

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Часть 2

Москва 2022

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

В двух частях

ЧАСТЬ 2

Под редакцией А. Л. Чекина

МПГУ
Москва • 2022

УДК 378(075.8):[51+002]
ББК 22.1я73+32.81я73
М34

DOI: 10.31862/9785426310612

Рецензенты:

А. Г. Леонов, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

А. И. Лебо, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики в начальной школе Института детства ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»

Авторы:

А. Л. Чекин, Л. Л. Босова, А. А. Локшин, А. С. Добротворский, О. В. Бахтина, Е. А. Иванова, Н. Н. Лаврова, В. В. Тимошенко

Математика и информатика : в 2 частях. Часть 2 : учебное пособие / под ред. А. Л. Чекина. – Москва : МПГУ, 2022. – 344 с. : ил.
М34 ISBN 978-5-4263-1061-2

Учебное пособие предназначено для студентов факультетов начального образования педагогических вузов, обучающихся по образовательной программе бакалавриата по направлению 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Начальное образование») и направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) при условии, что первым профилем является профиль «Начальное образование». Во вторую часть пособия включены материалы, соответствующие разделам программы, которые относятся к изучению чисел (неотрицательных целых, целых, положительных рациональных), величин (положительных скалярных) и элементов геометрии (на основе геометрических преобразований). Каждая глава кроме адаптированного теоретического материала содержит еще и достаточно большой перечень задач, которые можно использовать на практических занятиях.

УДК 378(075.8):[51+002]
ББК 22.1я73+32.81я73

ISBN 978-5-4263-1061-2
DOI: 10.31862/9785426310612

© МПГУ, 2022
© Коллектив авторов, текст, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 9

ГЛАВА 1.
КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ
НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ 12

1.1. Конечные множества 13

1.2. Определение целого неотрицательного числа 16

1.3. Сложение целых неотрицательных чисел 17

1.4. Важнейшие свойства сложения: коммутативность и ассоциативность 18

1.5. Отношение «меньше» и его важнейшие свойства 18

1.6. Связь отношения «меньше» со сложением 19

1.7. Сократимость сложения 21

1.8. Вычитание. Обратность вычитания к сложению. Монотонность вычитания 21

1.9. Дальнейшие свойства вычитания 23

1.10. Упорядочение множества N_0 26

1.11. Умножение: коммутативность и ассоциативность 28

1.12. Умножение: дистрибутивность, монотонность, сократимость 32

1.13. Деление как операция, обратная умножению 34

1.14. Деление с остатком 37

1.15. Деление на равные части (с остатком) 39

1.16. Деление по содержанию (с остатком) 41

Задачи к главе 1 42

Литература к главе 1 43

ГЛАВА 2.
ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ
И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ
ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 44

2.1. Десятичная система 44

2.2. Существование десятичной записи натурального числа 45

2.3. Сравнение натуральных чисел в десятичной записи 47

2.4. Единственность десятичной записи натурального числа 49

2.5. Алгоритм сложения столбиком (обоснование «с опорой на множества») 49

2.6. Алгоритм сложения столбиком (арифметическое обоснование) 52

2.7. Алгоритм вычитания столбиком (обоснование «с опорой на множества») 53

2.8. Обоснование алгоритма умножения столбиком 55

2.9. Обоснование алгоритма деления уголком («с опорой на множества») 59

2.10. Выводы 61

2.11. Добавление. О переводе обыкновенных дробей в десятичные 63

Литература к главе 2 65

ГЛАВА 3.
СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ 67

3.1. Из истории возникновения систем счисления 67

3.2. Непозиционные системы счисления 73

3.3. Система счисления Древней Руси 75

3.4. Позиционные системы счисления 79

3.5. Недесятичные позиционные системы счисления 83

3.6. Арифметические действия в недесятичных позиционных системах счисления 87

3.7. Переход от одной позиционной системы счисления к другой 91

3.8. Особенности устной нумерации в различных системах счисления 93
Задачи к главе 3 96
Литература к главе 3 98

ГЛАВА 4.
ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ 99

4.1. Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел и его простейшие свойства 99
4.2. Делимость суммы, разности и произведения целых неотрицательных чисел 100
4.3. Деление с остатком и отношение делимости 101
4.4. Признаки делимости 103
4.5. Простые и составные числа 105
4.6. Решето Эратосфена 107
4.7. Бесконечность множества простых чисел 110
4.8. Основная теорема арифметики 111
4.9. Мультипликативная структура делителя натурального числа 114
4.10. Наибольший общий делитель 115
4.11. Наименьшее общее кратное 117
4.12. Нахождение НОД и НОК двух чисел с помощью канонических разложений 118
4.13. Некоторые свойства НОД и НОК двух чисел 119
4.14. Основное свойство НОД и НОК двух чисел 120
4.15. Алгоритм Евклида нахождения НОД двух чисел 123
Задачи к главе 4 125
Литература к главе 4 127

ГЛАВА 5.
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА КАК ОПЕРАТОРЫ 128

5.1. Натуральные числа как операторы, действующие на системе направленных отрезков 128

5.2. Сложение дробей и сложение рациональных чисел 131
5.3. Отношение «меньше» на множестве Q_+ 132
5.4. Вычитание в Q_+ 133
5.5. Умножение дробей и умножение рациональных чисел 133
5.6. Деление в Q_+ 134
5.7. Соизмеримость и несоизмеримость 135
5.8. Аддитивность и мультипликативность меры в Q_+ 136
5.9. Десятичные дроби 137
Задачи к главе 5 142
Литература к главе 5 144

ГЛАВА 6.
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА КАК ОПЕРАТОРЫ 145
6.1. Предварительные соглашения 146
6.2. Оператор «ноль» и оператор «–1» 146
6.3. Противоположные числа. Определение множества целых чисел 147
6.4. Умножение в Z 147
6.5. Деление в Z 148
6.6. Сложение в Z 149
6.7. Вычитание в Z 150
6.8. Дистрибутивность умножения относительно сложения 150
6.9. Отношение «меньше» на множестве целых чисел. Связь со сложением 151
6.10. Отношение «меньше» на множестве целых чисел. Связь с умножением 151
Задачи к главе 6 152
Литература к главе 155

ГЛАВА 7.
ВЫРАЖЕНИЯ, РАВЕНСТВА, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА . . 157
7.1. Числовые выражения 157

