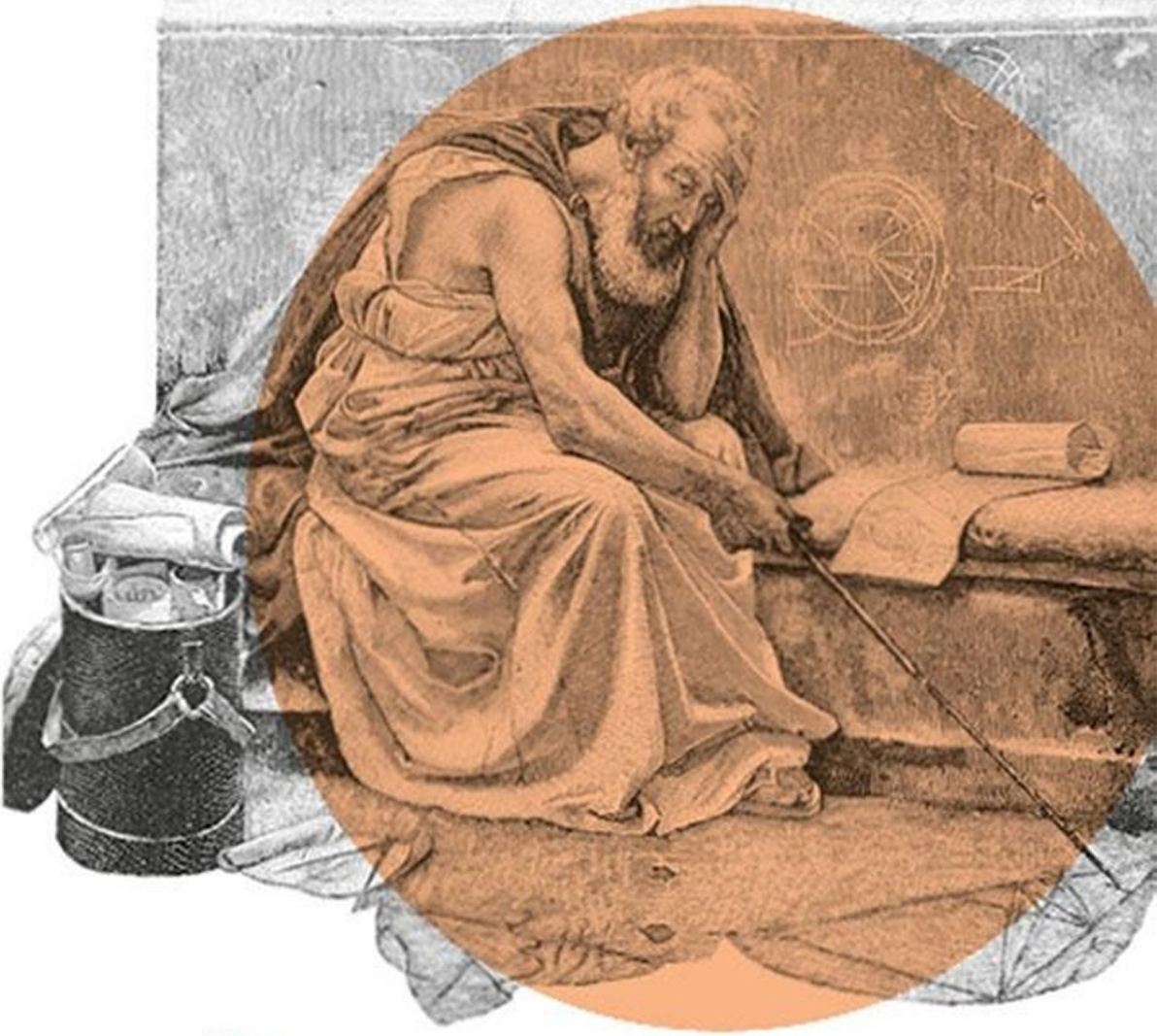
В.Ф. Панов

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ТВОРЦЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 51(091); 51(092)
ББК 22.1Г
П16

Издание доступно в электронном виде по адресу
https://press.bmstu.ru/catalog/item/8239/

Рецензенты:
зав. кафедрой математики Военной академии РВСН имени Петра Великого,
д-р техн. наук, профессор *В.В. Блаженков;*
канд. физ.-мат. наук, доцент *А.Н. Канатников*

Панов, В. Ф.

П16 Современная математика и ее творцы / В. Ф. Панов ; под ред. В. С. Зарубина. — 3-е изд. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2024. — 662, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-6344-2

В доступной форме рассказано о развитии традиционных разделов математики во второй половине XIX — начале XXI в., создании новых разделов математики. Представлены основные вехи жизненного и творческого пути многих отечественных и зарубежных математиков. Отражена взаимосвязь математики и философии.

Для студентов, аспирантов, учителей математики, а также всех, кто интересуется историей науки.

УДК 51(091); 51(092)
ББК 22.1Г

© Панов В.Ф., 2011
© Панов В.Ф., 2019, с изменениями
© Оформление. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024

ISBN 978-5-7038-6344-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 10

Часть I. **МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ** 13

Глава 1. Особенности современной математики 17
Приоритеты в математике XX века. 17
Аксиоматизация и систематизация математики 25
Споры сторонников абстрактной и прикладной математики. 28
«Архитектура» современной математики 33
Глава 2. Роль международных математических конгрессов в развитии математики 39
Первые международные контакты 39
Первый Международный конгресс математиков 40
Второй Международный конгресс математиков. 40
Доклад Гильберта «Математические проблемы» 41
Международные математические конгрессы в XX и XXI веках 44
Нерешенные (открытые) математические проблемы 48
Глава 3. Награды, вручаемые в области математики 53
Международные награды по математике. 53
Международные награды, в которых одной из номинаций является «математика». 64

Часть II. **СТАНОВЛЕНИЕ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ** 71

Глава 4. Как начиналась современная математика 75
Об истории пятого постулата Евклида. 75
Сущность неевклидовой геометрии 76
Н.И. Лобачевский 78
Янош Больяй 81
Алгебраизация математики и математическая логика 82
Эварист Галуа 85
Джордж Буль 89
Создание теории бесконечных множеств. 91
Георг Кантор 99

Глава 5. Споры относительно оснований математики 102
Интуиция и логика в математике 102
Логицизм, интуиционизм, формализм 104
Алфред Уайтхед 115
Бертран Рассел 117
Лейтзен Брауэр 118
Открытия Курта Гёделя и Пола Коэна. Создание конструктивной математики 121
А.А. Марков-младший 126
Курт Гёдель 129
Пол Коэн 133
Глава 6. Петербургская математическая школа 135
Основание петербургской математической школы. 135
П.Л. Чебышёв 136
А.А. Марков 139
А.М. Ляпунов 142
В.А. Стеклов 145
Н.М. Гюнтер 146
В.И. Смирнов 148
Глава 7. Немецкая математическая школа 150
Система обучения в университетах Германии в XIX веке 150
Карл Вейерштрасс 152
Бернхард Риман 153
Юлиус Дедекинд 156
Феликс Клейн 156
Давид Гильберт 159
Герман Минковский 166
Герман Вейль 168
Рихард Курант 172
Разгром немецкой математической школы нацистами. 175
Глава 8. Французская математическая школа 179
Система образования во Франции 179
Анри Пуанкаре 181
Жак Адамар 189
Эмиль Борель 190
Анри Лебег 193
Глава 9. Московская математическая школа 196
Организация математических исследований до 1941 года. 196
Н.Е. Жуковский 201
Д.Ф. Егоров 204
Н.Н. Лузин 206
А.Н. Колмогоров 211
«Лузитания» 216
Внедрение диалектики в математику 220
Организация математических исследований в годы Великой Отечественной войны и послевоенное время. 225

Глава 10. Американская математическая школа 230
Система образования в США 230
Джордж Биркгоф 233
Соломон Лефшец 234
Джеймс Александер 236
Марстон Морс 237
Джон фон Нейман 239
Хасслер Уитни 245
Сондерс Маклейн 246

