Простая наука для детей

Яков Перельман

Геометрия для любознательных

Что такое угловая величина?



Можно ли определить расстояние до грозового разряда?



Какова высота холма в пьесе «Скупой рыцарь»?



Почему сморщено печеное яблоко?

Во сколько раз Юпитер дальше от Солнца?





Аванта

УДК 51
ББК 22.1я92
П27

Перельман, Яков Исидорович.

П27 Геометрия для любознательных/ Я. Перельман, худож. Ю. Скалдин, А. Бондаренко, А. Филатова, Ю. Станишевский. — Москва: Издательство АСТ, 2023. — 249, [7] с. : ил. — (Простая наука для детей).

ISBN 978-5-17-153986-3.

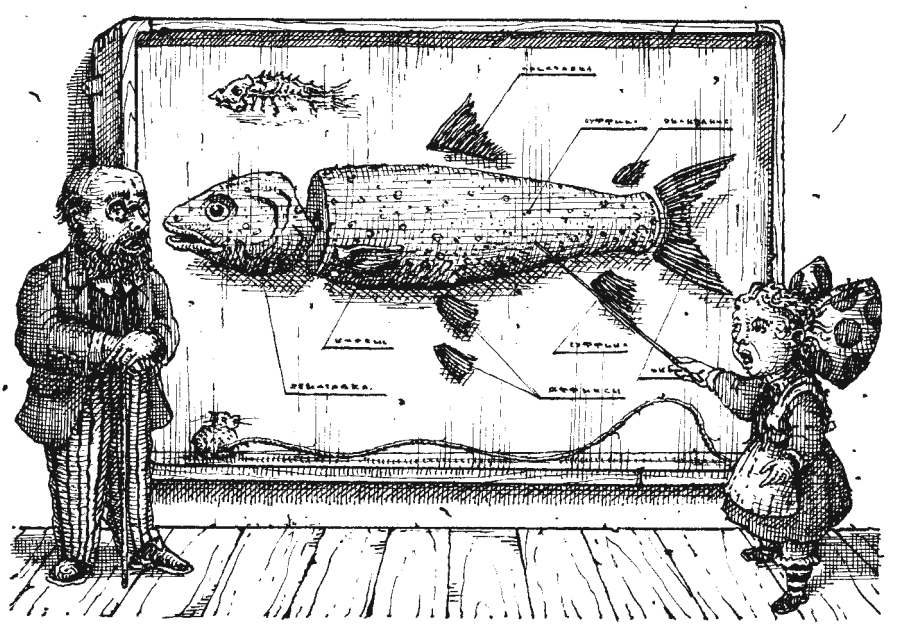
Книга известного популяризатора науки для детей Якова Исидоровича Перельмана «Геометрия для любознательных» содержит множество геометрических задач из области живой природы, быта, астрономии, физики и географии, которые можно решить без знания сложных формул и теорем. Книга послужит занимательным дополнением к учебному материалу и будет полезна также преподавателям, желающим разнообразить урок геометрии нестандартной задачей. В это издание вошла повесть Якова Перельмана «Ракетой на Луну», герои которой используют необычные способы измерения расстояний. Увлекательная повесть рассказывает об изобретении Кибальчичем и Циолковским первых ракет и о фантастическом для 1930 года, но вполне реальном для нашего времени путешествии на Луну.

Для среднего школьного возраста.

УДК 51
ББК 22.1я92

6+

© ООО «Издательство АСТ», 2023



Оглавление

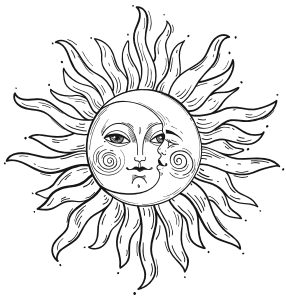
ПРЕДИСЛОВИЕ

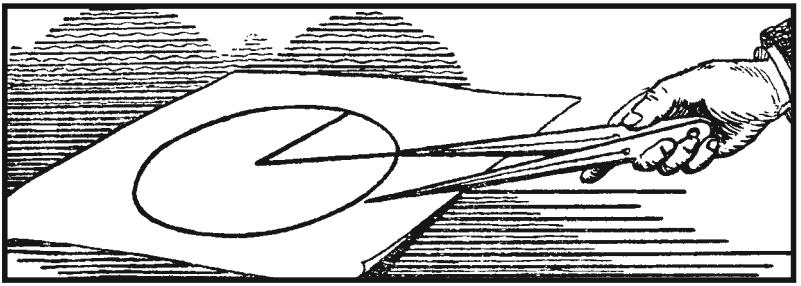
Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? 3
Задачи из обиходной жизни 18
Задачи из техники и сельского хозяйства 37
Задачи из географии и землеведения . . . 44
Задачи из мироведения 55
Задачи из физики 63
Задачи из живой природы 77
Особые задачи 89
- Угол зрения 89
- Дальность горизонта 96