7.2. Числовые равенства 159
7.3. Числовые неравенства 161
7.4. Выражения с переменной. Тождественно равные выражения 162
7.5. Уравнения с одной переменной 164
7.6. Неравенства с одной переменной 168
7.7. Системы и совокупности уравнений и неравенств с одной переменной 171
7.8. Системы уравнений с двумя переменными 173
7.9. Графическое решение уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем 174
Задачи к главе 7 177

ГЛАВА 8.
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ 193
8.1. Преобразования множества 193
8.2. Декартовы координаты на плоскости 200
8.3. Различные виды уравнений прямой на плоскости в аффинном репере 209
8.4. Применение координатного метода к решению задач 217
8.5. Метод координат и некоторые геометрические места точек (ГМТ) 222
8.6. Геометрические задачи на построение. Метод геометрических мест точек 226
8.7. Преобразования евклидовой плоскости и их свойства 230
Литература к главе 8 287

ГЛАВА 9.
ВЕЛИЧИНЫ 288
9.1. Основные определения 288
9.2. Аксиомы А.Н. Колмогорова 289
9.3. Длина 290
9.4. Масса 293

9.5. Время. Длительность отрезка времени 294
9.6. Угол. Величина угла 297
9.7. Площадь 299
9.8. Объем 302
9.9. Скорость как производительность 304
9.10. Стоимость 306
9.11. Цена 307
9.12. Цена (продолжение) 308
Задачи к главе 9 309
Литература к главе 9 309

ГЛАВА 10.
ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НА ГРАФАХ 311
10.1. Основные понятия 311
10.2. Использование графов при решении задач 316
10.3. Графы и таблицы 319
10.4. Поиск количества путей в ориентированном графе 324
10.5. Алгоритмы нахождения кратчайших путей между вершинами графа 325
10.6. Графы и теория игр 330
Задачи к главе 10 334
Литература к главе 10 342

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой коллективный труд преподавателей кафедры математики и информатики в начальной школе факультета начального образования Института детства ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), созданный на основе многолетнего опыта работы авторов по подготовке будущих учителей начальных классов в предметной области «Математика и информатика», которая в настоящее время осуществляется по образовательным программам по направлению 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Начальное образование») и направлениям 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) при условии, что первым профилем является профиль «Начальное образование».

Вторая часть пособия состоит из десяти глав, которые дополняют содержание первой части настоящего пособия, делая его завершенным и полностью отвечающим современным задач профессиональной подготовки будущих учителей начальных классов в той предметной области, которая и значится в качестве названия этой учебной книги.

Глава 1 «Количественная теория целых неотрицательных чисел» (авторы – А.А. Локшин, Е.А. Иванова, А.С. Добротворский) посвящена рассмотрению центрального вопроса всего изучаемого курса – построению системы целых неотрицательных чисел на основе теоретико-множественного подхода. Важность этой теории определяется тем, что она лежит в основе арифметической содержательной линии практически всех действующих программ начального курса математики (исключение составляют лишь программы, базирующиеся на идеях Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова).

Глава 2 «Десятичная система счисления и арифметические алгоритмы с точки зрения теории множеств» (авторы – А.А. Локшин,

Е.А. Иванова) интересна тем, что впервые в учебных пособиях данного направления обосновано устройство десятичной системы счисления и хорошо знакомых алгоритмов арифметических действий на основе количественной теории.

В главе 3 «Системы счисления» (автор – А.Л. Чекин) рассматриваются общие вопросы возникновения и развития различных систем нумерации чисел, дается сравнительный анализ позиционных и непозиционных систем счисления, подробно рассматриваются недесятичные позиционные системы счисления, что оказывает важное положительное влияние на понимание основных принципов устройства общепринятой десятичной системы.

Глава 4 «Делимость целых неотрицательных чисел» (автор – А.Л. Чекин) посвящена рассмотрению основных вопросов теории делимости целых неотрицательных чисел, знание которых позволит будущему учителю начальных классов с пониманием ориентироваться в арифметической составляющей начального курса математики, включая основную теорему арифметики.

В главе 5 «Положительные рациональные числа как операторы» (автор – А.А. Локшин) изложен операторный подход к построению системы положительных рациональных чисел в авторском изложении.

В главе 6 «Целые числа как операторы» (авторы – А.А. Локшин, Е.А. Иванова, Н.Н. Лаврова) продолжена реализация операторного подхода, но уже к построению системы целых чисел. Это позволяет дать более понятное обоснование правилам выполнения арифметических действий на множестве целых чисел.

Глава 7 «Выражения. Уравнения. Неравенства» (автор – Н.Н. Лаврова) посвящена рассмотрению алгебраических вопросов, которые в той или иной степени проецируются на начальный курс математики.

В главе 8 «Геометрические преобразования плоскости» (автор – В.В. Тимошенко) изложены программные вопросы геометрического характера на основе понятия геометрического преобразования плоскости. Материал данной главы дает представление о том, как принято выстраивать изложение материала в учебниках для математических специальностей.

В главе 9 «Величины» (авторы – А.А. Локшин, О.В. Бахтина) рассмотрены вопросы теории положительных скалярных величин. При этом набор изучаемых величин определяется принадлежностью той или иной величины к программному содержанию начального курса математики.

Глава 10 «Информационные модели на графах» (автор – Л.Л. Босова) является заключительной. В ней изложены основные вопросы теории графов, которые имеют прямое отношение к задачам в области информатики, в частности к построению информационных моделей.

Каждая глава завершается достаточно обширным перечнем задач по соответствующей проблематике, а также списком рекомендуемой литературы. Задачи целесообразно использовать на практических занятиях в процессе работы по данному учебному пособию.

А.Л. Чекин

ГЛАВА 1.
КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Книга [1] вплоть до недавнего времени была одним из немногих пособий по математике для будущих учителей начальных классов, где подробно излагалась количественная теория целых неотрицательных чисел (базирующаяся на элементарной теории множеств). Это учебное пособие, изданное в 1998 году, стало в настоящее время библиографической редкостью.

В других существующих математических пособиях, ориентированных на ту же читательскую аудиторию, обычно подробно излагается не количественная, а порядковая теория целых неотрицательных чисел (базирующаяся на аксиоматике Пеано), а количественной теории уделяется значительно меньше внимания.