***Часть III*. РАЗВИТИЕ ТРАДИЦИОННЫХ РАЗДЕЛОВ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ** 249

Глава 11. Математическая статистика и теория вероятностей 252
Математическая статистика. 253
Карл Пирсон 256
Уильям Госсет (Стьюдент) 257
Е.Е. Слуцкий 259
Рональд Фишер 260
Ежи Нейман 262
Эгон Пирсон 264
Теория вероятностей 265
А.Я. Хинчин 268
Б.В. Гнеденко 271
Киёши Ито 274
Шриниваса Варадхан 275
Венделин Вернер 276

Глава 12. Топология первой половины XX века 278
Чем занимается топология. 278
Феликс Хаусдорф 283
П.С. Урысон 285
П.С. Александров 287
Хейнц Хопф 290
Л.В. Келдыш 291
Шэншэнь Чжэнь (Черн) 293

Глава 13. Вычислительная математика 295
Численные и аналитические методы 295
А.Н. Крылов 299
Б.Г. Галёркин 300
А.Н. Тихонов 303
А.А. Дородницын 306
Г.И. Марчук 308
А.А. Самарский 311

Глава 14. Теория дифференциальных уравнений 313
Обыкновенные дифференциальные уравнения. 313
Дифференциальные уравнения с частными производными. 318

С.Н. Бернштейн 319
И.А. Лаппо-Данилевский 322
М.А. Лаврентьев 323
И.Г. Петровский 326
М.В. Келдыш 329
Ларс Хёрмандер 332
Седрик Виллани 333

Глава 15. Теория функций и функциональный анализ 335
Теория функций 335
Функциональный анализ 337
Гёста Миттаг-Лёффлер 340
Константин Каратеодори 342
Харальд Бор 343
Стефан Банах 344
Д.Е. Меньшов 346
М.Я. Суслин 348
Н.К. Бари 351
Рольф Неванлинна 353
Л.А. Люстерник 354
П.С. Новиков 355
Ларс Альфорс 357
С.Л. Соболев 358
И.М. Гельфанд 362
Чарльз Фефферман 365
Ален Конн 366
С.К. Смирнов 367

Глава 16. Абстрактная алгебра 369
Развитие алгебры в Европе 369
Фердинанд Фробениус 372
Эмми Нётер 373
Эмиль Артин 375
Бартел Ван дер Варден 377
Джон Томпсон 379
Развитие алгебры в СССР 380
Д.А. Граве 384
О.Ю. Шмидт 385
Н.Г. Чеботарёв 387
А.И. Мальцев 389
И.Р. Шафаревич 391
Г.А. Маргулис 393
Е.И. Зельманов 394

Глава 17. Геометрия в России в XX – начале XXI века 395
Очерк развития современной геометрии 395
С.П. Фиников 398
Б.Н. Делоне 400

А.Д. Александров 402
А.В. Погорелов 406
М.Л. Громов 408

Часть IV. **КОРЕННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ** 411

Глава 18. Николя Бурбаки — коллективный псевдоним группы математиков 415
Возникновение объединения французских математиков 415
Бурбаки и реформа математического образования 422
Анри Картан 425
Андре Вейль 426
Клод Шевалле 428
Лоран Шварц 429
Жан-Пьер Серр 430
Джон Тейт 432
Александр Гротендик 433
Жак Титс 436

Глава 19. Теоретическая физика и математика 438
О проблемах теоретической физики 438
Стандартная модель физики элементарных частиц 440
Теория суперструн 444
Н.Н. Боголюбов 450
Ричард Фейнман 454
Роджер Пенроуз 456
Л.Д. Фаддеев 459
Шинтан Яу 461
Эдвард Виттен 463
Воган Джонс 464
М.Л. Концевич 465

Глава 20. Топология второй половины XX века 467
Новые идеи в топологии 467
В.А. Рохлин 472
Рене Том 474
Стивен Смейл 475
Джон Милнор 477
Майкл Атья 478
С.П. Новиков 480
Гипотеза Пуанкаре 482
Уильям Тёрстон 484
Майкл Фридман 485
Саймон Дональдсон 486
Г.Я. Перельман 487

Глава 21. Алгебраическая геометрия 491
Очерк развития алгебраической геометрии 491
Кунихико Кодаира 495

Хейсуке Хиронака 496
Дэвид Мамфорд 496
Пьер Делинь 497
Герд Фалтингс 498
Сигефуми Мори 499
В.А. Воеводский 500

Глава 22. Теория чисел 503
Основные направления исследований 503
Годфри Харди 508
Шриниваса Рамануджан 510
И.М. Виноградов 513
Л.Г. Шнирельман 514
А.О. Гельфонд 516
Атле Сельберг 519
Клаус Рот 520
Алан Бейкер 521
Энрико Бомбьери 521
Ю.В. Матиясевич 522
Теренс Тао 524

Глава 23. Великая теорема Ферма 526
Предыстория Великой теоремы Ферма 526
Гипотеза Таниямы — Шимуры 529
Завершающие атаки на Великую теорему Ферма 532
Эндрю Уайлс 533
Роберт Ленглендс 536
В.Г. Дринфельд 537
Лоран Лаффорг 538
А.Ю. Окуньков 539
Бао Чау Нго 541

Часть V. **РАЗВИТИЕ НОВЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ** 543

Глава 24. Теория алгоритмов, кибернетика, вычислительная техника 546
Из предыстории вычислительной техники 546
Теория алгоритмов 547
Кибернетика 551
Математика и вычислительная техника 554
Ада Лавлейс 555
Норберт Винер 556
Алан Тьюринг 558
Клод Шеннон 560
В.М. Глушков 562

Глава 25. Исследование операций и теория управления 565
Исследование операций и круг рассматриваемых задач 565
Теория управления 569

Агнер Эрланг 570
Л.С. Понтрягин 572
Ричард Беллман 575
Л.В. Канторович 577
Н.Н. Моисеев 580
Джон Форбс Нэш-младший 582
Лотфи Заде 584

Глава 26. Нестандартные методы анализа 588
Расхождение современных физических представлений с идеями математического анализа 588
Нестандартный (инфинитезимальный) анализ 590
Бесконечно малые величины в трактовке Лейбница 597
Отношение ученых к идее бесконечно малых величин 598
Булевозначный анализ 601
Туральф Сколем 602
Абрахам Робинсон 603
Петр Вопенка 604

Глава 27. Динамические системы. Порядок и хаос. Создание фрактальной геометрии 606
Поиск единых законов эволюции 606
Ключевые понятия качественной теории сложных нелинейных систем 608
Варианты качественной теории сложных нелинейных систем 610
Фракталы 618
А.С. Безикович 624
И.Р. Пригожин 626
Эдвард Лоренц 628
Бенуа Мандельброт 631
Юрген Мозер 633
В.И. Арнольд 634
Жан-Кристоф Йоккоз 637
Элон Линденштраусс 638

