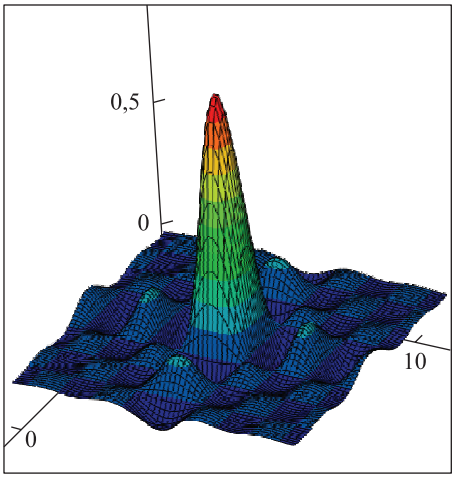
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

А.А. Аникьев

Программирование в пакете Mathcad v. 15

Часть 1. Матричные вычисления

Учебное пособие



BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2022

УДК 519.6
ББК 22.18
А67

Издание доступно в электронном виде по адресу
https://bmstu.press/catalog/item/7379/

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника»
Кафедра «Лазерные и оптико-электронные системы»

Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия

Аникьев, А. А.

А67 Программирование в пакете Mathcad v. 15. Часть 1. Матричные вычисления : учебное пособие / А. А. Аникьев. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2022. — 70, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5803-5

Рассмотрены методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), и построены для этого алгоритмы на базе средств математического пакета Mathcad. Особое внимание уделено матричным формам решения и использованию собственного языка программирования пакета. Продемонстрированы возможности встроенных функций пакета при решении СЛАУ с плохо обусловленной матрицей коэффициентов. Для систем с числом уравнений, превышающим число неизвестных, описаны алгоритмы нахождения псевдорешений методом наименьших квадратов и приведением уравнений к нормальной форме. Построены программы численного решения систем уравнений методом итераций. Показаны примеры, иллюстрирующие особенности расчетов.

Для студентов специалитета и бакалавриата, изучающих дисциплину «Дополнительные главы информатики», а также может быть полезно для аспирантов.

УДК 519.6
ББК 22.18

Уважаемые читатели! Пожелания, предложения, а также сообщения о замеченных опечатках и неточностях Издательство просит направлять по электронной почте: info@bmstu.press

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022

ISBN 978-5-7038-5803-5

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов специалитета, обучающихся по специальности 12.05.01 «Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения», а также бакалавриата направлений подготовки «Оптотехника» и «Лазерная техника и лазерные технологии». Материал пособия соответствует главе 1 программы дисциплины «Дополнительные главы информатики», которая входит в перечень дисциплин для указанных направлений подготовки.

Основная цель настоящего пособия — формирование у студентов целостной системы знаний, умений и навыков, позволяющих уверенно ориентироваться в вопросах практического решения систем линейных алгебраических уравнений с любой заданной точностью и применением в случае необходимости средств программирования, доступных в математическом пакете Mathcad v. 15.

Пособие представляет собой первую часть цикла, состоящего из пяти частей: часть 1. Матричные вычисления; часть 2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений; часть 3. Аппроксимация и интерполяция экспериментальных данных; часть 4. Решение дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных; часть 5. Методы оптимизации.

Все указанные части предполагают построение оригинальных программ для численного решения задач в соответствующих главах.

Пособие содержит четыре главы и два приложения. В первой главе приводятся общие понятия векторов и матриц, действия с ними с использованием матричной панели, матричных операторов и функций в системе Mathcad. Во второй главе рассмотрены возможности прикладного инженерного пакета Mathcad в вычислении собственных векторов и собственных значений матрицы на примере решения задач из контрольной работы. В третьей главе показаны методы решения систем однородных уравнений. В четвертой главе подробно представлены методы решения систем неоднородных линейных уравнений как определенных, так недоопределенных и переопределенных. Кроме того, приведены способы решения СЛАУ с плохо обусловленной матрицей коэффициентов методами матричного разложения. Построены оригинальные программы решения СЛАУ методом простых итераций и методом Гаусса — Зейделя с любой заданной точностью для демонстрации возможностей программирования средствами пакета Mathcad. В каждой главе приведены примеры, иллюстрирующие особенности расчета. В приложении I дан ряд теорем линейной алгебры, а в приложении II — основные операторы построения программ с использованием панели программирования. Рассмотренные в пособии методы решения СЛАУ с демонстрацией на конкретных примерах позволят выработать у студентов необходимые умения и навыки для решения практических задач в их последующей учебной, инженерной и научной деятельности.