В чем же причина столь явного превалирования теории Пеано над количественной теорией? Все дело в том, что, не выходя за пределы «наивного» теоретико-множественного подхода, не удается строго обосновать некоторые математические факты, прежде всего, доказать теорему о конечности объединения двух конечных множеств. Именно преимуществом в строгости изложения и объясняется упомянутая выше сложившаяся ситуация.

Парадокс, однако, заключается в том, что у учителей начальных классов существует объективная потребность именно в количественной теории. Дело в том, что, объясняя ребенку смысл понятия натурального числа, учитель неизбежно обращается к врожденному «чувству количества», проявляющемуся даже у детей шестимесячного возраста. И если младшему школьнику можно при этом обойтись без понятия «множество», то учителю необходима теоретико-множественная база, опираясь на которую он будет давать уверенные объяснения и ответы на вопросы учеников.

Упомянутый выше парадокс проявляется особенно ярко при знакомстве со свойствами арифметических операций, в частности коммутативностью и ассоциативностью сложения. В количественной теории эти свойства в буквальном смысле слова очевидны (фактически следуют из коммутативности и ассоциативности логических союзов «и», «или»); в аксиоматической (порядковой) теории Пеано доказательства этих свойств сложения занимают не меньше, чем полстраницы каждое. Нет никакого сомнения в том, что внутреннюю опору при рассказе ученикам о свойствах сложения учитель будет искать именно в количественной теории, а не в порядковой.

Преодоление возникшего парадокса, предложенное в [1], заключается в том, что будущий учитель начальных классов не нуждается в курсе математики в тотальной математической строгости доказательств, но, несомненно, нуждается в ясности и обоснованности выводов «на уровне здравого смысла».

В этой главе представлено сокращенное и переработанное изложение подхода, развитого в [1]. Мы старались избегать длинных доказательств, по возможности заменяя их перечислением наиболее существенных «опорных» соображений. По сравнению с [1] видоизменен подход к понятию «конечное множество»; кроме того, по-другому представлена тема «Деление», предложен ряд новых задач.

1.1. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Количественная теория целых неотрицательных чисел (ц.н.ч.), которую мы собираемся построить, базируется на понятии конечного множества.

Определение 1.1. («Физический» уровень строгости; см. [1]). Будем по очереди ставить мысленные метки на элементы некоторого непустого множества A и будем делать это с постоянной скоростью. Если к некоторому моменту времени обнаружится, что все элементы множества A снабжены нашими мысленными метками, то такое множество назовем *конечным*. Пустое множество $\emptyset$ по определению считается конечным.

Замечание. С математической точки зрения дефект определения 1.1 в том, что используются понятия «время» и «скорость», для общепринятого введения которых уже необходимо располагать понятием числа. (А мы еще только собрались строить систему целых неотрицательных чисел.)

Можно, впрочем, в определении 1.1 обойтись интуитивным понятием времени и считать, что:

а) наблюдатель (который подразумевается в определении 1.1) переворачивает песочные часы каждый раз после того, как поставит мысленную метку на какой-нибудь элемент множества A;

б) в течение интервала времени, отмеряемого песочными часами, наблюдатель обязательно ставит мысленную метку на какой-нибудь не отмеченный ранее элемент множества A.

Тогда вышеупомянутые претензии к определению 1.1, очевидно, отпадут. (Тем не менее использование интуитивного понятия времени представляется с точки зрения чистой математики нарушением строгости изложения.)

Теорема 1.1. *Пусть A – непустое конечное множество. Тогда A не равномощно никакому своему подмножеству B, отличному от A.*

Доказательство. Пусть некоторое множество A конечно в смысле определения 1.1. Очевидно, что время, затрачиваемое наблюдателем для расстановки меток на элементах множества A, не зависит от порядка, к котором расставляются метки. Отсюда сразу следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Известный математик Р. Дедекинд (1831–1916), один из создателей теории вещественных чисел, предложил следующее определение непустого конечного множества.

Определение непустого конечного множества по Р. Дедекинду. *Непустое множество A конечно, если оно не равномощно никакому своему подмножеству, не совпадающему с A.*

Таким образом, проведенное выше на физическом уровне строгости доказательство теоремы 1.1 представляет собой не что иное, как вывод постулированного Дедекиндом свойства конечных множеств.

Подчеркнем, что именно математически строгое определение Дедекинда является общепринятым в научной литературе; мы, однако, будем строить наше изложение на определении 1.1.

Изложение количественной теории ц.н.ч., основанное на определении Дедекинда, можно найти в [1], [2].

Утверждение 1.1. *Множество, равномощное конечному, само конечно.*

Утверждение 1.2. *Любое подмножество конечного множества тоже конечно.*

Утверждение 1.3. *Объединение двух конечных множеств само является конечным множеством.*

Справедливость всех трех утверждений сразу следует из определения 1.1.

Утверждение 1.4. *Пусть A и B – два конечных множества. Тогда по крайней мере одно из них равномощно некоторому подмножеству другого.*

Доказательство. Попросим наблюдателя (см. замечание к определению 1.1), ставящего мысленные метки на элементы конечных множеств, начать ставить свои метки одновременно на элементы множеств *A* и *B*. Очевидно, что процедура постановки таких меток закончится в некоторый момент времени, причем реализуется одна из следующих двух ситуаций:

а) Одновременно исчерпаются элементы обоих множеств *A* и *B*; при этом множества *A* и *B* оказываются равномощными. Тем самым справедливость утверждения 1.4 в этом случае установлена.

б) В одном из множеств *A*, *B* элементы исчерпаются раньше, чем в другом. Справедливость доказываемого утверждения в этом случае также очевидна.

Утверждение 1.5. *Декартово произведение двух конечных множеств конечно.*

Утверждение 1.5 также можно доказать, опираясь на определение 1.1. Мы предоставляем эту возможность читателю.

Задачи. 1. Доказать утверждение 1.1, опираясь на определение конечного множества, данное Дедекиндом.

2. Доказать утверждение 1.2, опираясь на определение конечного множества, данное Дедекиндом.

3*. Опираясь на определение конечного множества, данное Дедекиндом, доказать, что объединение конечного множества A и одноэлементного множества $\{x\}$ конечно.