Заключение 639

Литература 643

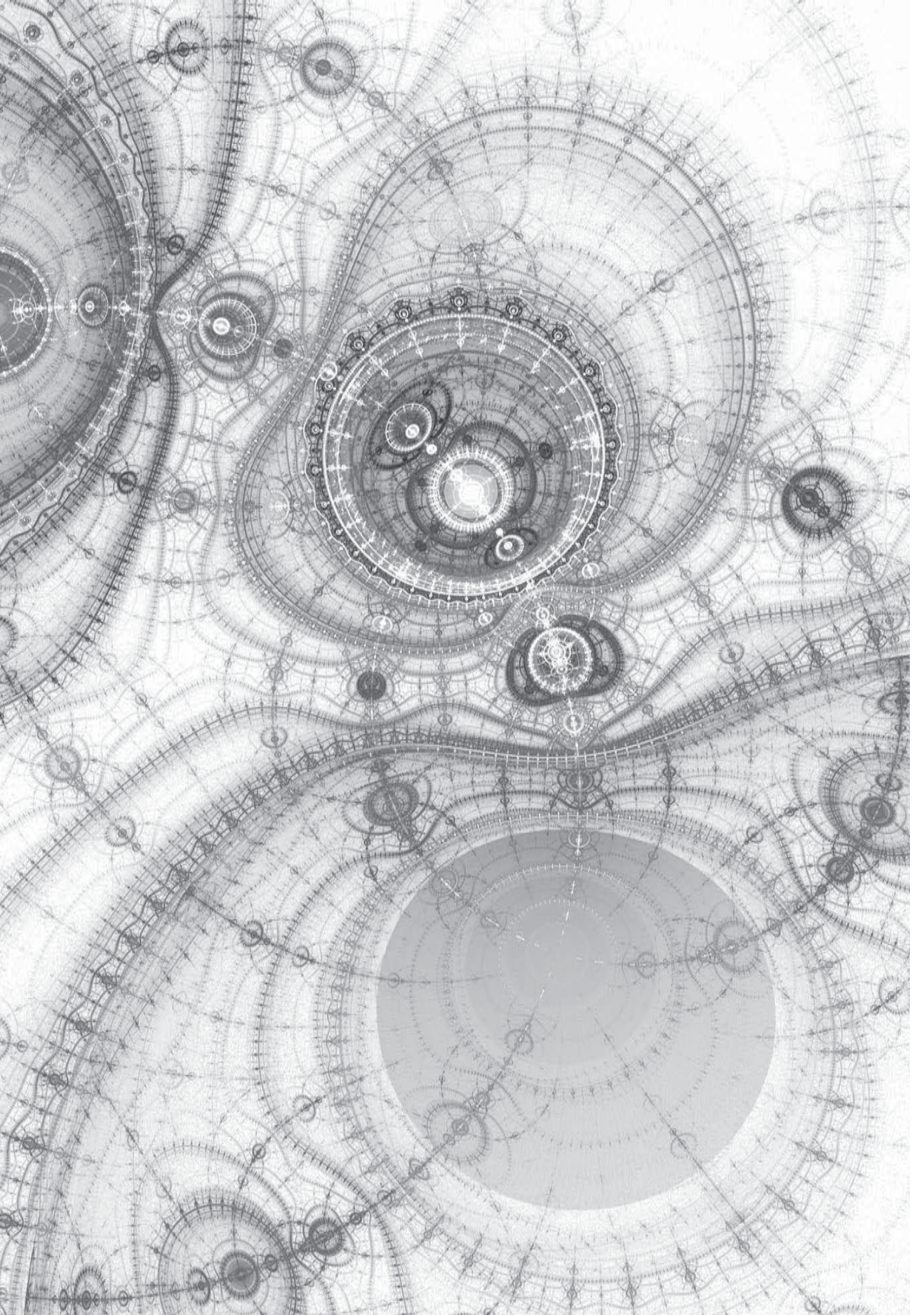
Именной указатель 647

Часть I

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

В физике, инженерном деле, экономике, психологии, медицине, биологии, всюду, где есть необходимость точно описать происходящее и точно выразить закон, управляющий тем или иным явлением, всюду на помощь приходят понятия, конструкции и методы математики.

А.В. Архангельский



Для людей, чья деятельность не связана с математикой и имеющих гуманитарный склад мышления, математика воспринимается не как наука, а как наиболее формализованная, а следовательно, и наиболее скучная школьная и вузовская дисциплина. По их мнению, в математике все давно уже сделано, просто готовые формулы используют в решении прикладных задач, а тот факт, что математика продолжает развиваться и в ней происходят открытия, вызывает искреннее удивление.

В средствах массовой информации о математике пишут намного меньше, чем о физике, химии и биологии. Это преимущественно объясняется сложностью понятийно-категориального аппарата, отсутствием приложений и нежеланием профессиональных математиков популярно рассказывать о достижениях в этой науке. В действительности современная математика — это фундаментальные проблемы, непрекращающиеся теоретические и экспериментальные исследования, в том числе с помощью компьютеров.

Еще в конце XVII в. Лейбниц считал, что математика должна изучать все, что в области воображения поддается точному определению. Важной задачей математики является изучение соотношений между математическими объектами. Коренные изменения в математике, придавшие ей современный вид, начались преимущественно в XIX в.

В соответствии с предложением А.Н. Колмогорова в истории математики условно выделяют четыре основных периода:

— зарождение математики (до VI–V вв. до н. э.);

— элементарная математика (математика постоянных величин) (VI–V вв. до н. э. – XVI в.);

— создание математики переменных величин (XVI в. – сер. XIX в.);

— современная математика.

Началом современной математики принято считать появление новых математических теорий в XIX в. Если ранее аксиомы считались истинами, не требующими доказательства в силу своей очевидности, то постепенно пришло понимание, что аксиомы скорее являются гипотезами и могут существовать различные мнения о том, насколько построенные с их помощью модели соответствуют материальному миру.

Если в предыдущие периоды евклидова геометрия претендовала на «абсолютную истинность», то появление непротиворечивой неевклидовой геометрии и дальнейшие исследования Б. Римана показали, что существует неограниченное разнообразие геометрических пространств, отличающихся друг от друга размерностью, формулами вычисления расстояний и т. д.

Ранее алгебра занималась в основном решением уравнений и систем уравнений, а также правилами преобразований буквенных выражений. В период современной математики начали исследовать общие свойства

алгебраических операций в произвольных множествах и изучать новые алгебраические структуры (группы, кольца, поля, решетки и т. д.), возникшие из конкретных задач алгебры и геометрии.

Появляются новые разделы математики, расширяются направления исследований, меняются приоритеты. В математике теперь изучаются не только понятия, возникшие при рассмотрении реальных объектов, но и свойства «мыслимых объектов», (например, шаров или спиралей в бесконечномерном пространстве), логически возможные чистые формы, системы отношений.

Развитие математики не сводится лишь к росту количественных изменений, а включает глубокие качественные изменения. Она переживает период бурного развития, диктуемого быстрым расширением сфер ее применения к различным областям знания и техники. Развитие математики происходит в борьбе переплетающихся в ней противоположностей: конкретного и абстрактного, частного и общего, формального и содержательного, аксиоматического и конструктивного, конечного и бесконечного, дискретного и непрерывного [84].

Математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки. Каждые четыре года собираются международные математические конгрессы, ежегодно проводятся международные симпозиумы и конференции, посвященные различным разделам математики. Об изменениях, произошедших в XX в., свидетельствует перечень секций на международных математических конгрессах. Если на II конгрессе в 1900 г. работали шесть секций, то на современных конгрессах их насчитывается почти два десятка. Подробнее об этом рассказано в гл. 2.

Существуют различные международные профессиональные награды, которыми отмечаются наиболее выдающиеся результаты исследований. Хотя по математике не присуждают Нобелевскую премию, имеются уже четыре престижные премии, которыми отмечаются выдающиеся исследования математиков только на международных математических конгрессах (медаль Филдса, премия Неванлинны, премия Гаусса, медаль Черна). Кроме того, существуют престижные международные награды, в которых одной из номинаций является «математика».

Глава 1

ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

> Не следует забывать о том, что математика всегда была подспорьем для философского осмысления мира.
>
> *В.М. Тихомиров*

Приоритеты в математике XX века

Четкой границы, разделяющей математику XIX и XX вв., не существует, но появились качественные отличия в математике в целом. Их точно охарактеризовал один из ведущих современных математиков Майкл Атья в лекции, прочитанной на Международном математическом симпозиуме в июне 2000 г. в Торонто.

Первое отличие заключается в переходе от локального к глобальному.

В XIX в. ученые предпочитали работать с малыми масштабами, изучать локальное поведение объектов, в XX в. — интересовались крупными масштабами, глобальным поведением объектов. Поскольку сложность изучаемых явлений резко возросла, повысился интерес к исследованиям на качественном уровне, важными стали топологические идеи во всех разделах математики. Оправдались предсказания Пуанкаре о возрастании роли топологии. Эта особенность явно просматривалась во многих разделах математики: теории функций, теории дифференциальных уравнений, теории чисел, теоретической физике.

Второе отличие — повышение размерности, т. е. переход от одно- и двумерных объектов к n-мерным. Например, если в прошлом в дифференциальной геометрии изучали кривые и поверхности, то теперь стали изучать n-мерные многообразия: от классической теории функций комплексного переменного, подробно изучавшей функции одного переменного, перешли к изучению теории функций n комплексных переменных; от анализа конечномерных линейных пространств к бесконечномерным гильбертовым пространствам и т. п.