Введение

В учебном процессе и дальнейшей инженерной и научной работе большую помощь студентам оказывает владение одним или несколькими математическими пакетами, например Mathcad, MATLAB, Maple, Mathematica. Наиболее простым в освоении и достаточно мощным для решения практически всех возникающих задач является пакет Mathcad для инженерных расчетов. Тем не менее часто возникают ситуации, когда встроенных функций и операторов математического пакета недостаточно и требуется расширение его возможностей. Расширение вычислительных ресурсов достигается программированием. Каждый пакет имеет свой язык программирования, основанный на одном из известных языков Pascal, C++, Fortran.

В настоящем пособии, посвященном матричным вычислениям, рассмотрены возможности математического пакета Mathcad в решении СЛАУ различными методами как с помощью встроенных функций, так и с использованием ресурсов собственного языка программирования. Для каждого вида СЛАУ (однородные, неоднородные, определенные, недоопределенные и переопределенные) приведен алгоритм их решения и показан на нескольких примерах. Исследованы СЛАУ с плохо обусловленной матрицей коэффициентов, и представлены алгоритмы их решения, основанные на разложении матрицы коэффициентов. Задачи поиска псевдорешений для систем с числом уравнений, превышающим число неизвестных, решаются, как правило, методом наименьших квадратов или приведением уравнений к нормальной форме [1–3]. И в том и в другом случае представлены алгоритмы решения таких систем.

Кроме того, рассмотрены численные методы решения СЛАУ, в частности построены алгоритмы и программы решения СЛАУ методом простых итераций и методом Зейделя с любой заданной точностью. Применение численных методов к решению СЛАУ продемонстрировано на примерах. Особое внимание уделено особенностям и применению языка программирования Mathcad для решения задач матричных вычислений.

Основные термины и определения

Вектор невязки — вектор, компоненты которого показывают значение отклонений приближенного решения системы алгебраических уравнений от точного значения.

Встроенные функции — функции с определенными именами, возвращающие результат работы определенной программы по заданному алгоритму из архива программ.

Линейное нормированное пространство — пространство (например, множество L), в котором каждому элементу множества $x \in L$ поставлено в соответствие действительное число, называемое нормой элемента и обозначаемое $\|x\|$.

Линейное пространство — множество L, в котором для всех элементов определены операции сложения и умножения на число.

Линейное пространство функций — множество функций, непрерывных на отрезке, образующих линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число. На пространстве функций определены две нормы: равномерная и квадратичная.

Нормированное пространство векторов — пространство, для элементов которого определены операции сложения и умножения на число. На пространстве векторов определены три нормы: кубическая, октаэдрическая и сферическая.

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений.

Служебные переменные — переменные среды (оболочки) данного математического пакета, имеющие конкретные имена, из общего перечня переменных, выполняющих в пакете строго определенные действия.

1. Векторы и матрицы (матпакет Mathcad v. 15 Parametric Technology Corporation)

Прямоугольную таблицу чисел будем называть матрицей, столбец чисел — вектором, а матрицу, состоящую из одного элемента, — скаляром.