3. Верно ли, что пересечение двух конечных множеств обязательно конечно?

4. Верно ли, что разность двух конечных множеств всегда конечна?

5. Пусть A – конечное множество, а множество B – *бесконечно* (т.е. не является конечным). Конечна или бесконечна разность $A \setminus B$?

6. Пусть A – конечное множество, а множество B – бесконечно. Конечна или бесконечна разность $B \setminus A$?

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОГО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Определение 1.2. Пусть A – некоторое непустое конечное множество. Рассмотрим класс a всех конечных множеств, равномощных множеству A. Этот класс мы назовем *натуральным числом* (числом a). При этом число a будем называть *численностью* множества A.

Определение 1.3. Класс всех конечных множеств, равномощных пустому множеству $\emptyset$, назовем числом «*ноль*» (0). (Нетрудно понять, что этот класс не содержит в качестве своего элемента никакого другого множества, кроме $\emptyset$.) Ноль по определению является численностью пустого множества.

В общем случае тот факт, что a есть численность конечного множества A, будем записывать в виде $a = n(A)$.

Множество всех натуральных чисел будем обозначать через N.

Множество $N_0 = N \cup \{0\}$ назовем множеством *целых неотрицательных чисел.*

Каждый элемент множества N_0 будем называть *целым неотрицательным числом* (*ц.н.ч.*).

Замечание. Два целых неотрицательных числа a и b считаются равными ($a = b$), если они обозначают один и тот же класс

равномощных друг другу конечных множеств. Таким образом, равенство двух ц.н.ч. – это их совпадение.

Иногда можно услышать вопрос: зачем нужны два разных обозначения для одного и того же класса? Ответ на этот вопрос состоит в следующем. Во многих случаях заранее (до проведения вычислений) невозможно сказать, имеют ли два числовых выражения одно и то же числовое значение или нет. Поэтому обозначают числовые значения таких выражений с помощью разных букв (например, a и b). Если выясняется, что числовые значения обоих рассматриваемых выражений совпадают, то пишут $a = b$.

1.3. СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.4. Суммой $a + b$ двух целых неотрицательных чисел a и b называется численность объединения конечных множеств A и B таких, что

$$a = n(A),\ b = n(B),\ A \cap B = \emptyset. \tag{1.1}$$

Иными словами,

$$a + b = n(A \cup B), \tag{1.2}$$

где конечные множества A и B удовлетворяют условиям (1.1).

Это определение и определение целого неотрицательного числа вместе образуют фундамент всей количественной теории ц.н.ч.

Задача. Доказать, что приведенное выше определение суммы двух ц.н.ч. не зависит от выбора конечных множеств A и B, удовлетворяющих условиям (1.1).

Замечание. У нас остался невыясненным вопрос: всегда ли можно найти в классах a и b непересекающиеся множества A и B? Следуя [1], мы будем считать, что ответ на этот вопрос всегда положителен «ввиду многообразия нашего мира». Тем самым мы снова обращаемся к аргументам «физического» характера.

Замечание. В силу сказанного выше мы имеем все основания считать, что сумма двух произвольно взятых ц.н.ч. определена, и притом единственным образом.

1.4. ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ: КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ

Теорема 1.2. (О коммутативности сложения в N_0). *Для любых двух ц.н.ч. a и b*

справедливо равенство:

$$a + b = b + a. \tag{1.3}$$

Доказательство. Равенство (1.3) сразу следует из определения 1.4 и коммутативности операции объединения множеств.

Теорема 1.3. (Об ассоциативности сложения в N_0). *Для любых трех ц.н.ч. a, b, c*

справедливо равенство:

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{1.4}$$

Доказательство. Равенство (1.4) непосредственно следует из определения 1.4 и ассоциативности операции объединения множеств.

1.5. ОТНОШЕНИЕ «МЕНЬШЕ» И ЕГО ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Определение 1.5. Пусть *a и b* – числа из N_0. Будем говорить, что *a меньше, чем b* (и писать $a < b$), если найдутся конечные множества A и B с численностями *a и b* соответственно и такие, что выполнено строгое включение $A \subset B$.

Теорема 1.4. (О *транзитивности* отношения «меньше»). *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $a < b$, $b < c$. Нетрудно видеть, что тогда можно найти конечные множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем выполнены строгие включения:

$$A \subset B, B \subset C \tag{1.5}$$

(докажите!). Однако в силу транзитивности строгого включения множеств имеем из (1.5)

$$A \subset C,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 1.5. (Об *антирефлексивности* отношения «меньше»). *Для любого a из* N_0 *неверно, что* $a < a$.

Доказательство. См. теорему 1.1.

Теорема 1.6. (О *связности* отношения «меньше»). *Пусть a и b – числа из* N_0, *причем* $a \neq b$. *Тогда имеет место по крайней мере одно из двух соотношений:*

$$a < b,\ b < a. \qquad (1.6)$$

Доказательство. См. утверждение 1.4.

Теорема 1.7. (Об *асимметричности* отношения «меньше»). *Пусть a и b – числа из* N_0, *причем* $a \neq b$. *Тогда одновременно оба соотношения* (1.6) *выполняться не могут*.

Доказательство. Утверждение этой теоремы сразу следует из теорем 1.4 и 1.5.

Замечание. Совокупность установленных выше свойств отношения «меньше» (транзитивность, антирефлексивность, связность, асимметричность) позволяет говорить об отношении «меньше» как об *отношении строгого линейного порядка.*

Замечание. Наряду с отношением «меньше» вводятся также отношения «меньше или равно», «больше», «больше или равно»:

а) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ *или* $a = b$;

б) $a > b \Leftrightarrow b < a$;

в) $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ *или* $a = b$.

Задачи. 1. Верно ли, что $7 \geq 2$?

2. Верно ли, что $7 \geq 12$?

3. Верно ли, что $5 \leq 3$?

4. Верно ли, что $5 \leq 13$?

5. Верно ли, что 5 не меньше 4?

6. Верно ли, что 4 не больше 5?

1.6. СВЯЗЬ ОТНОШЕНИЯ «МЕНЬШЕ» СО СЛОЖЕНИЕМ

Теорема 1.8. *Пусть a и b – числа из* N_0. *Тогда*

$$a < b \Leftrightarrow \text{существует такое } w \in N, \text{ что } a + w = b. \qquad (1.7)$$

Доказательство. См. определение отношения «меньше» и определение сложения в N_0.

