

НГТУ
НЭТИ

Факультет прикладной
математики
и информатики

А. В. КРАВЧЕНКО
М. В. ШВИДЕФСКИ

# УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

НОВОСИБИРСК
2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. КРАВЧЕНКО, М. В. ШВИДЕФСКИ

# УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 512.57+512.565](075.8)
К772

Рецензенты:
академик РАН *С.С. Гончаров*,
канд. физ.-мат. наук *М.С. Шеремет*

Работа подготовлена на кафедре алгебры и математической логики НГТУ для студентов и аспирантов, интересующихся алгеброй и математической логикой

**Кравченко А.В.**

К772 Универсальная алгебра и теория решеток: учебное пособие / А.В. Кравченко, М.В. Швидефски. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 75 с.

ISBN 978-5-7782-4061-2

В пособии изложены основы универсальной алгебры и теории решеток, разделов математики, находящихся на стыке алгебры и математической логики. От читателя требуется владение основами алгебры в рамках курса «Линейная алгебра», читаемого на I курсе всех факультетов НГТУ.

**УДК 512.57+512.565](075.8)**

**ISBN 978-5-7782-4061-2**

© Кравченко А. В., Швидефски М. В., 2019
© Новосибирский государственный технический университет, 2019

# Оглавление

Введение ..... 5

Глава 1. Начальные понятия теории решеток ..... 7
1. Определения решеток ..... 7
2. Некоторые алгебраические понятия ..... 9
3. Операторы замыкания ..... 13
4. Дистрибутивные и модулярные решетки ..... 22

Глава 2. Основные конструкции универсальной алгебры ..... 29
1. Гомоморфизмы алгебр ..... 29
2. Прямые произведения ..... 33
3. Подпрямые произведения ..... 35
4. Конгруэнции произвольных систем ..... 36
5. Конгруэнц-свойства и условия Мальцева ..... 40
6. Определяющие соотношения ..... 45
7. Прямые и надпрямые пределы ..... 49

Глава 3. Аксиоматизируемые классы ..... 59
1. Полугруппа операторов и порядок на ней ..... 59
2. Характеризация многообразий ..... 60
3. Квазикомпактные классы ..... 61
4. Характеризация квазимногообразий ..... 63
5. Квазимногообразия и невложимость ..... 68
6. Антимногообразия алгебраических систем ..... 71

# Введение

Основным методом универсальной алгебры является выделение общих элементов совершенно различных алгебраических объектов. Это позволяет видеть общие определения и конструкции и единообразно формулировать утверждения, известные в частных случаях как теоремы о группах, кольцах или других классических алгебраических системах.

Важным шагом для развития универсальной алгебры явилось определение Гарреттом Биркгофом *абстрактных алгебр.*

Определение 0.1. Пусть $A$ — произвольное непустое множество. Назовем его *носителем* системы. Пусть $L = F \cup R$ — множество *сигнатурных символов*, т. е. имен операций и отношений на $A$. С каждым элементом $f \in F$ свяжем натуральное число (возможно, ноль), а с каждым элементом $r \in R$ — положительное натуральное число. Такое число называется *арностью* (или *местностью*) символа и соответствующей операции или отношения. Для каждого $f \in F$ определим функцию $f^A : A^n \to A$, а для каждого $r \in R$ — отношение $r^A \subseteq A^n$, где $n$ — арность соответствующего символа.

Множество $A$ с определенной на нем структурой $\{f^A : f \in F\} \cup \{r^A : r \in R\}$ называется *алгебраической системой* и обозначается $\mathcal{A}$ или $(A; \sigma)$.

Это современное общепринятое определение незначительно отличается от исходного (например, определение Биркгофа допускало частичные операции и операции бесконечной арности, а

сигнатура предполагалась алгебраической, т. е. не содержащей символов отношений).

Определения классических алгебраических систем оказываются частными случаями определения 0.1:

*группоиды* — это системы с бинарной операцией $\cdot$;

*полугруппы* — это группоиды с ассоциативной операцией $\cdot$;

*моноиды* — это системы сигнатуры $\{\cdot^2, 1\}$ такие, что $(A; \cdot)$ — полугруппа, а 1 — константа для нейтрального элемента;

*группы* — это системы сигнатуры $\{+^2, -^1, 0\}$ с ассоциативной бинарной операцией $+$, унарной операцией $-$ взятия обратного элемента выделенным элементов (константой) 0 для нейтрального элемента;

*кольца* — это системы сигнатуры $\{+^2, \cdot^2, -^1, 0\}$ такие, что $(A; +, -, 0)$ — абелева группа, $(A; \cdot)$ — полугруппа, и выполняются правый и левый законы дистрибутивности для операций сложения и умножения;

*модули над кольцами*, *решетки*, *булевы алгебры*, *частично упорядоченные множества*, *графы* и т. д.

В главе 1 мы познакомимся с алгебраическими системами, возникающими в различных областях математики. Это решетки. Они позволяют описывать иерархии объектов (решетки подпространств, решетки замкнутых подмножеств, решетки конгруэнций и т. п.) и, как многие классические алгебры, обладают достаточно интересной структурной теорией.

В главе 2 мы вернемся к произвольным алгебраическим системам и познакомимся с общими понятиями подсистемы, изоморфизма, гомоморфизма, произведений и пределов систем. Эти основные конструкции приводят к понятию операторов на классах систем и позволяют описывать классы, аксиоматизируемые формулами специальных видов.

В главе 3 мы встретимся с хорошо изученными специальными аксиоматизируемыми классами (многообразиями и квазимногообразиями) и познакомимся с описаниями таких классов в терминах замкнутости относительно операторов и с помощью предложений специального вида.