Следующее отличие — переход от коммутативного аспекта математики вообще, и алгебры в частности, к некоммутативному. Предпосылкой к этому в XIX в. стали работы Галуа, открытие кватернионов Гамильтоном, работы Грассмана по внешним алгебрам, работы Кэли по матрицам. Важнейшим

разделом математики стала теория групп. В теоретической физике переход к некоммутативным аспектам совпал с созданием квантовой теории и привел к появлению коммутационных соотношений Гейзенберга, развитых фон Нейманом в теорию операторных алгебр.

Еще одним отличием является переход от линейных аспектов разделов математики к более сложным нелинейным. Нелинейные явления мало изучались в XIX столетии и только в XX в. началась серьезная работа над ними. Примерами являются переход от евклидовой геометрии к римановым геометриям, изучение солитонов и хаоса в теории дифференциальных уравнений, переход от уравнений Максвелла к уравнениям Янга — Миллса в теоретической физике.

Рассмотрим принципиальные изменения, произошедшие в XX в. в основных разделах математики.

Математический анализ. Ученым пришлось критически пересмотреть основные понятия математического анализа, начиная с понятия действительного числа. Во второй половине XIX в. это понятие оказалось «арифметизировано», т. е. сведено к понятию натурального числа. В конце XIX в. после работ Ю. Дедекинда, Г. Кантора и К. Вейерштрасса у большинства математиков XX в. сложилось впечатление, что теория действительного числа разработана полностью и проблем действительных чисел больше не существует. Но именно в этом вопросе были обнаружены трудности, приведшие к возникновению новых научных направлений, связанных с вопросами обоснования математики. Увеличение интереса к философским и методологическим проблемам, различные подходы к их решению свидетельствовали о приближении очередного «кризиса основ» математики.

В начале XX в. большое внимание уделялось обоснованию фундаментальных понятий, установлению единства в многообразии математических методов, анализу строгости доказательства теорем и проблеме непротиворечивости. Это привело к большим спорам относительно обоснования математики, суть которых рассмотрена в гл. 10.

Из новых направлений, родившихся в начале XX в., следует назвать три ветви — теорию функций, топологию и функциональный анализ [73].

Теория функций. В теории функций (сейчас ее чаще называют комплексным анализом) в XIX в. исследовались функции одного комплексного переменного, причем функции задавались в явном виде. Теперь интерес представляют глобальные свойства функций: расположение особенностей, области определения и области значений.

На первый план выдвинулась теория функций действительного переменного; она сформировалась во второй половине XIX в., главным образом, в связи с вопросами теории тригонометрических рядов и работами Георга Кантора по теории множеств. В конце XIX в. теория функций действительного переменного обогатилась понятиями и методами теории множеств. Это привело к созданию теории точечных множеств, введению понятия измеримой функции, существенному обобщению понятия интеграла, классификации функций действительного переменного.

Мера множества по Лебегу, измеримые множества Бореля, классы функций Бэра, интеграл Лебега — все эти понятия входят сейчас в университетские курсы математики, а появились в науке в первые годы XX в. Важными для развития математики оказались работы Пеано, издавшего в 1895–1908 гг. пять томов «Математического формуляра» — комментированного изложения всей математики на основе системы обозначений, используемых в математической логике.

В начале века Лебег завершил построение теории меры и интегрирования. Для составления интегральной суммы он разбивал на отрезки не ось абсцисс, а ось ординат, чтобы удобно было интегрировать разрывные функции. В этом случае для построения теории интегрирования необходимо было, в первую очередь, построить теорию меры. Это было сделано Борелем и Лебегом.

Трансформировалась и теория множеств. Французские ученые Борель, Бэр и Лебег заложили основы дескриптивной теории множеств. Это теория изучает строение сложных, причудливо устроенных числовых множеств.

В 20-е годы XX в. ведущая роль в теории функций перешла к московской математической школе, возглавляемой Н.Н. Лузиным [75].

Исследования Кантора, Бореля, Лебега, Лузина и их учеников по теории интеграла и рядов Фурье привели к детальному изучению разрывных функций, а позднее — к появлению теории точечных множеств, т. е. множеств, состоящих из точек координатной прямой или плоскости. Дальнейшее развитие теории множеств показало эффективность ее применения в различных разделах математики: алгебре и геометрии, математическом анализе и теории вероятностей. Общие методы и понятия теории множеств позволили охватить области математики, казавшиеся ранее удаленными друг от друга, дали возможность сравнивать мощности различных множеств, т. е. как бы «градуировать бесконечность».

В начале XX в. продолжал развиваться ведущий раздел математики конца XIX в. — теория аналитических функций. Значительные успехи были достигнуты в теории конформных отображений, многое было сделано для изучения в комплексной области различных классов специальных функций.

В 20–30-е годы XX в. достигло апогея увлечение теоретико-множественными конструкциями, связанными с развитым аналитическим аппаратом теории функций действительного переменного и теории функций комплексного переменного. Самым важным во всей математике представлялось понятие непрерывности. Анри Лебег считал, что значительно уменьшилось и сходит на нет практическое значение вычислений, не связанных с непрерывными функциями и бесконечными процессами.

Топология. Одной из новых областей математики стала топология, состоящая из двух разделов. Один раздел, родоначальником которого был Пуанкаре, долгое время называли комбинаторной топологией, а теперь — просто топологией. Другой раздел, истоками которого являются исследования Кантора, называют общей, или теоретико-множественной, топологией. Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основании математики. В XX в. основы общей топологии были заложены немецким ученым Ф. Хаусдорфом,

польским математиком К. Куратовским, российскими учеными П.С. Урысоном и П.С. Александровым.

Комбинаторная топология является разделом геометрии. Она изучает свойства фигур, остающихся неизменными при взаимооднозначных и непрерывных отображениях.

Во втором десятилетии XX в. была создана теория размерности — раздел топологии, начало которому положили исследования французов Пуанкаре и Лебега, голландца Брауэра, австрийца Менгера и россиянина Урысона.

В конце 1930-х годов Уитни, Штифель, Понтрягин и Черн открыли важнейшие топологические инварианты гладких и комплексных многообразий — характеристические классы, связывающие воедино топологию, риманову геометрию и комплексный анализ.

Долгое время и комбинаторная топология воспринималась как «наука, далекая от жизни», призванная прославлять человеческий разум, но в наше время выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к объяснению устройства мироздания. Помимо этого, топологические методы ныне пронизывают фактически все разделы математики — анализ, теорию дифференциальных уравнений и т. п. Сейчас топология — одна из центральных областей математики [75].

Функциональный анализ. Соединение идей и методов классического анализа, линейной алгебры и геометрии привело к созданию нового раздела математики — функционального анализа. В его основе лежит изучение не отдельных функций, а их классов. Отдельные функции рассматриваются как элементарные сущности, точки функционального пространства.

После того как в 1900 г. Фредгольм догадался заменить интегральное уравнение системой линейных алгебраических уравнений, начала разрабатываться теория, сочетавшая в себе элементы алгебры и геометрии, но в бесконечномерных пространствах. Так родился линейный функциональный анализ. Нелинейный функциональный анализ был разработан спустя десятилетия.

Важным разделом функционального анализа явилась также теория квадратичных форм, начала которой были заложены Гильбертом в 1904–1906 гг. Теория квадратичных форм в гильбертовых пространствах явилась математической базой квантовой механики [75].

В знаменитой серии мемуаров 1904–1910 гг. Гильберт построил алгебру, элементами которой стали функции или бесконечные числовые последовательности по аналогии с линейной алгеброй и теорией квадратичных форм для конечного числа переменных. Наиболее важной заслугой Гильберта является то, что он сумел ввести в изученное им пространство (пространство Гильберта) топологические соотношения. Это позволило в новой, открытой им, области анализа воспользоваться языком и образами геометрии.

В развитии функционального анализа, в котором пересеклись идеи различных областей математики, принимали участие многие выдающиеся математики XX в., получившие основные научные результаты в других ее разделах. Начали изучаться пространства с комплексными координатами и пространства, элементами которых являются не точки, а прямые, окружности, сферы,

функции и последовательности. Старейшей составной частью функционального анализа следует считать вариационное исчисление, которое является дифференциальным исчислением над функционалами.

Абстрактная алгебра. Если в XVI–XVIII вв. алгебра занималась в основном решением уравнений и систем уравнений, то к середине XIX в. алгебраические операции начали производить не только над числами, но и над векторами, кватернионами, матрицами, логическими высказываниями и т. д. Правила таких действий отличались от привычных правил действий над числами. Это привело к необходимости исследования общих свойств алгебраических операций в произвольных множествах.