Теорема 1.9. (О монотонности сложения). Пусть a, b, c – *числа из* N_0. *Тогда*

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c. \quad (1.8)$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем $A \subset B$, $C \cap B = \emptyset$. Теперь, вспоминая определение понятия «меньше», заключаем, что утверждение теоремы геометрически очевидно.

Доказательство арифметическое. Пусть $a < b$; тогда в силу (1.7) найдется такое $w \in N$, что

$$a + w = b.$$

Прибавим c к обеим частям этого равенства, получим

$$(a + w) + c = b + c,$$

откуда, пользуясь ассоциативностью и коммутативностью сложения, имеем:

$$(a + c) + w = b + c.$$

В силу теоремы 1.8 из последнего равенства вытекает искомое неравенство

$$a + c < b + c.$$

Теорема 1.10. *Пусть* a, b, c, d *– числа из* N_0. *Тогда*

$$a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d. \quad (1.9)$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера четыре конечных множества A, B, C, D численности которых равны соответственно a, b, c, d, причем $A \subset B$, $C \subset D$, $B \cap D = \emptyset$. Теперь, вспоминая определение сложения и определение понятия «меньше», заключаем, что утверждение теоремы геометрически очевидно.

Доказательство арифметическое. Пусть $a < b$, $c < d$. Имеем в силу монотонности сложения:

$$a + c < b + c,$$
$$c + b < d + b,$$

откуда, пользуясь коммутативностью сложения и транзитивностью отношения «меньше», получаем требуемый результат.

1.7. СОКРАТИМОСТЬ СЛОЖЕНИЯ

Теорема 1.11. (О сократимости сложения). *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b. \tag{1.10}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть $a + c = b + c$, но $a \neq b$. Тогда в силу связности отношения меньше обязательно должно быть $a < b$ или $b < a$. Прибавляя c к каждому из этих неравенств, получим, что должно соответственно быть

$a + c < b + c$ или $b + c < a + c$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием.

Теорема 1.12. *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a + c < b + c \Rightarrow a < b. \tag{1.11}$$

Доказательство этой теоремы также может быть проведено от противного, аналогично доказательству теоремы 1.11.

1.8. ВЫЧИТАНИЕ. ОБРАТНОСТЬ ВЫЧИТАНИЯ К СЛОЖЕНИЮ. МОНОТОННОСТЬ ВЫЧИТАНИЯ

Определение 1.6. Пусть a и b – числа из N_0 такие, что $b \leq a$. Тогда, очевидно, найдутся

конечные множества A и B такие, что

$$n(A) = a,\ n(B) = b, \tag{1.12}$$

$$B \subseteq A. \tag{1.13}$$

Разностью чисел a и b назовем численность разности множеств A и B. Иными словами,

$$a - b = n(A \setminus B). \tag{1.14}$$

Число a называется при этом *уменьшаемым*, а число b – *вычитаемым*.

Замечание. Опираясь на теорему 1.1, нетрудно показать, что определение разности чисел a и b не зависит от выбора конечных множеств A и B, удовлетворяющих условиям (1.12), (1.13). Иными словами, разность (1.14) определена единственным образом.

Замечание. Продемонстрируем важность условия (1.13) на примере. Пусть A – множество численности 2, а B – множество численности 1, и пусть A и B не пересекаются. Тогда $A \setminus B = A$, и мы получаем, что

$$n(A \setminus B) = n(A) = 2 \neq 2 - 1.$$

Замечание. Подчеркнем, что, в отличие от сложения, операция вычитания выполнима в N_0 не для всех пар ц.н.ч., а только для таких пар (a, b), где $b \le a$.

Теорема 1.13. (Об обратности вычитания к сложению). *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a - b = c \Leftrightarrow a = c + b. \tag{1.15}$$

Доказательство. См. определения 1.4 и 1.6.

Утверждение. *Пусть a и b – числа из N_0 такие, что $b \le a$. Тогда*

$$(a - b) + b = a. \tag{1.16}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера конечные множества A и B, удовлетворяющие условиям (1.12), (1.13). Теперь доказываемое утверждение сразу следует из независимости определения суммы ц.н.ч. от выбора соответствующих непересекающихся множеств (а именно, множеств $A \setminus B$ и B).

Доказательство арифметическое. В силу теоремы 1.13 доказываемое равенство (1.16) равносильно очевидному равенству

$$(a - b) = a - b.$$

Тем самым справедливость (1.16) доказана.

Утверждение. *Пусть a и b – числа из N_0. Тогда*

$$(a + b) - b = a. \tag{1.17}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера конечные непересекающиеся множества A и B, удовлетворяющие условиям (1.12). Теперь доказываемое утверждение сразу следует из независимости определения разности ц.н.ч. от выбора соответствующих множеств (в нашем случае речь идет о множествах $A \cup B$ и B).

Доказательство арифметическое. В силу теоремы 1.13 доказываемое равенство (1.17) равносильно очевидному равенству

$$(a + b) = a + b.$$

Тем самым справедливость (1.17) доказана.

Теорема 1.14. (О монотонности вычитания). *Пусть a, b, c – числа из N_0 и пусть, кроме того, $a \ge c$. Тогда*

$$a < b \Longrightarrow a - c < b - c. \tag{1.18}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем $C \subseteq A \subset B$. Дальнейшее очевидно.

Доказательство арифметическое. Предположим противное, а именно, что $a < b$, но (1.18) не выполнено. Тогда в силу связности отношения «меньше» должно быть

$$a - c = b - c \text{ либо } b - c < a - c.$$

В каждом из двух возможных случаев, прибавляя c к обеим частям соответствующего полученного соотношения и пользуясь равенством (1.16), приходим к противоречию с условием.

Задача. Пусть a, b, c, d – числа из N_0, и пусть $a < b$, $c > d$. Доказать двумя способами, что

$$a - c < b - d.$$

1.9. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВЫЧИТАНИЯ

Теорема 1.15. (О вычитании числа из суммы). *Пусть a, b, c – числа из N_0, тогда*

$$(a + b) - c = a + (b - c) \tag{1.19}$$

(*предполагается, что $b \geq c$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем

$$A \cap B = \emptyset, C \subseteq B. \tag{1.20}$$

Нетрудно видеть, что при условии (1.20) справедливо равенство

$$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C),$$

откуда с учетом (1.20) легко следует утверждение теоремы.