• Диаграммы 101
• Вычисления с π 105
• Исторические задачи 108
Задачи для оживления занятий 112
Геометрия во время экскурсий 127

РАКЕТОЙ НА ЛУНУ

Какой величины Луна 146
Как Луна устроена 153
Завоевать небо 158
Из пушки на Луну 169
Как и почему летит ракета 178
Для чего служат ракеты 186
Летательная машина революционера Кибальчича 191
Ракетный корабль Циолковского 197
Изобретатели за рубежом 206
От мысли к делу 208
Первые шаги 213
Заглянем в будущее 219
Лунный перелет 220
Прогулка по Луне 238
Возвращение 244





ПРЕДИСЛОВИЕ

КАК СДЕЛАТЬ ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ИНТЕРЕСНЫМ И ЖИЗНЕННЫМ?

Если проследить за тем, какие геометрические навыки выносятся из школы большинством людей, то всего чаще результаты получатся весьма плачевные.

Подведите к дереву ученика, недавно с успехом выдержавшего экзамен из геометрии, и предложите ему измерить его высоту. Почти наверное можно сказать, что он не найдется, как это сделать, хотя у него в десять раз больше геометрических познаний, чем требуется, чтобы решить эту задачу чуть не десятью различными способами. Он без затруднения решает замысловатые задачи «на построение» и «на вычисление», — но только тогда, когда все данные заботливо указаны и самый род задачи известен заранее («на подобие треугольни-

ков»). Если же данные приходится избирать самому и никто не сообщает, к какому отделу геометрии задача относится, — наш геометр беспомощен.

Спросите человека, проходившего геометрию, какое бревно будет тяжелее, — то, которое втрое длиннее данного, или то, которое втрое толще данного? В лучшем случае вы услышите, что оба бревна должны весить одинаково. Большинство же уверено, что длинное тонкое бревно тяжелее короткого[1]). Правильный ответ, что толстое втрое тяжелее, — вы услышите очень редко, даже если опрашиваемые помнят формулу объема цилиндра.

Предложите вопрос: сколько весит вода в игрушечном ведерке, которое вдесятеро

---

[1] При покупке дров бревнами и продавцы, и покупатели склонны до курьеза переоценивать объем длинных бревен; продавцы запрашивают за них несоответственно высокие цены, а покупатели предпочитают именно такие бревна, хотя толстые короткие бревна большего объема охотно уступаются по дешевой цене. Такое же неумение правильно сравнивать объемы тел можно заметить и в расценке яиц, арбузов и т. п.: крупные яйца и арбузы всегда расцениваются — и продавцом, и покупателями — относительно дешевле мелких. Изучение геометрии в школе обычно не изменяет этих курьезных геометрических заблуждений. (См. задачи №№ 13 и 15).



ниже настоящего, вмещающего 30 фунтов[1] воды? Ответы будут в десять и в сто раз больше истинного; а ваше утверждение, что вода в ведерке должна весить всего около 1 лота[2], будет выслушано с недоверием.

Спросите, какой ширины радуга, и вы узнаете, что она представляется большинству «в одну, в полторы сажени[3]»...

Вопрос, сколько могло весить одно яблоко из тех, что сшибли с ног Гулливера в стране великанов, где линейные протяжения

---

[1] 1 фунт = 0,4536 кг.

[2] 1 лот = 12,8 г.

[3] 1 сажень = 1,78 м.

всех предметов в 12 раз больше нормальных, — останется без ответа, а ваше утверждение, что каждое яблоко могло весить пудов[1] 6–8, будет горячо оспорено (см. задачу № 97).

Спросите, какой стакан с кипятком должен остыть раньше, большой или маленький — и вы убедитесь, что редко кто догадывается подойти к этой задаче геометрически.