Изучение различных операций сочеталось с изучением таких алгебраических структур, как группы и кольца, а позднее — поля, решетки и т. д. Эти структуры первоначально возникли из конкретных задач алгебры и геометрии. Например, понятие группы было введено Э. Галуа в 30-е годы XIX в. в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах.

Еще до того, как около 1870 г. было сформулировано абстрактное понятие группы, в работах математиков встречались не только разнообразные группы, но и некоторая часть теории групп, сформулированная лишь для отдельных случаев. Сама теория групп возникла как средство упорядочения этих частных результатов. Идея заключалась в том, что общие для всех групп свойства были сформулированы и названы аксиомами группы. Иногда шутят, что аксиомы групп позволяют облегчить жизнь математикам, объединяя различные вещи в единое целое.

В дальнейшем предметом алгебры становится изучение разного рода структур, порождаемых во множествах введением различных операций. Таким образом, значительно расширилась область приложения алгебраических методов. Одна и та же алгебраическая теория (например, теория групп, теория коммутативных групп, теория колец, теория полей и т. д.), описывающая определенный род алгебраических структур, может применяться к любой структуре этого рода, в какой бы предметной области она ни встретилась.

Первыми областями математики, аксиоматизированными после геометрии, оказались алгебра и топология. Множества точек евклидова пространства, римановых поверхностей, многообразий и множества функций были объединены вначале в метрические, а затем в топологические пространства. Если абстрактная алгебра еще питалась понятиями старой алгебры, то в топологии возникли свои фундаментальные понятия, которых не было в прежних специальных подходах. Это такие понятия, как полнота, компактность, сепарабельность, а также такие, которые можно правильно понять лишь с обобщенной точки зрения, — связность, размерность, произведение пространств и т. д.

Можно считать, что абстрактная алгебра началась в 1910 г., когда Э. Штейниц ввел понятие поля. В 1914 г. было введено понятие линейного пространства, охватившее многочисленные примеры ранее известных функциональных пространств. В 30-е годы XX в. это понятие под названием «векторное пространство» было использовано для изложения аналитической геометрии.

Дифференциальные уравнения. Проблемой номер один для математиков XIX в. было интегрирование дифференциальных уравнений. Ее решения ждали представители всего точного естествознания, так как дифференциальные уравнения были единственной математической формой описания естественных процессов. Построить физическую теорию для ученых означало найти дифференциальные уравнения, описывающие движение всех частей исследуемой системы. Умение их интегрировать являлось насущной потребностью времени. В работах Коши и Вейерштрасса было показано, что многие свойства дифференциальных уравнений проясняются, если входящим в уравнения переменным придавать не только вещественные, но и комплексные значения. Это привело к развитию теории аналитических функций, частью которой была многообещающая теория эллиптических функций.

До XX в. математика обладала слишком скудным запасом функций для описания решений рассматриваемых дифференциальных уравнений. К хорошо известным элементарным функциям были добавлены и изучены новые, такие как гамма-функция, дзета-функция, цилиндрические и эллиптические функции. Исследования Ф. Клейна и А. Пуанкаре добавили к ним автоморфные (фуксовы) функции.

Анри Пуанкаре разрабатывал качественную теорию дифференциальных уравнений в абстрактной форме и в применении к небесной механике, а А.М. Ляпунов исследовал сходные вопросы при создании теории устойчивости.

В XIX в. в теории дифференциальных уравнений искали явное локальное решение. Теперь интересуются в основном неявными решениями и сингулярностями решений.

Геометрия. Исследования Римана 1850-х годов показали неограниченное разнообразие геометрических пространств, отличающихся друг от друга размерностью, формулами для вычисления расстояний и т. д. В конце XIX в. в геометрии стали применяться идеи теории групп, сформулированные Галуа при исследовании вопроса о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Этот подход в геометрии был впервые рассмотрен в 1872 г. немецким математиком Ф. Клейном в его знаменитой Эрлангенской программе. Геометрия рассматривается Клейном как наука, изучающая свойства фигур, не изменяющихся при преобразованиях из той или иной группы. Выбирая различные группы геометрических преобразований (группы перемещений, подобий, афинную, проективную, конформную и т. д.), можно получить различные геометрии. А поскольку отыскание инвариантов данной группы является алгебраической задачей, то была установлена новая связь между алгеброй и геометрией.

Геометрия в XX в. распалась на множество геометрий, и каждая из них накопила большое количество важных результатов. Например, возникла кватернионная проективная геометрия. Эйнштейн при построении общей теории относительности ввел в физику риманову дифференциальную геометрию, пользуясь исчислением, которое он назвал тензорным. Опубликованные в 1899 г. «Основания геометрии» Гильберта продолжают и завершают кропотливую работу над уточнением аксиоматики геометрии XIX в. и начинают новую главу в истории аксиоматического метода.

В XIX в. в дифференциальной геометрии исследовались малые части пространства, малые доли кривизны и локальных уравнений, описывающих локальную геометрию. В XX в. перешли к большим масштабам, исследуют глобальную картину искривленной поверхности в целом.

Математика и физика. Специальная теория относительности была создана в 1904–1906 гг. усилиями А. Пуанкаре и А. Эйнштейна. Устройство физического мира, описываемого этой теорией, было очень непривычно. Оно противоречило физической интуиции, выработанной на протяжении последних трех веков, и вызвало шок у физиков.

Математические аспекты специальной теории относительности были исследованы немецким математиком Германом Минковским. Им была установлена поразительная связь специальной теории относительности с геометрией Лобачевского. При этом выяснилось, что время и пространство нельзя рассматривать изолированно, что наш мир четырехмерен. В итоге многомерная геометрия приобрела физический смысл.

Через десять лет Эйнштейн создает общую теорию относительности, где рушит представления о «плоском» мире. Геометрия мира оказывается «искривленной» и связанной с тяготением. Все это повлекло за собой интенсивнейшее развитие геометрии в 1920–1930-е годы и топологии – в наше время.

Еще одним заметным событием в физике в 20-е годы XX в. стало рождение квантовой механики. Ее математические основания созданы Гильбертом и его последователями незадолго до рождения самой науки. Уменьшилась уверенность в возможности предсказания будущего по прошлому. Выяснилось, что микромир принципиально непредсказуем. Можно лишь определить вероятность появления электрона на определенном месте экрана, расположенного за отверстием, через которое этот электрон пропускается. Это казалось невероятным даже для Эйнштейна, одного из основоположников квантовой теории.

Гейзенбергом был сформулирован принцип неопределенности, в соответствии с которым мы не можем точно знать одновременно и положение материальной частицы, и ее импульс. Рухнула надежда на детерминизм и познаваемость микромира [75].

Теория чисел и теория вероятностей. Новые главы были вписаны и в теорию чисел. Выдающиеся результаты в начале XX в. получены в аналитической теории чисел Гильбертом, Г. Вейлем, Харди, Литлвудом, Рамануджаном. Успешно развивалась русская школа теории чисел, начало которой положили П.Л. Чебышёв, А.А. Марков, Е.И. Золотарёв, А.Н. Коркин, Г.Ф. Вороной. В XX в. замечательные результаты в теории чисел были получены И.М. Виноградовым и его учениками.

Основой исследований в области теории вероятностей оставались работы учеников Чебышёва в России — А.А. Маркова и А.М. Ляпунова. В СССР их преемниками стали С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров и их ученики. Физика, техника, экономика ставят все более разнообразные задачи перед теорией вероятностей и математической статистикой. После разработки Колмогоровым аксиоматики теории вероятностей произошел переход от элементарной теории вероятностей, основанной на комбинаторике, к современной, использующей мощный аппарат других разделов математики.

Математика и решение оборонных задач. Вопросы национальной безопасности России всегда стояли остро. В них слиты воедино проблемы геополитические и демографические, этнические и конфессиональные, языковые и общекультурные, проблемы здоровья и благосостояния нации, национального самосознания и многие другие. Весь этот конгломерат проблем цементирует воедино современная наука, абстрактная и конкретная, фундаментальная и прикладная.