Задача. Доказать (1.19) арифметическим способом, опираясь на доказанные ранее свойства сложения и обратность вычитания к сложению.

Теорема 1.16. (О вычитании суммы из числа). *Пусть a, b, c – числа из N_0, тогда*

$$a - (b + c) = (a - b) - c \tag{1.21}$$

(*предполагается, что $a \geq b + c$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем

$$B \cap C = \emptyset,\ B \cup C \subseteq A. \qquad (1.22)$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C,$$

откуда с учетом (1.22) легко следует утверждение теоремы.

Задача. Доказать (1.21) арифметическим способом.

Теорема 1.17. (О вычитании разности из числа). *Пусть a, b, c – числа из N_0, тогда*

$$a - (b - c) = (a + c) - b \qquad (1.23)$$

(*предполагается, что $a + c \geq b \geq c$*).

Доказательство геометрическое. На этот раз (в отличие от предыдущего) нам не удастся изобразить на диаграмме Эйлера все интересующие нас множества в виде кругов. Итак, условно изобразим в виде областей на плоскости множества A, B, C (численности которых равны соответственно a, b, c), соблюдая при этом следующие условия:

$$A \cap C = \emptyset,\ C \subseteq B,\ (B \setminus C) \subseteq A \qquad (1.24)$$

(см. рис. 1.1). С учетом (1.24), очевидно, имеем:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \cup C) \setminus B, \qquad (1.25)$$

откуда, переходя к численностям множеств в обеих частях (1.25), сразу получаем требуемый результат.

Задача. Доказать (1.23) арифметическим способом.

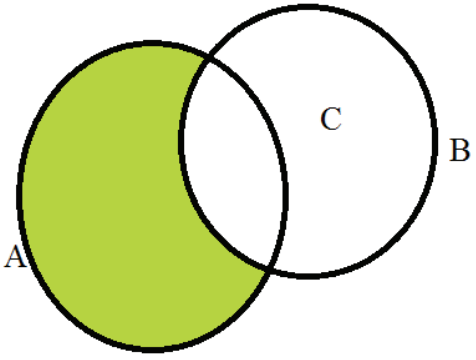


Рис. 1.1

Теорема 1.18. (О вычитании суммы из суммы). *Пусть a, b, c, d – числа из N_0, тогда*

$$(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \tag{1.26}$$

(*предполагается, что $a \geq c$, $b \geq d$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим при помощи кругов Эйлера четыре конечных множества A, B, C, D, численности которых равны соответственно a, b, c, d, причем

$$\begin{gathered} A \cap B = \emptyset, \\ C \cap D = \emptyset, \\ C \subseteq A,\ D \subseteq B. \end{gathered} \tag{1.27}$$

Нетрудно видеть, что при условиях (1.27) справедливо равенство

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) = (A \setminus C) \cup (B \setminus D),$$

откуда с учетом (1.27) легко следует утверждение теоремы.

Задача. Доказать (1.26) арифметическим способом.

Теорема 1.19. (О вычитании разности из разности). *Пусть a, b, c, d – числа из N_0, тогда*

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c) \tag{1.28}$$

(*предполагается, что $a \geq b$, $c \geq d$, $a + d \geq b + c$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим в виде областей на диаграмме Эйлера четыре конечных множества A, B, C, D, численности которых равны соответственно a, b, c, d, причем выполнены следующие шесть условий, отвечающих структуре выражений из (1.28):

$$\begin{gathered} A \cap D = \emptyset, \\ B \cap C = \emptyset, \\ B \subseteq A,\ D \subseteq C, \\ C \setminus D \subseteq A \setminus B, \\ B \cup C \subseteq A \cup D \end{gathered} \tag{1.29}$$

(см. рис. 1.2). Нетрудно видеть, что если все шесть условий (1.29) выполнены, то справедливо равенство

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \cup D) \setminus (B \cup C). \tag{1.30}$$

Переходя в (1.30) к численностям множеств в правой и левой частях с учетом (1.29) получаем требуемый результат.

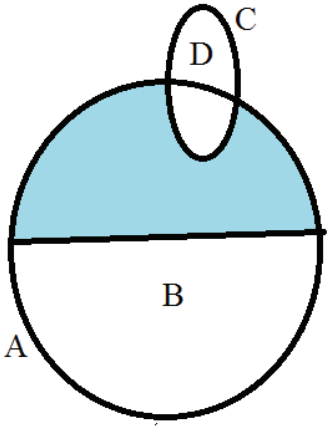


Рис. 1.2

Задача. Доказать (1.28) арифметическим способом.

1.10. УПОРЯДОЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА N_0

Шаг нулевой.

У нас уже есть обозначение для класса, содержащего пустое множество:

$$0 = n(\emptyset). \qquad (1.31)$$

Так как пустое множество является подмножеством любого непустого конечного множества A и при этом не совпадает с A, то, очевидно,

$$0 < n(A),$$

т.е. ноль меньше любого ненулевого ц.н.ч. (любого натурального числа).

Начнем теперь вводить обозначения для остальных ц.н.ч.

Шаг первый.

Возьмем какой-нибудь произвольный элемент w и рассмотрим множество $\{w\}$, т.е. такое множество, в котором кроме элемента w не содержится ничего. Это множество, очевидно, конечно.

Далее, рассмотрим класс всех конечных множеств, равномощных множеству $\{w\}$. Обозначим этот класс цифрой 1. Таким образом,

$$1 = \{ \{w\}, \{a\}, \{ \cdot \}, \{@\}, \ldots\}. \qquad (1.32)$$

При этом в силу сказанного выше имеем:

$$0 < 1. \qquad (1.33)$$

Шаг второй.

Двух числовых символов 0 и 1 нам достаточно, чтобы образовать множество

$$M = \{0; 1; 1 + 1; 1 + 1 + 1; \ldots\}. \qquad (1.34)$$

В силу монотонности сложения, очевидно, имеем:

$$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \ldots \qquad (1.35)$$

Элементы множества M, очевидно, представляют собой различные ц.н.ч., строго упорядоченные по возрастанию.