Даже и в научных сочинениях приходится встречать грубые промахи. В одном руководстве для исследователей по гигиене, составленном видным автором, читаем следующее наставление к пользованию мерной лентой: «Деления ленты начинаются не от самого начала ее, а отступя некоторый промежуток для того, чтобы можно было удобнее и крепче взять ленту рукой. Так, на наших рулетках нулевая точка находится на расстоянии 8 и более сантиметров от края ленты; следовательно, если это упустить из виду, то на это число произойдет ошибка, которая при квадратном измерении поставит 64 см^2, а при кубическом — 512 см^3». Автор не подозревает, что ошибка будет гораздо больше и что он, — откинув те части

[1] 1 пуд = 16 кг.

площади и объема, которые надо было принять в расчет прежде всего, — учел именно то, чем можно было вовсе пренебречь. Если в академической среде возможны такие ошибки, то чего ожидать от прочих людей[1]?).

Чем же объяснить такую печальную геометрическую беспомощность, неумение применить к делу приобретенные в школе геометрические познания? Почему школьная геометрия остается без заметного влияния на умственный обиход и практические навыки людей, ее изучавших?

Объяснение, думается мне, следует искать в особенностях учебного материала математики и в психологии заучивания. Успешное усвоение всякого учебного предмета предполагает:

1) отчетливое понимание его содержания;

2) прочное закрепление его в памяти.

Первое, понимание, возможно лишь при сосредоточении внимания учащегося на предмете, то есть при наличии живого к нему интереса. Второе, запоминание, обеспечивается ассоциациями учебного материала с возможно большим числом

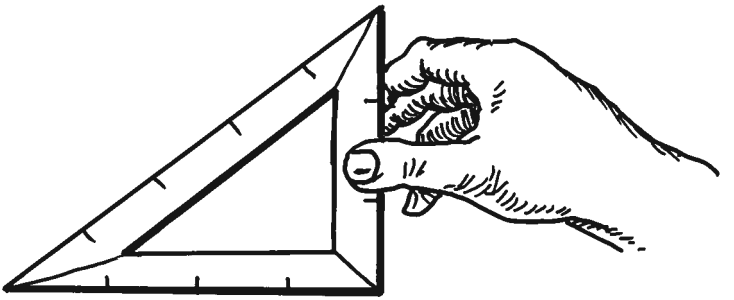
[1] О геометрических ошибках у Пушкина и Гоголя смотри далее, задачи №№ 95 и 96).

представлений из других областей знания и жизни.

Причина особой «трудности» геометрии для большинства учащихся и быстрого ее забвения по оставлении школы кроется в том, что при обучении математике как раз отсутствуют оба указанные условия успешного усвоения: преподавание обычно ведется так, что у учащихся не поддерживается живой интерес к предмету и не создается прочных и разнородных ассоциаций изучаемого материала с остальными элементами их умственного инвентаря.

Какой, в самом деле, интерес может представлять для учащегося изучение геометрии? Прежде всего, ему непонятна цель изучения этого предмета. Перебирая возможные цели преподавания школьной геометрии, мы должны, конечно, исключить такие отвлеченные и непонятные ученику цели, как развитие пространственной интуиции и воспитание логического мышления: цели эти могут ставиться учителем, но для ученика являются лишь результатом изучения геометрии, а не ясно сознаваемой целью. Третья цель — познание свойств геометрических фигур — могла бы служить для учащегося одушевляющим изучение стимулом только в том случае, если бы он ощу-

щал надобность в знании этих свойств. Само же по себе изучение свойств воображаемых фигур, заведомо не существующих в реальной действительности, не может большинству учащихся казаться нужной и осмысленной работой. До тех пор пока в глазах ученика единственное применение свойств геометрических фигур состоит лишь в том, что с помощью них выводятся другие геометрические свойства, которые в свою очередь служат для обоснования новых — нельзя ожидать, чтобы такая неуловимая, уходящая в бесконечность цель могла поддерживать интерес к изучению предмета.



Другое дело, когда учащиеся почти на каждом шагу убеждаются, что знание свойств геометрических фигур с успехом применимо к разрешению многочисленных и разнообразных задач, возникающих в действительной жизни — в обиходе, в технике, в есте-

ствознании. Тогда и только тогда изучение геометрии с первых же уроков приобретает живой интерес для учеников, — при том для всех, а не только для наиболее одаренных одиночек. И если желательно, чтобы прохождение геометрии не было в глазах учащихся бесцельным занятием, лишенным смысла и интереса, необходимо поставить изучение так, чтобы ученик приучался широко и уверенно распоряжаться приобретаемыми геометрическими знаниями для решения разнообразных реальных задач. Он должен чувствовать, что геометрия снабжает его применимыми к жизни сведениями, вооружает могущественным орудием познания действительности.