Когда-то физики обходились без математиков. Но создание атомного, а тем более — термоядерного оружия потребовало построения сложнейших математических моделей и больших расчетов. В создании бомбы в той или иной мере приняли участие многие выдающиеся математики. В итоге были переосмыслены принципы вычислительной математики и созданы мощнейшие вычислительные машины.

Потребности авиации способствовали рождению аэродинамики, что вызвало развитие теории функций комплексного переменного. Рождение радио стимулировало развитие теории нелинейных колебаний. Управление артиллерийским огнем и проблемы бомбометания оказали влияние на развитие многих разделов теории вероятностей. Проблемы шифровки секретных сообщений и их эффективной передачи по каналам связи привели к рождению теории информации и развитию теории кодирования [75].

Внедрение автоматического управления в промышленности и появление космической навигации стимулировали развитие оптимального управления и динамического программирования [75].

Дискретная математика. С появлением исследований в области кибернетики в 1940-е годы резко возрос интерес к дискретной математике. Важную роль сыграло появление электронных цифровых вычислительных машин дискретного действия. Математики заинтересовались дискретной природой явлений в биологии, химии и физике.

В середине XX в. был разработан целый ряд фундаментальных понятий современной математики, неожиданных новых схем математического рассуждения. Создан стройный, чрезвычайно разветвленный аппарат, позволяющий с единой точки зрения находить подходы и решать трудные проблемы в самых различных областях математики, например, дифференциальной геометрии и динамических систем, вариационного исчисления и теории уравнений в частных производных, групп Ли, алгебры и алгебраической геометрии, теории чисел и теории функций многих комплексных переменных.

Создание быстродействующих вычислительных машин сделало «прикладными» некоторые разделы математики, ранее считавшиеся весьма далекими от практики. В частности, важной для приложений оказалась математическая логика, возникли новые разделы математики — теория кодирования, теория информации, теория алгоритмов, теория автоматов. Бурное развитие получила конечная математика, связанная с изучением конечных множеств, почти заново была создана вычислительная математика.

Синергетика и фрактальная геометрия. В последние десятилетия внимание многих ученых, в том числе и математиков, привлекает синергетика —

новая междисциплинарная область исследований, одна из самых молодых и интересных для изучения. Основанная на идеях термодинамики, синергетика пытается с точки зрения химии, физики, математики и теории хаоса объяснить взаимодействие любых систем, имеющих развитие, в том числе и эволюцию человечества. С развитием синергетики ученые обратились к исследованию необратимых процессов, в научный обиход пришло понятие стрелы времени. Основой синергетики являются термодинамика неравновесных процессов, теория случайных процессов, теория нелинейных колебаний и волн.

Выяснилось, что принцип обратимости и детерминированности процессов, господствующий в науке со времен Ньютона, выполняется лишь в отдельных простейших случаях, а в природе господствуют необратимость и случайность.

Близкой синергетике является возникшая около трех десятилетий назад новая область математики — фрактальная геометрия. Основным понятием фрактальной геометрии является «фрактал», который создатель фрактальной геометрии Бенуа Мандельброт определил как структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Фрактальную геометрию он определил как морфологию бесформенного, изучающую математические объекты, лишенные гладкости, графически являющиеся шероховатыми, зазубренными, изъеденными ходами и отверстиями. Такие объекты ранее не исследовались, хотя в природе они встречаются чаще, чем рассматриваемые в геометрии усредненные, сглаженные, отполированные.

Аксиоматизация и систематизация математики

Аксиоматический метод открыт древнегреческими математиками. В Древней Греции аксиомы, или постулаты, геометрии принимали без доказательства, а остальные предложения выводили из этих аксиом. Истинность аксиом автоматически обеспечивала истинность всех теорем и их совместимость. Аксиоматическое изложение геометрии в глазах многих поколений ученых представлялось образцом научного знания. До недавнего времени геометрию считали единственной областью математики, построенной на аксиоматической базе.

Открытие неевклидовой геометрии в 20-е годы XIX в. потребовало отказа от понимания аксиом как истин, не требующих доказательства в силу своей очевидности. Оказалось, что аксиомы скорее являются гипотезами, поэтому требуется проверка моделей, построенных с использованием этих аксиом, на соответствие материальному миру. Это послужило стимулом для глубоких исследований в области оснований математики, заставило анализировать требования к системам аксиом и привело к дальнейшему развитию аксиоматического метода, ставшего одним из ведущих методов построения математических теорий.

Примерно в 1870 г. началось создание не только теории множеств, но и современной аксиоматики. Первым разделом математики, в котором появилась современная аксиоматика, была геометрия. В геометрии наиболее просто

можно было решить проблему дедуктивного построения теории из основных положений — аксиом, что и было сделано Евклидом. Аксиоматику проективной и комплексной проективной геометрии пытался создать Штаудт в 40–50-е годы XIX в. Первую действительно полную аксиоматику евклидовой геометрии предложил Мориц Паш. Он показал математикам, как следует формулировать аксиомы. Вскоре, однако, более глубокие «Основания геометрии» Гильберта (1899) затмили работы Паша.

Первыми разделами математики, аксиоматизированными после геометрии, оказались алгебра и топология. Множества точек евклидова пространства, римановых поверхностей, многообразий и множества функций были объединены вначале в метрические, а затем в топологические пространства.

Если в абстрактной алгебре еще использовали понятия старой алгебры, то в топологии возникли свои фундаментальные понятия: полнота, компактность, сепарабельность и т. д. Примерно до конца 1920-х годов аксиоматические устремления в алгебре, топологии и анализе развивались более или менее независимо друг от друга. Анализ, включавший в себя аксиоматические элементы алгебры и топологии, дал толчок к комбинированию структур. Стало возможным образовывать слияние двух или более структур, которые при уточнении описания не должны противоречить друг другу. Например, поле действительных чисел можно рассматривать в качестве топологического поля, или в качестве упорядоченного поля, или в качестве метрического поля.

В 1930-е годы, к которым относится начало самостоятельного существования теории структур, были найдены связи понятия структуры с другими разделами математики. Так, например, теория проективных геометрий оказалась просто частью дедекиндовых структур.

В развитии теории структур можно отметить три периода. После опубликования в 1847 г. «Математического анализа логики» Буля некоторые математики-логики подвергли сомнению постулаты булевой алгебры и алгебры отношений. Основные результаты их анализа изложены в «Алгебре логики» Шрёдера.

Второй период в развитии теории структур наступил спустя два года после выхода в свет «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена. Статьи, опубликованные в 1933–1937 гг. Г. Биркгофом, Дж. фон Нейманом и Л.В. Канторовичем, показали, что обобщение булевой алгебры до подходящей «структуры» имеет фундаментальное значение для современной алгебры, проективной геометрии, теории точечных множеств и функционального анализа, равно как и для логики, и теории вероятностей. В результате теория структур стала существенной отраслью современной алгебры. В русском языке словом «структура» называли введенный Г. Биркгофом в 1933 г. термин *lattice*. В настоящее время вместо этого слова используют термин «решетка», впервые введенный в математику Дедекиндом в 1894 г.

В дальнейшем предметом алгебры становится изучение разного рода алгебраических структур, порождаемых во множествах введением различных операций. Таким образом значительно расширилось поле приложения алгебраических методов.

Сложилась концепция математики, которую А.Н. Колмогоров характеризовал следующими тезисами:

1) в основе всей математики лежит чистая теория множеств;

2) специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным специальным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом. Математика интересуется только теми свойствами структур, которые вытекают из принятой системы аксиом, т. е. изучает структуры только с точностью до изоморфизма.

Данная точка зрения получила наиболее полное отражение в работах группы современных французских математиков (А. Вейля, Ж. Дьёдонне и других), публиковавших свои труды под общим псевдонимом Николя Бурбаки. Поэтому такую точку зрения часто называют бурбакистской.

В распоряжении математиков появились рычаги управления, предоставленные теорией структур. В тех разделах математики, которые не были достаточно структурированы, появились области, унифицированные аксиоматикой. Вместо четко разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии обнаружились связи теории простых чисел с теорией алгебраических кривых, в евклидовой геометрии обнаружилось сходство с интегральными уравнениями. Такие разделы классической математики, как анализ функций действительного и комплексного переменного, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, теория чисел, стали утрачивать автономность и превращаться в «перекрестки», на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие наиболее общий характер.