Шаг третий. Теперь наша цель – доказать, что M = N_0. Для этого достаточно доказать, что каждое натуральное число представимо в виде конечной суммы 1 + 1 + 1 + … + 1. Итак, рассмотрим произвольное натуральное число

$$a = n(A),$$

где A – соответствующее конечное множество:

$$A = \{x, y, z, \ldots, w\}.$$

Представим множество A в виде объединения одноэлементных множеств:

$$A = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} \cup \ldots \cup \{w\};$$

переходя здесь к соответствующим численностям, имеем

$$n(A) = n(\{x\}) + n(\{y\}) + n(\{z\}) + \ldots + n(\{w\}),$$

т.е.

$$n(A) = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1,$$

что и требовалось установить.

Следствие. В силу антирефлексивности отношения «меньше» *между* элементами строго возрастающей последовательности (1.35) не может «поместиться» никакое ц.н.ч.

Замечание. С этого момента мы начинаем использовать наши привычные обозначения для натуральных чисел:

$$1; 1 + 1 = 2; 1 + 1 + 1 = 3;$$
$$1 + 1 + 1 + 1 = 4; \text{ и т.д.} \qquad (1.36)$$

Отсюда легко следует, что

$$n(\{1\}) = 1, n(\{1; 2\}) = 2, n(\{1; 2; 3\}) = 3, \ldots,$$
$$n(\{1; 2; 3; \ldots; k\}) = k, \ldots \qquad (1.37)$$

Замечание. Так как все количественные натуральные числа теперь упорядочены по возрастанию, то мы, очевидно, можем пользоваться ими же, как *номерами* при пересчете объектов. При этом *если последний сосчитанный объект будет иметь номер k, то это одновременно будет означать, что общее количество сосчитанных объектов равно k.*

1.11. УМНОЖЕНИЕ: КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ

Наконец, мы переходим к действиям второй ступени. Теперь в нашем изложении место диаграмм Эйлера займут более подробные диаграммы, где будут изображены отдельные элементы рассматриваемых множеств.

Определение 1.7. Пусть a и b – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$. *Произведением* чисел a и b назовем численность декартова произведения множеств A и B:

$$a \cdot b = n(A \times B). \qquad (1.38)$$

Замечание. Будем обозначать равномощность двух множеств с помощью символа ~. Нетрудно видеть, что если $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, то $A \times B \sim A_1 \times B_1$. Поэтому введенное определение произведения чисел a и b не зависит от выбора конкретных множеств A и B.

С математической точки зрения определение 1.7 удобно тем, что оно выражается единой формулой, не требует отдельного рассмотрения каких-либо частных случаев. Однако за внешней красотой формулы (1.38) не так легко разглядеть смысл введенной операции умножения. Поэтому мы приведем еще одно определение, эквивалентное предыдущему, но при этом еще и объясняющее происхождение операции умножения.

Определение 1.8. Пусть a и b – числа из N_0. Положим по определению:

1) если $b > 1$, то
   $a \cdot b = a + a + a + \ldots + a$ (в сумме b слагаемых);
2) $a \cdot 1 = a$;
3) $a \cdot 0 = 0$.

Замечание. Таким образом, в определении 1.8 *умножение явным образом вводится как кратное сложение.* Для того, чтобы доказать, что оба приведенные выше определения экавивалентны, достаточно заметить, что $A \times \emptyset = \emptyset$.

Замечание. В дальнейшем, в случае, когда оба сомножителя обозначены не цифрами, а буквами, мы будем опускать точку в обозначении произведения.

Замечание. Из определения 1.8 легко следует, что произведение двух любых натуральных чисел также является натуральным числом (т.е. не равно нулю).

Теорема 1.20. (О коммутативности умножения). *Пусть a и b – числа из* N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$. *Тогда*

$$ab = ba. \tag{1.39}$$

Первое доказательство. (Опираемся на определение 1.7). Нетрудно видеть, что

$$A \times B \sim B \times A,$$

откуда в силу (1.38) имеем:

$$ab = n(A \times B) = n(B \times A) = ba.$$

Второе доказательство. (Опираемся на определение 1.8). Нам будет удобно провести доказательство на примере, когда $a = 4$, $b = 5$. Рассмотрим множество W, элементы которого расположим в 5 горизонтальных строк, по 4 элемента в каждой строке (см. рис. 1.3).

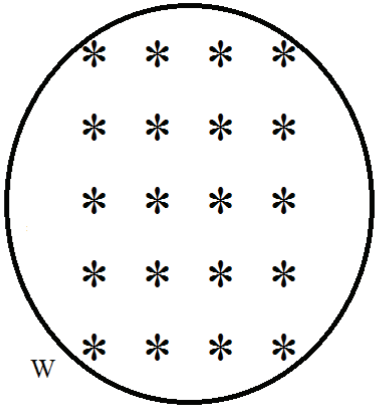


Рис. 1.3

Представим теперь множество W в виде объединений непересекающихся «подмножеств-строк» (см. рис. 1.4):

$$W = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \qquad (1.40)$$

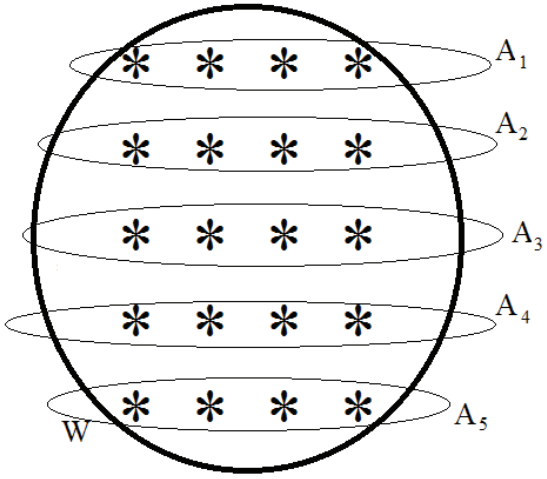


Рис. 1.4

Переходя в (1.40) к численностям соответствующих множеств, получаем:

$$n(W) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) =$$
$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) =$$
$$= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 5. \qquad (1.41)$$

Представляя аналогичным образом множество W в виде объединения непересекающихся «подмножеств-столбцов», без труда получим равенство, аналогичное (1.41):

$$n(W) = 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \cdot 4. \qquad (1.42)$$

Из двух последних равенств, очевидно, имеем

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4.$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Теорема 1.21. (Об ассоциативности умножения). *Пусть a, b, c – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$. Тогда*

$$(ab)c = a(bc). \qquad (1.43)$$

Первое доказательство. (Опирающееся на определение 1.7). Очевидно, что

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C),$$

откуда имеем:

$$n[(A \times B) \times C] = n[A \times (B \times C)].$$

Из последнего равенства с учетом определения 1.7 и вытекает утверждение теоремы.