Все признают, что только с решения задач, то есть, с самостоятельных упражнений, начинается подлинное усвоение математической дисциплины; до этого момента изучение является лишь ознакомлением с учебным материалом. Но те геометрические задачи и упражнения, которым обычно уделяется в школе довольно много внимания, совершенно недостаточны, чтобы помочь ученикам овладеть учебным материалом до степени свободного распоряжения своими знаниями для практических целей, потому что в них практически нацело отсут-

ствуют элементы, связывающие учебник с жизнью и создающие прочные ассоциации изучаемого материала с реальной действительностью. Ученик не упражняется прилагать формальные геометрические отношения к конкретным объектам. Мысль работает исключительно в мире абстрактных образов и утрачивает всякую связь с той реальной действительностью, от которой эти образы абстрагированы[1]. Замыкая геометрический кругозор ученика пределами «чистой» геометрии, школа приучает его решать только

---

[1] До чего доходит пренебрежение элементом реальности даже в хороших учебниках геометрии, видно из следующего характерного примера. В числе полудюжины задач с реальным содержанием, включенных в «Элементы геометрии» Филипса и Фишера, находим три задачи такого рода:

«Некто имеет 323,25 кв. м земли в форме равностороннего треугольника. Каждому из своих трех сыновей он дал три наибольшие равные круга земли, которые можно получить в данном треугольнике; каждой из трех дочерей – угловые участки, отрезанные кругами; трем внукам – участки, заключенные между сторонами и двумя кругами; себе оставил центральный участок между тремя кругами. Найти долю каждого».

Конечно, авторы хорошо знают, что участков такого затейливого фасона никто, находясь в здравом уме, не выкраивает. Но в геометрическом задачнике подобные нелепости считаются вполне допустимыми.

такие задачи, которые искусственно очищены от реального содержания и препарированы в виде обнажённой геометрической схемы. Производить же самостоятельно подобные умственные операции, уметь нащупывать геометрический скелет реальной проблемы — школа ученика не приучает. Естественно, что он не приобретает навыка усматривать геометрические отношения в реальной жизненной обстановке, переводить конкретные задачи на геометрический язык. Давно известно, что правильно формулировать задачу — значит наполовину решить ее, но этой-то первой половины решения всякой конкретной задачи никак не сможет найти учащийся, не подготовленный к тому систематическим упражнением. Благодаря такому направлению в обучении, получается то, что геометрические сведения учащегося ассоциируются не с реальными объектами, а лишь с определенными страницами учебной книги. Такое знание, сохраняющее свежесть только в стенах школы, быстро утрачивается, едва их обладатель вступает в действительный мир, столь мало похожий на искусственную классную обстановку.

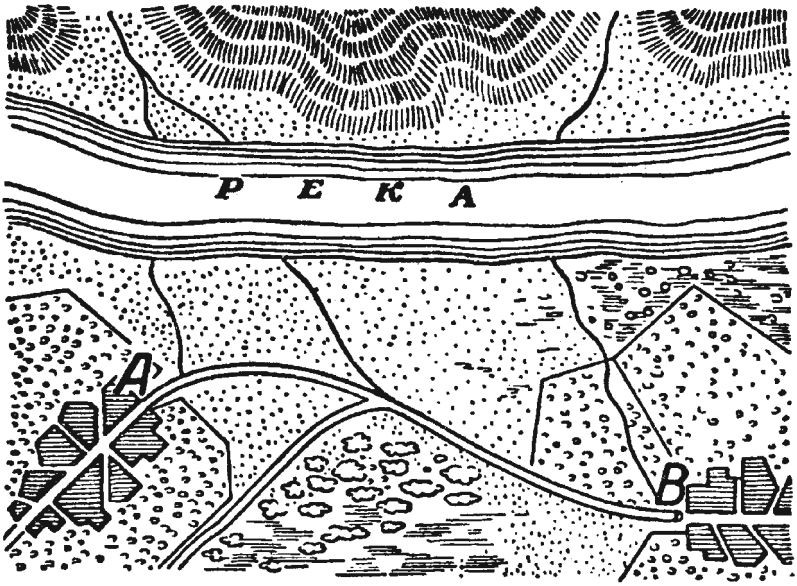
В связи с этим надо поставить и то не случайное обстоятельство, что арифметиче-