Это, конечно, упрощенная картина. Реальность намного сложнее — она позволяет «лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз более и более ясному плану и стремясь к более и более величественному расположению, когда сносятся старые кварталы с их лабиринтом переулков для того, чтобы проложить к периферии улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные» [84].

Систематическое применение аксиоматического метода позволило выявить связи между областями математики, казавшимися очень далекими друг от друга, найти пути преодоления тенденции к расщеплению математики на почти независимые области и укрепить тем самым единство математической науки. Оно дало ряд важных результатов благодаря возможности применять методы, выработанные в одних областях математики, к иным областям, связанным с ними единством структуры.

Выявилась роль таких математических понятий, как эквивалентность, порядок, близость и т. д. При этом стало ясно, что они могут встретиться в разных разделах. В математике сейчас изучаются не только понятия, возникшие при рассмотрении реальных объектов, но и свойства «мыслимых объектов» (например, шаров или спиралей в бесконечномерном пространстве), логически возможные чистые формы, системы отношений.

Математика есть учение об общих формах, свойственных реальному бытию, она создает постоянно развивающиеся теории, пригодные для самых различных запросов естествознания и техники. Именно это позволяет применять математические методы, разработанные при решении задач одной области науки, к совершенно непохожим на них задачам, относящимся к совсем иным областям знания.

В течение двух последних столетий аксиоматический метод стал применяться более широко и интенсивно. Для многих разделов математики были сформулированы системы аксиом. Укоренилось убеждение, что для любой математической дисциплины можно указать перечень аксиом, достаточный для систематического построения ее истинных предложений.

Исследования К. Гёделя показали, что возможности аксиоматического метода ограничены. Выяснилось, что для весьма широкого класса дедуктивных теорий нельзя доказать их непротиворечивость, не пользуясь более сильными методами, непротиворечивость которых еще более сомнительна, чем у доказываемых теорий. Следовательно, нельзя окончательно систематизировать многие разделы математики, и нет гарантий, что они свободны от внутренних противоречий.

Споры сторонников абстрактной и прикладной математики

Долгое время математику считали прикладной наукой, которая решает практические задачи естествознания. Первым показал красоту и значимость абстрактной математики (ее часто называют «чистой» математикой) Гаусс. Ранее ей отводилась роль своего рода отдохновения от гораздо более важных проблем естественных наук.

После Гаусса в XIX в. для нескольких поколений ученых абстрактная и прикладная математика успешно сосуществовали. Чисто теоретические исследования находили применение на практике, а попытки решить прикладные задачи приводили к развитию абстрактной математики.

Доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, в частности впервые предпринятое Коши, должно было отмести все сомнения в том, что физические проблемы, сформулированные на языке математики, допускают решение, и тем самым вселить уверенность, что поиск этих решений будет результативным. Стимулом для работ Кантора по теории бесконечных множеств было стремление ответить на некоторые вопросы теории рядов Фурье, используемых в приложениях. Гигантская работа по перестройке основ математики, производимая в интересах самой этой науки, несомненно, явилась откликом на насущные проблемы не только абстрактной, но и прикладной математики. Математика была одновременно и царицей и служанкой естественных наук. Многие ведущие математики, работая в области астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике.

По поводу противоречий между сторонниками абстрактной и прикладной математики Ф. Клейн писал, что все еще встречаются университетские преподаватели, не жалеющие презрительных слов по адресу всякого занятия приложениями, что любое дельное достижение, следовало бы ценить одинаково высоко, предоставляя каждому возможность заниматься теми вещами, к которым он чувствует наибольшую склонность, тогда каждый проявит себя тем более разносторонним образом, чем большим числом талантов он обладает: величайшие гении, каковыми являются Архимед, Ньютон, Гаусс, всегда охватывали равномерно и теорию и практику.

Среди математиков нет единого мнения относительно того, что в настоящее время должно являться предметом исследования. В XX в. разногласия между сторонниками абстрактной и прикладной математики обострились.

Для некоторых математиков приоритетными являются абстрактные задачи. Они считают, что математикой нужно называть лишь чисто дедуктивные построения, связанные с изучением математических абстракций самих по себе, и что прикладными вопросами занимаются лишь те, кто не может внести лепту в теорию. По их мнению, прикладная математика — это часть математики, существующая в виде логически недоработанного и несовершенного набора некоторых приемов и правил.

Одним из тех, кто отстаивал первую точку зрения, был Ж. Дьёдонне. Он считал, что современная математика в основе своей не имеет какой-либо утилитарной цели, что она представляет собой интеллектуальную дисциплину, практическая польза которой сводится к нулю, а математик в своих исследованиях никогда не руководствуется мыслью о степени полезности полученных результатов в будущем, скорее он руководствуется желанием проникнуть в понимание математического явления, заканчивающегося на себе самом, и что, наконец, математика — не более чем «роскошь», которую может позволить себе цивилизация.

Приоритету абстрактной математики способствовали следующие обстоятельства. Во-первых, осознание того, что математика не является сводом незыблемых истин о природе. Во-вторых, уяснение того, что и абстрактная математика рано или поздно окажется полезной для практики, что заниматься частными проблемами не обязательно. В-третьих, усложнение стоящих перед естественными науками проблем, которые не всем были по плечу (например, «задача трех тел» — проблема описания движения трех тел, каждое из которых притягивается двумя другими). В-четвертых, давление на математиков со стороны учреждений, где они работали, выражающееся в требовании публиковать результаты исследований.

Сторонники этой точки зрения видят необходимость исследований в четырех направлениях. Первое направление — *абстракция*. После введения Гамильтоном кватернионов математики занялись поиском всех возможных алгебр. Второе направление — *обобщение*. Математики стремятся получить результаты для n-го порядка там, где известны результаты для второго, третьего порядков. Третье направление — специализация, стремление решать частные задачи внутри одного раздела математики. Четвертое направ-

ление — *аксиоматизация*. Математики стремятся модифицировать существующие аксиоматические системы, пытаясь сформулировать существующие аксиомы проще или заменить их другими.

По мнению других ученых, предметом исследования математики должно быть решение насущных практических задач, а теоретические результаты должны получаться путем обобщения закономерностей, открываемых при решении конкретных задач. Джон Л. Синг, специалист по математической физике, был не согласен с Дьёдонне. Он считал, что природа по-прежнему продолжает подкидывать глубокие проблемы, но они уже не доходят до математиков, в ожидании противника они сидят в своей башне из слоновой кости, вооруженные до зубов, но противник так и не появляется, что природа не ставит перед математиками четко сформулированных проблем, а добыть ясно поставленную задачу можно, лишь вооружившись киркой и лопатой, и тот, кто боится испачкать руки, никогда ни одной сколько-нибудь стоящей задачи не найдет.

Однако эта позиция также слишком категорична. Многие открытия математиков десятилетиями, а то и тысячелетиями дожидались своего практического применения. Аполлоний изучал свойства эллипса более чем за тысячу лет до того, как Кеплер использовал его идеи для определения траекторий планет. Тензорный анализ был создан за 30–50 лет до того, как Эйнштейн нашел для него применение в теории относительности.

Любой математик знает о существовании теоретических результатов, которые до сих пор не нашли практического применения, но интуиция подсказывает, что они являются очень важной частью математики. Работа над ними свидетельствует не об отходе от главного направления, а как раз об обратном — о борьбе за развитие математики. Когда-нибудь эти теории, подобно эллипсу, найдут своего Кеплера и, подобно тензорному анализу, своего Эйнштейна. Знаменитый кораблестроитель, механик и математик академик Алексей Николаевич Крылов говорил, что рано или поздно всякая правильная математическая идея находила применение в том или ином деле.

Джон фон Нейман считал самой важной особенностью математики ее связь с естественными науками. Согласно его мнению, математические идеи берут свое начало в эмпирике, но после возникновения приобретают независимое, самостоятельное существование. Когда математическая дисциплина «отходит» достаточно далеко от своего эмпирического источника, над ней нависает серьезная опасность. Она может начать развиваться по пути наименьшего сопротивления. Соответствующий математический раздел обращается в беспорядочное нагромождение деталей и различного рода сложностей. При угрозе вырождения единственным способом «исцеления» является возвращение к источнику и эмпирическим идеям. Это необходимо для сохранения «свежести» и жизнеспособности математической теории.