1.1. Действия с векторами и матрицами

Матрицу в пакете Mathcad можно ввести тремя разными способами. В первом с панели инструментов *Matrix* вызываем окно *Insert Matrix* (Вставка матрицы) и задаем количество строк и столбцов. Такое же окно можно вызвать из панели меню *Insert* (Вставка), опция *Matrix* (Матрица). Количество строк и столбцов при таком вводе матрицы ограничено общим размером в 600 элементов. Второй способ состоит в задании матрицы в форме таблицы с количеством элементов, ограниченным только физической памятью компьютера. Для этого из панели меню *Insert* (Вставка) выбираем *Data* (Данные) и в выпадающем меню указываем кликом на опцию *Table* (Таблица). Третий способ заключается в применении специальной функции инициализации матрицы *Matrix*(n, m, f). В этом случае матрица размером $n \times m$ заполняется элементами, вычисленными по заданной функции $f(x, y)$, где x и y определяются значениями индексов номера строки и столбца матрицы.

Нумерация строк и столбцов матрицы по умолчанию ведется с нуля: первый столбец и первая строка матрицы имеют номер 0, соответственно первый элемент матрицы в левом верхнем углу $a_{ij} = a_{00}$. Если задана матрица размером $n \times m$, то номер последней строки будет $i = n - 1$, а номер последнего столбца $j = m - 1$ именно потому, что нумерация начинается с нуля. Если надо перейти к более привычной системе нумерации столбцов и строк, начиная с единицы, необходимо перед работой с матрицами установить значение служебной переменной ORIGIN, равное единице, т. е. ORIGIN : = 1.

По умолчанию эта переменная равна нулю. С момента присваивания этого значения элементы строк и столбцов всех векторов и матриц, находящихся на рабочем листе ниже указанной записи, нумеруются, начиная с единицы.

Задать или переопределить нумерацию элементов матриц и векторов на всем рабочем листе можно и другим способом. Для этого достаточно в панели меню *Tools* (Инструменты) выбрать команду *Worksheet Options* (Параметры рабочего листа) и в появившемся окне установить значение встроенной переменной ORIGIN, равное единице. После щелчка по кнопке «OK» нумерация строк и столбцов всех векторов и матриц будет переопределена на

новое значение. Переменная ORIGIN может принимать любое положительное и отрицательное целые значения или ноль.

Встроенные функции для работы с векторами и матрицами можно подразделить на три группы:

1) функции, возвращающие параметры матриц (табл. 1.1);

2) функции конструирования матриц и операций с их блоками;

3) функции решения задач линейной матричной алгебры.

Рассмотрим первую группу функций. Выделим в таблицы все функции и опишем смысл каждой операции.

Матричные операции можно выполнять с помощью панели «Матрицы». К элементу вектора обращаются путем указания индекса его компоненты в подстрочной записи, например, v_i, а матричный элемент пишется с двумя нижними индексами через запятую, например, $m_{i,j}$. К нижним индексам переходят при нажатии клавиши с открывающейся квадратной скобкой (в латинской раскладке клавиатуры) или через панель «Матрицы» при нажатии кнопки X_n с указанием нижнего индекса.

Таблица 1.1

Функции, возвращающие параметры матриц

Наименование функции	Требования к аргументам	Действие функции
length(*V*)	*V* — вектор-столбец	Возвращает количество компонент вектора *V*
last(*V*)	*V* — вектор-столбец	Возвращает номер последней компоненты вектора *V*
rows(*M*)	*M* — произвольная матрица	Возвращает количество строк
cols(*M*)	То же	Возвращает количество столбцов матрицы *M*
max(*M*)	»	Возвращает максимальный элемент матрицы *M*
min(*M*)	»	Возвращает минимальный элемент матрицы *M*
rank(*M*)	»	Возвращает ранг матрицы *M*
tr(*M*)	*M* — квадратная матрица	Возвращает сумму диагональных элементов матрицы *M*
*norm*1(*M*), *norm*2(*M*), *norme*(*M*), *normi*(*M*)	То же	Возвращает значения кубической октаэдрической, евклидовой и бесконечной норм матрицы
*cond*1(*M*), *cond*2(*M*), *conde*(*M*), *condi*(*M*)	»	Возвращает число обусловленности* матрицы *M* в соответствии с нормами

* Число обусловленности вычисляется как произведение соответствующих норм исходной и обратной матриц.