ские навыки давно успели проникнуть из школы в жизнь, а геометрические, гораздо более древние, не идут далее школьных стен. Современный средний человек, прошедший элементарную школу, выполняет счетные операции несравненно толковее и проворнее, чем его предок эпохи Средних веков и начала Нового времени. Он уже не откладывает производства деления многозначных чисел до праздничного дня, когда на ярмарке в ближайшем городе можно будет обратиться к услугам странствующего «магистра деления». Между тем, в геометрии современный обыватель мало ушел

вперед по сравнению с глубокой древностью; сельские жители еще и теперь определяют площади непрямоугольных участков буквально с теми же ошибками, какие были обычны в Древнем Египте и в Средневековой Европе.

Нередко высказывается мнение, что преподавание только теоретического курса геометрии при строгой постановке должно дать такое развитие уму учащегося, при котором решение реальных геометрических задач не может составить для него никаких затруднений. Но это убеждение совершенно иллюзорно. Как недостаточно знать устройство велосипеда, чтобы уметь на нем кататься, а надо еще особо учиться ездить, так одно



знание геометрических отношений не дает уменья ими пользоваться в реальной обстановке, если не было упражнения в их применении. И мы наблюдаем на каждом шагу, что поразительное отсутствие реального геометрического чутья, подлинной геометрической наблюдательности прекрасно уживается с наличием достаточно отчетливых теоретических познаний. Все, кто давал себе труд испытать, умеют ли ученики, сильные в школьной геометрии, разрешать задачи практического характера, единодушно подтверждают их полную беспомощность в этом отношении.

Искусство прилагать свои математические познания за пределами ученической тетради и классной доски может быть воспитано лишь систематическим упражнением в решении задач с конкретным содержанием, приближающихся по своей форме к тем, какие возникают в действительной жизни. Отсюда — необходимость пополнить традиционный материал геометрических задачников подбором упражнений особого рода, преследующих указанную цель.

Эти реальные упражнения, помимо своего утилитарного значения — снабжения учащихся полезными практическими навыками — выполняют важную педагогическую

роль: оживляют интерес к геометрии и, порождая многочисленные ассоциации с действительностью, обеспечивают приобретенным знаниям более прочное пребывание в памяти.

Темы для реальных задач должны черпаться из самых разнообразных областей: из житейского обихода, из географии, физики, обществознания, естествоведения; наконец, во время загородных экскурсий или занятий на школьном дворе должны предлагаться задачи и упражнения с данными, взятыми непосредственно в натуре. Опасение, что такого рода упражнения будут отвлекать внимание учащихся от чисто геометрических отношений и даже затемнять их, не более обоснованно, чем для родственной науки — арифметики. Все дело в соблюдении должной меры, в известном педагогическом такте. Разве жизненное содержание арифметических задач затемняет количественные отношения, которые ими иллюстрируются? Да и каким другим способом можно научить применять геометрию на практике, как не упражнениями, относящимися к практике? Наконец — и это особенно надо подчеркнуть — реальное направление в выборе задач вовсе не исключает упражнений формальных. Последние лишь пополняются

задачами с конкретным содержанием. Те и другие должны переплетаться: задачи теоретические иллюстрируются реальными применениями, задачи реальные выдвигают вопросы теоретические[1].

В дальнейших главах рассматривается множество примеров геометрических задач с реальным содержанием, распределенных по сюжетам: задачи из обиходной жизни, из техники и агрономии, из географии и землеведения, из мироведения, из физики, из живой природы; указываются упражнения, выполняемые во время экскурсий; рассматривается и ряд задач особого рода, не укладывающихся в перечисленные рубрики, а также некоторые приемы вычислений, облегчающие решение таких задач. Кроме образцов и тем, прилагаются справочные сведения в качестве сырого материала для упражнений указанного типа.

---

[1] В числе прочих возражений, какие мне доводилось слышать против введения в преподавание геометрии упражнений реального характера, наиболее частое – это ссылка на недостаток времени: отведенных часов едва хватает для прохождения курса, требуемого по программе, и совершенно не остается времени для новых упражнений. Подобные доводы мне непонятны и звучат для меня приблизительно так: некогда заниматься усвоением предмета, так как надо спешить не усваивать его...