У прикладной математики много общего с абстрактной математикой, но есть и различия. По этому поводу Курант писал, что на самом деле между «чистой» и «прикладной» математикой невозможно провести четкую грань, поэтому в математике не должно быть разделения на касту верховных жрецов,

поклоняющихся непогрешимой математической красоте и внимающих только своим склонностям, и на работников, обслуживающих их.

Такие споры имели место и за рубежом, и в нашей стране. Иногда они выплескивались на страницы газет и журналов. В «Известиях» от 17 января 1971 г. Ю.В. Новожилов писал: «К сожалению, теоретик до сих пор нередко рассматривает "прикладника" как математика второго сорта, как ученого, который не способен работать предельно строго, разменивается на частности в ущерб общности. Легко обнаруживая у "прикладников" промахи в строгости рассуждений, теоретик часто остается равнодушным к их основному достоинству — умению с достаточной для практических целей точностью решать такие актуальные задачи, которые он сам строгими методами решить не может».

В «Литературной газете» № 43 за 1979 г. была опубликована статья А. Китайгородского «Дело о разводе», в которой шла речь о необходимости «развода» математики с естествознанием и техникой. Статья вызвала большой общественный резонанс. Споры завершились статьей Е. Вентцель, Л. Гурина, А. Мышкиса, Л. Садовского «Компьютер — это еще не все!», помещенной в «Литературной газете» № 11 за 1980 г.

Статья заканчивается такими словами: «Итак, "развода" нет и не будет! Не за "развод" естествознания и техники с математикой надо ратовать, а за их еще более тесный союз на базе использования ЭВМ; не за отделение чистой математики от прикладной "китайской стеной", а за дальнейшее претворение "чистых" результатов математического творчества в столь же творческие прикладные исследования в интересах общего развития науки и техники».

В защиту связи теории с практикой писал академик С.Л. Соболев: «Раньше каждое новое изделие проходило длинную стадию моделирования и испытания. Прежде чем сделать окончательную конструкцию, нужно было перерабатывать много разных неудачных вариантов. Опытная доработка и доводка была главным способом создания хороших машин. В новой технике этот путь становился непригодным. Нельзя было бы вести пристрелку по Луне, выпуская сотни и тысячи ракет. Слишком это было бы дорого, как слишком дорого и долго было бы испытывать один неудачный реактор за другим. Опытную отработку устройств заменил математический расчет. Этот расчет бывает иногда очень сложным. Он требует миллионов арифметических действий, которые нужно к тому же выполнить в короткий промежуток времени. Для того чтобы это осуществить, и были изобретены математические машины, работающие уже во много миллионов раз быстрее человека» [68].

При решении задач абстрактной математики требуется бескомпромиссное совершенство. Результат должен быть следствием неразрывной цепи непротиворечивых рассуждений. В случае затруднений допустимо упрощение задачи, но эта упрощенная задача должна быть решена безупречно.

При решении задач прикладной математики их обычно нельзя видоизменять, так как требуется дать правильный ответ на конкретную задачу. В случае необходимости возможен компромисс: внесение некоторых догадок в цепь рассуждений и погрешность в числовых значениях.

Математик-прикладник обязан вникнуть в суть реальной задачи, суметь выбрать адекватный математический аппарат, а если такового не существует, то разработать его, построить разумную математическую модель изучаемого процесса, вывести из нее необходимые следствия, найти их прикладное истолкование и оценить соответствие модели реальному процессу.

Иногда математику-прикладнику приходится отказываться от полной математической строгости. В прикладной математике используют «размытые» понятия, категории не качественного, но и не количественного характера. Приемы, которыми пользуется современная прикладная математика (метод экспертной оценки, эвристические методы и т. п.), настолько отличаются от классических, что у профессионального математика «строгой» школы могут вызвать недопонимание.

Случается, что в абстрактной и прикладной математике возникают принципиальные различия при решении задач, требующих применения числовых рядов. Для абстрактной математики скорость сходимости числового ряда не имеет принципиального значения. Так, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ является сходящимся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000}$ — расходящимся. При неограниченном количестве членов ряда это бесспорно. При практических расчетах, когда берется относительно малое количество членов ряда, первый ряд можно считать расходящимся, так как его первые 1000 членов возрастают, а второй ряд — сходящимся, потому что первые 1000 членов убывают и вначале это убывание весьма быстрое. Этот пример приводил Анри Пуанкаре. Далее он подчеркивал, что оба воззрения законны: первое — в исследованиях теоретических, второе — в численных приложениях. Оба воззрения должны господствовать, но в двух различных областях, которые важно четко разграничить.

Кроме того, в прикладных задачах принципиально недостижима доказательность того же уровня, как и в чисто математических исследованиях, хотя бы потому, что математическая модель реального объекта может описывать лишь существенные, в том или ином смысле, черты этого объекта, но никогда не претендует и не должна претендовать на его полное описание. С другой стороны, к решению прикладных задач предъявляются требования, которые в чисто математических исследованиях считаются второстепенными. Прикладная задача должна быть решена не только правильно, но и своевременно, экономно по затраченным усилиям. Решение должно быть доступным для существующих вычислительных средств и пригодным для фактического использования, его точность должна соответствовать задаче и т. п. Найти удовлетворительное решение задачи в срок более предпочтительно, чем полное решение к тому времени, когда оно станет бесполезным. Современная прикладная математика включает в себя математический эксперимент, использует аналогии. Поэтому прикладную математику можно определить как науку об оптимальных (чаще просто приемлемых) методах решения математических задач, возникающих

вне математики. Существует афоризм: «Чистая математика делает то, что можно, так, как нужно, а прикладная — то, что нужно, так, как можно».

В настоящее время прикладная математика завоевывает свое место под солнцем. Помимо физики, механики, техники, математика проникла в экономику, социологию, психологию, лингвистику, биологию, медицину и т. д. Математические методы стали использовать в гуманитарных науках позже, чем в точных, поскольку предмет их изучения очень сложен.

Для точных наук свойственны четкая постановка задач, количественный характер выводов, формально-логический характер рассуждений, для гуманитарных наук — преимущественно словесный способ построения исследования, широкое применение аналогий, использование терминов (точное содержание которых нередко сложно сформулировать), апелляцией к чувствам, воображению.

Математики начали заниматься такими вопросами, которыми раньше занимались ученые только гуманитарных специальностей (конфликтными ситуациями, иерархическими отношениями и т. п.). Математика со своим понятийно-категориальным аппаратом и методологией проникает повсюду, поэтому стирается граница между точными и гуманитарными науками.

Р. Курант считал, что математикам необходимо в непосредственно обозримом будущем установить еще раз органическую связь между чистым и прикладным знанием, здоровое равновесие между абстрактной общностью и полнокровной конкретностью и есть задача математики.

«Архитектура» современной математики

Сравним чтение этой книги с участием в виртуальной тематической экскурсии «Современная математика и ее творцы». Мы посетим небоскребы «Математика», находящиеся в квартале «Точные науки», в микрорайоне «Культура». Вначале небольшая информация об особенностях кварталов микрорайона. Та часть микрорайона, которая называется «Искусство», значительно отличается по внешнему виду от кварталов «Точных наук». Она представляет собой индивидуальную застройку, где есть изумительные по своей красоте виллы и невзрачные постройки массовой культуры. Особенностью является то, что почти каждый из объектов строится одним человеком. Новый житель, пришедший в этот квартал, строит свое жилище, а не достраивает то, что сделано до него другими. Он может что-то заимствовать из приемов, применяемых теми, кто обосновался в квартале раньше, но строит свое жилище сам от начала до конца. В зависимости от таланта строение может стать шедевром, которым будут любоваться потомки, а может стать трущобой, на которую никто не обратит внимания. Характерно, что постройки не подлежат ремонту и не достраиваются другими. И это понятно, ведь нельзя, пусть даже самому выдающемуся художнику XXI в., дорисовывать полотна Рафаэля или Леонардо да Винчи, так же как нельзя, даже самому талантливому композитору, дополнять творения Бетховена или Моцарта.