Второе доказательство. (Опирающееся на определение 1.8). Для определенности будем считать, что $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$. Нарисуем параллелепипед, составленный из единичных кубиков имеющий ширину a, глубину b и высоту c. Теперь подсчитаем количество кубиков в нашем параллелепипеде двумя различными способами. Один раз – по слоям, параллельным боковой стенке, другой раз – по слоям, параллельным передней стенке.

Приравнивая результаты и учитывая коммутативность умножения, получим искомое соотношение (1.43).

Третье доказательство. (См., например, [3]). Это доказательство (как и второе доказательство коммутативности умножения) удобно проводить на частном примере. Посчитаем двумя разными способами количество «плюсов» на рис. 1.5. Один раз – по строкам, а другой раз – по столбцам.

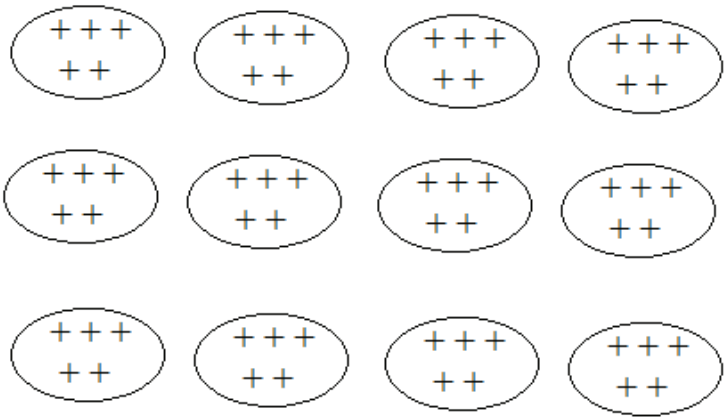


Рис. 1.5

В результате получим:

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4. \qquad (1.44)$$

Теперь придется призвать на помощь коммутативность умножения. Вначале преобразуем левую часть (1.44). Имеем

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = 3 \cdot (5 \cdot 4).$$

Далее, преобразуем правую часть (1.44):

$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = (3 \cdot 5) \cdot 4.$$

Приравнивая правые части двух последних равенств, получаем требуемый результат:

$$(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4).$$

Общий случай рассматривается аналогично.

1.12. УМНОЖЕНИЕ: ДИСТРИБУТИВНОСТЬ, МОНОТОННОСТЬ, СОКРАТИМОСТЬ

Перейдем теперь к доказательству дальнейших свойств умножения.

Теорема 1.22. (О дистрибутивности умножения относительно сложения). *Пусть a, b, c – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$. Тогда*

$$(a + b)c = ac + bc; \qquad (1.46)$$

$$c(a + b) = ca + cb. \qquad (1.47)$$

Замечание. Соотношение (1.46) называется *дистрибутивностью справа*, а соотношение (1.47) – *дистрибутивностью слева* умножения относительно сложения.

Первое доказательство теоремы 1.22. Прежде всего, заметим, что (1.47) вытекает из (1.46) в силу коммутативности умножения. Поэтому достаточно доказать соотношение (1.46).

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$A \cap B = \emptyset. \qquad (1.48)$$

Далее, имеем в силу дистрибутивности декартова произведения относительно объединения множеств:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C). \qquad (1.49)$$

Заметим, что в силу (1.48) справедливо соотношение

$$(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset. \qquad (1.50)$$

Переходя теперь в (1.49) к численностям соответствующих множеств, с учетом (1.48) и (1.50) получаем требуемый результат.

Второе доказательство теоремы 1.22. См. рис. 1.6 (доказательство проводится на примере, когда $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$).

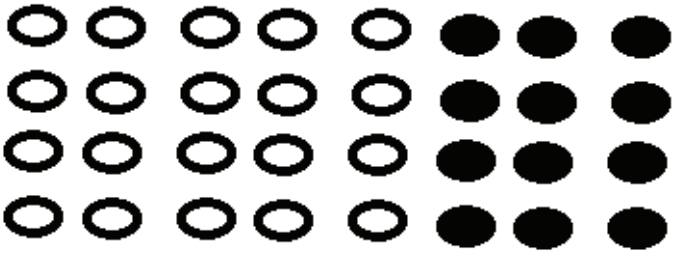


Рис. 1.6

Считаем численность множества, изображенного на рис. 1.6, двумя способами: один раз – «по строкам»; другой раз – отдельно подсчитываем количество белых и отдельно черных кружков, а результаты складываем.

Теорема 1.23. (О дистрибутивности умножения относительно вычитания). *Пусть a, b, c – числа из N_0*, причем $b \le a$. *Тогда*

$$(a - b)c = ac - bc; \tag{1.51}$$

$$c(a - b) = ca - cb. \tag{1.52}$$

Доказательство. Как и в случае теоремы 1.22, достаточно доказать только первое из двух вышеприведенных равенств. Итак, начнем доказывать (1.51). Иногда приходится слышать такой «совет»: *нужно раскрыть скобки в* (1.51), *и теорема будет доказана…*

«Совет» этот совершенно *неправильный*. Дело в том, что мы доказываем именно саму возможность раскрытия скобок в (1.51)!

Для установления (1.51) воспользуемся обратностью вычитания к сложению, а именно тем фактом, что имеют место следующие равносильности:

$$(a - b)c = ac - bc \Leftrightarrow (a - b)c + bc = ac \Leftrightarrow [(a - b) + b]c = ac \Leftrightarrow ac = ac,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 1.24. (О монотонности умножения). *Пусть a, b – числа из N_0*, причем $a < b$. *Тогда для любого $c \in N$ справедливо*

$$ac < bc \tag{1.53}$$