ЗАДАЧИ ИЗ ОБИХОДНОЙ ЖИЗНИ

Геометрические задачи с реальным содержанием следует, вообще говоря, предлагать облеченными в ту форму, в какой они возникают в действительности. Но если это не всегда возможно и удобно для задач из области техники и естествознания, где приходится облегчать ученику работу перевода реального задания на геометрический язык, то для упражнений из хорошо знакомой обиходной жизни желательно почти всегда придерживаться указанного правила.

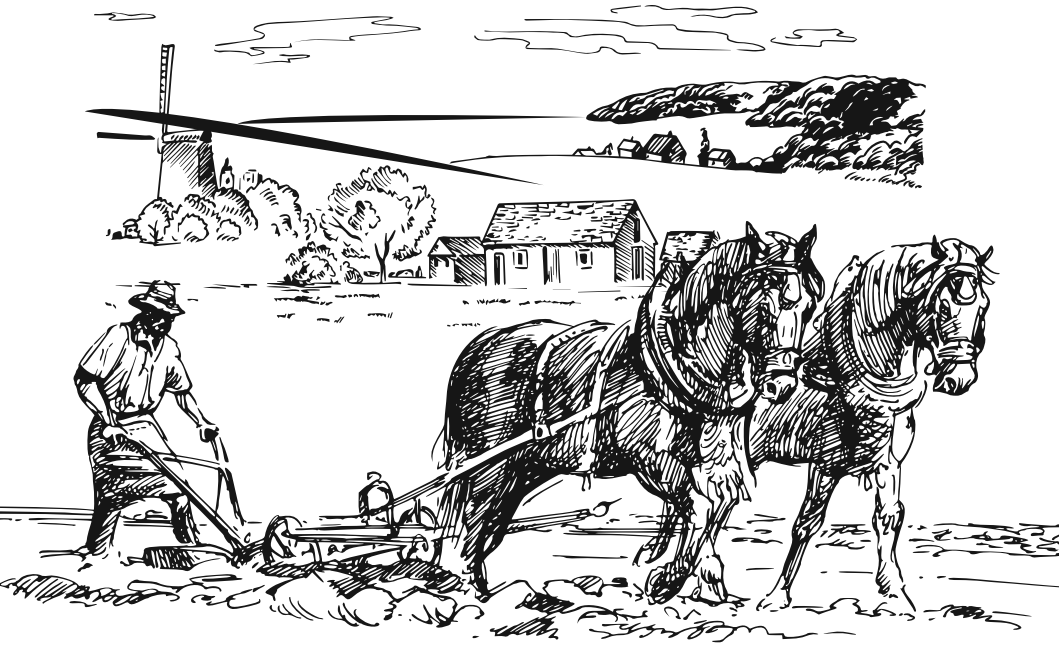
Приведем несколько примеров подобных задач.

1. В каком месте незастроенного треугольного двора нужно поместить фонарь, чтобы все три угла двора были освещены им одинаково?

Решение. Учащийся должен, без указания учителя, сообразить, что задача сводится к разысканию точки, равно удаленной от вершин треугольника.

2. (Вариант предыдущей задачи). В середине трех сторон четырехугольного незастроенного участка имеются ворота. Где внутри двора находится место, одинаково удаленное от всех ворот?

3. При так называемой фигурной пахоте плугом пахарь проводит борозды вдоль межников поля, начиная пахать с краев участка. Становясь у какого-нибудь угла полевого клина, пахарь начинает пахать, отваливая



пласт борозды на соседний участок, и дойдя до другого угла, поворачивает вдоль другой стороны; так обходит он весь участок, возвращаясь к углу, с которого была начата борозда. Вторую борозду он проводит рядом с первою, сваливая пласт в первую борозду. Проводя борозду за бороздой, пахарь подвигается внутрь участка, пока не распашет его до конца. — Можете ли вы приблизительно указать заранее то место внутри треугольного полевого клина, где фигурная пахота должна окончиться?

Решение. Так как отваливаемые пласты одинаковой ширины, то пахота должна окончиться в точке, одинаково удаленной от сторон треугольника.

