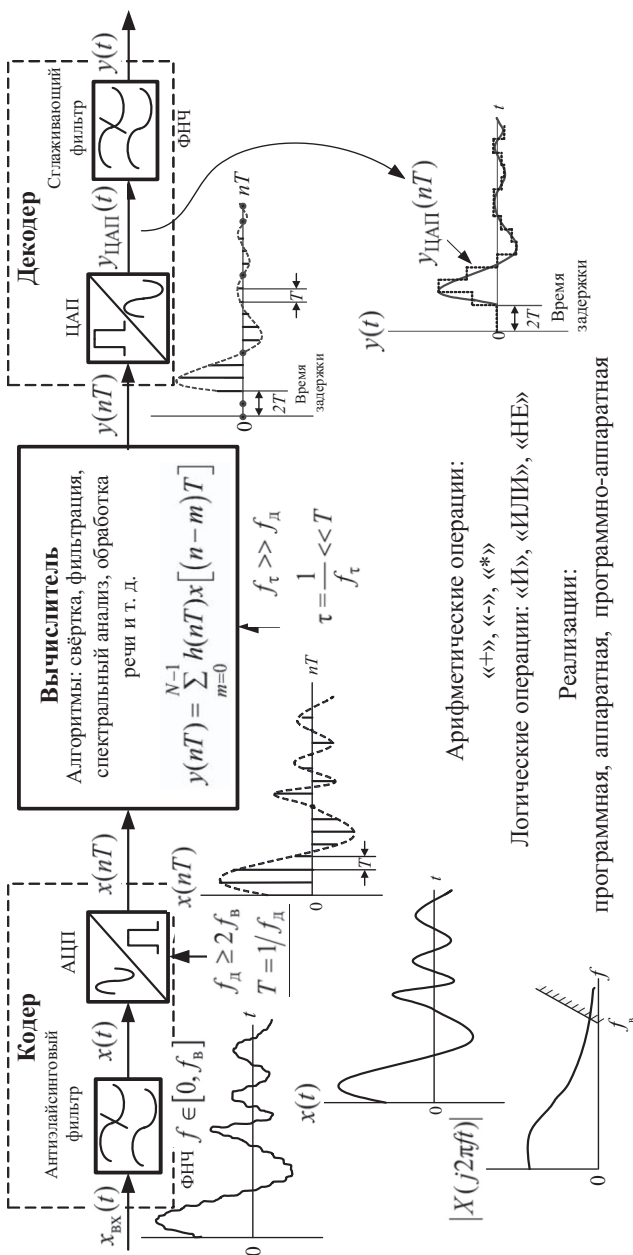


Рис. 1.11. Обобщённая схема ЦОС



В обобщённой схеме ЦОС указанным этапам соответствуют *три* функциональных устройства: кодер; вычислитель (собственно устройство ЦОС); декодер.

На *первом* этапе *кодер* из исходного *аналогового* сигнала  $x(t)$  формирует *цифровой* сигнал  $x(nT)$ , без чего принципиально невозможна *цифровая* обработка. В состав кодера входят аналоговый фильтр нижних частот (ФНЧ) и аналого-цифровой преобразователь (АЦП).

*Антиэлайсинговый фильтр*, представляющий собой аналоговый фильтр нижних частот, предназначен для ограничения спектра  $X_{\text{вх}}(j\omega)$  исходного аналогового сигнала  $x_{\text{вх}}(t)$ .

Необходимость ограничения спектра вытекает из фундаментальной теоремы Котельникова, в соответствии с которой частота дискретизации  $f_{\text{д}}$  выбирается из условия:  $f_{\text{д}} \geq 2f_{\text{в}}$ , где  $f_{\text{в}}$  – верхняя частота спектра сигнала, поэтому минимальная частота дискретизации  $f_{\text{д min}} = 2f_{\text{в}}$ .

Выбор значения  $f_{\text{в}}$  определяется типом сигнала и решаемой задачей. При обработке аудиосигналов выбор  $f_{\text{в}}$  зависит также от особенностей их психофизического восприятия. Например, для стандартного телефонного сигнала верхняя частота спектра определена равной 3,4 кГц, поэтому минимальная частота дискретизации составляет 6,8 кГц; однако международным стандартом МККТТ указанная частота принята равной  $f_{\text{д}} = 8$  кГц. На выходе ФНЧ получают аналоговый сигнал  $x(t)$  с *финитным* (ограниченным по частоте) спектром  $X(j\omega)$ .

*Аналого-цифровой преобразователь* (АЦП) формирует цифровой сигнал  $x_{\text{ц}}(nT)$  посредством дискретизации и квантования сигнала  $x(t)$ .

*Дискретизация по времени* (*дискретизация*) представляет собой процедуру взятия мгновенных значений – *отсчётов* – аналогового сигнала  $\{x(t)\}$  с интервалом, равным периоду дискретизации  $T$ . Значения отсчётов  $x(nT)$  совпадают со значениями сигнала  $x(t)$  в моменты  $t = nT$ :

$$x(nT) = x(t)|_{t=nT}.$$

Совокупность отсчётов  $x(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  называют *дискретным сигналом*.

*Квантование по уровню* (*квантование*), как было сказано ранее (см. п. 1.2.2), производится с целью замены отсчётов  $x(nT)$  дискретного сигнала на последовательность двоичных чисел разрядности  $m$ , т. е. на последовательность *квантованных отсчётов*  $x_{\text{ц}}(nT)$ . Разрядность чисел  $m$  складывается из разрядности беззнакового числа и знакового разряда (рис. 1.6). В результате формируется массив из  $N$  двоичных  $m$ -разрядных чисел. Для того чтобы по заданной величине  $N$  определить необходимую