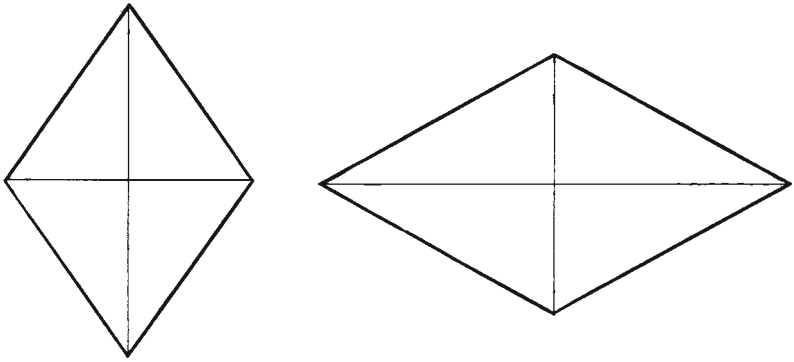
4. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расположенные от его основания не далее его двойной высоты. Где на треугольном участке выгоднее всего поместить громоотвод, чтобы высоту его можно было сделать наименьшею?

Ответ. В центре описанного круга.

5. Вдоль трех сторон многоугольного участка течет канава. Как найти внутри участка место, одинаково удаленное от воды?

Ответ. Искомая точка лежит на пересечении биссектрис двух углов, составляемых направлениями частей канавы.

6. Желая проверить, имеет ли отрезанный кусок материи форму квадрата, швея убеждается, что при перегибании по диагонали края обеих частей совпадают. Достаточна ли такая проверка?



Решение. Недостаточна: указанный прием убеждает лишь в том, что фигура есть четырехугольник, симметричный относительно обеих диагоналей, — а такой симметрией обладает не только квадрат, но и ромб. (Так как указанное заблуждение очень распространено, то полезно выяснить его наглядно, вырезав из бумаги соответствующую фигуру, а также рассмотреть вопрос, какие дополнительные измерения были бы достаточны, чтобы установить квадратную форму

вырезанного куска; предполагается, что углов измерить нельзя).

7. Переплетчик для проверки того, имеет ли вырезанный из картона четырехугольник прямые углы, убеждается, что диагонали его равны. Достаточна ли такая проверка?

Ответ. Недостаточна (начертить четырехугольник с равными диагоналями, но не имеющий прямых углов; какие нужны дополнительные измерения, если не измерять углов?).

8. Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четырехугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали его равны и встречаются под прямым углом. Достаточна ли такая проверка?

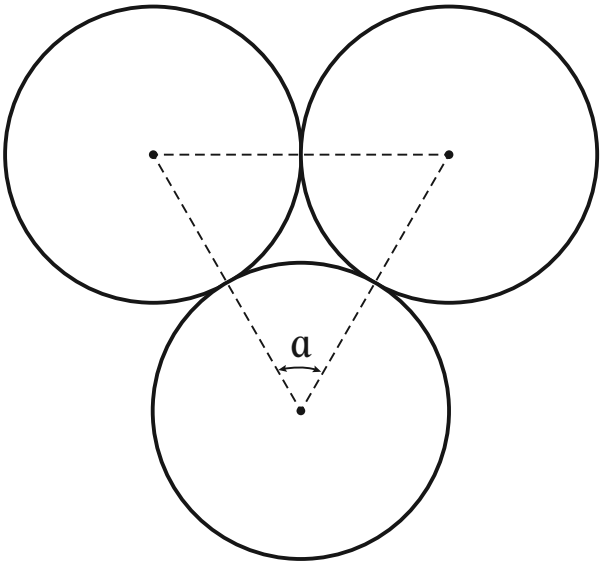
Ответ. Недостаточна (начертить четырехугольник с равными взаимно-перпендикулярными диагоналями, не имеющий прямых углов; какие нужны дополнительные измерения?).

9. Какова приблизительно толщина дерева «в два обхвата»?

Решение. Средняя длина «обхвата», то есть расстояния между концами пальцев расставленных рук, приблизительно равна

средней высоте человеческого роста — $1\frac{3}{4}$ метра[1]. Два обхвата — $3\frac{1}{2}$ метра — есть длина окружности, диаметр которой легко найти: $\frac{7}{2} : \frac{22}{7} = 1\frac{5}{44}$, то есть около 110 см, или $1\frac{1}{2}$ аршина.

10. Стакан вплотную обставлен соприкасающимися с ним и между собою стаканами такой же величины. Сколько их?



Чертеж 1

[1] Это соотношение (канон Леонардо да Винчи) учащимся полезно запомнить, предварительно проверив его непосредственными измерениями.