



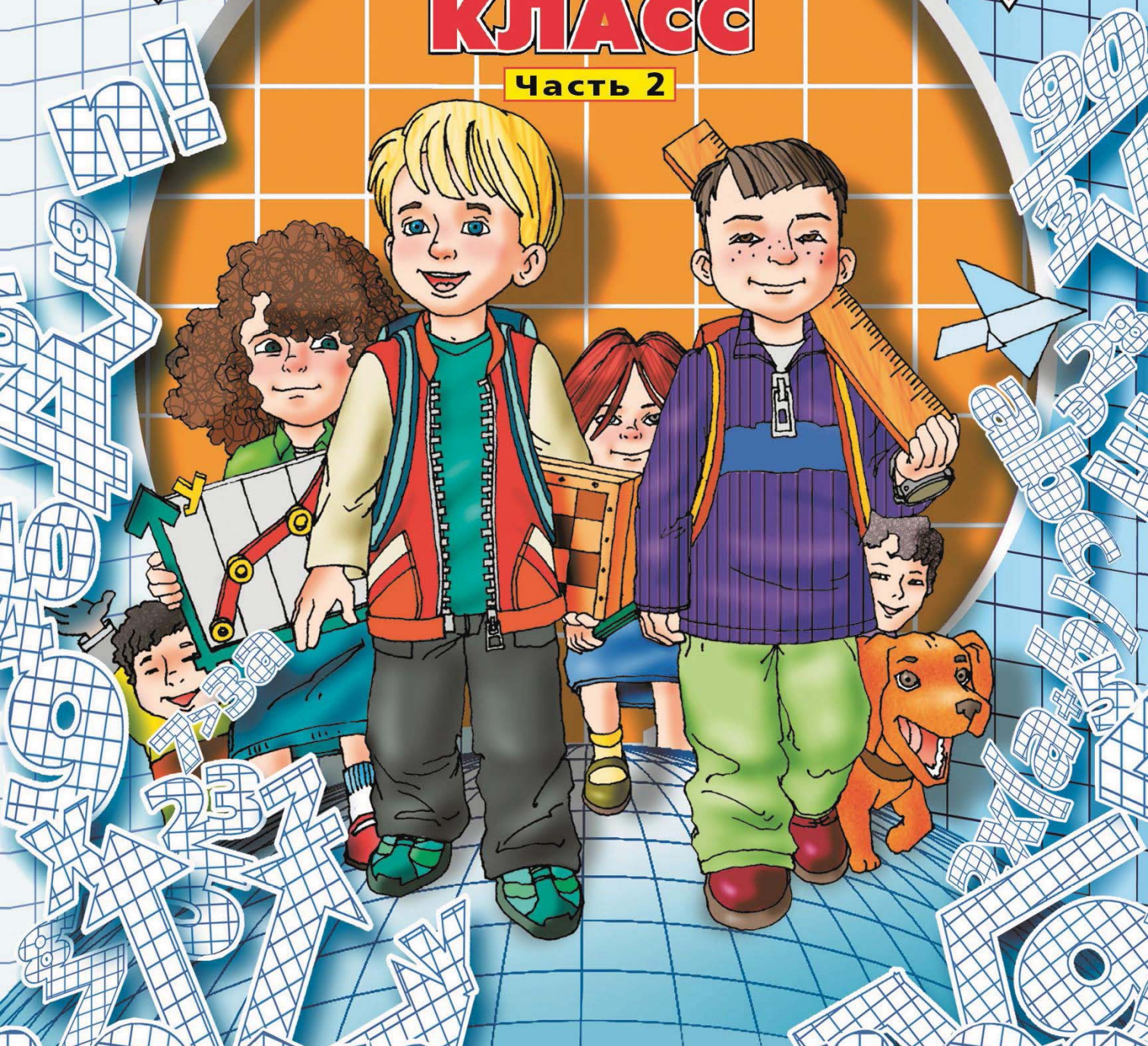
Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА

5

КЛАСС

Часть 2



УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

Д69



Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики

для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

Издание выходит в PDF-формате.

Дорофеев, Георгий Владимирович.

Д69 Математика : 5-й класс : учебник : в 2 частях : издание
в pdf-формате / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. —
4-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022.

ISBN 978-5-09-102059-5 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-088332-0 (печ. изд.).

Ч. 2. — 240 с. : ил. + Вкл. к учебнику (4 с.)

ISBN 978-5-09-101213-2 (электр. изд.).

ISBN 978-5-09-088330-6 (печ. изд.).

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих
способностей учащихся, формирование у них системы проч-
ных математических знаний, общеучебных умений, развитие
личностных качеств, познавательного интереса и ценностного
отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь
учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы (от 3 до 15 лет). Учебник разработан в соответствии со
всеми требованиями ФГОС ООО, утверждённого Приказом Ми-
нистерства просвещения № 287 от 31.05.2021 г.

Реализует дидактическую систему деятельностного мето-
да обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ
в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК
«Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-
деятельностной педагогики». Подробную информацию можно
получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-101213-2 (ч. 2, электр. изд.)

ISBN 978-5-09-102059-5 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-088330-6 (ч. 2, печ. изд.)

ISBN 978-5-09-088332-0 (печ. изд.)

© Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон, 1996, 2010, 2018, с изменениями

© АО «Издательство «Просвещение», 2021

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение», 2021

Все права защищены

Глава 3

Дроби

§ 1. Понятие дроби

С самых древних времён для решения жизненно важных вопросов людям приходилось считать предметы и измерять величины, то есть отвечать на вопрос «Сколько?»: сколько овец в стаде, сколько мер зерна собрано с поля, сколько верст от села до уездного центра и т. д. Так появились **числа**. Как иногда в шутку говорят математики, «Бог создал натуральные числа, а все остальное – дело рук человеческих».

Однако для ответа на вопрос «Сколько?» натуральных чисел очень часто не хватало. Так, убив мамонта и разделив его поровну, 10 охотников не могли сказать, «сколько мамонтов» получил каждый. Для этого им потребовалось бы понятие *доли*. Ещё долгое время после того, как мамонты вымерли, разделив три лепёшки поровну на пятерых своих детей, их мама не могла сказать, сколько же лепёшек получил каждый. Человечеству понадобилось придумать новые – **дробные** – числа, то есть придумать дроби.

Для ответа на более сложные вопросы – например, сколько овец в двух стадах, у кого из двух земледельцев урожай больше – понадобилось научиться складывать числа, сравнивать их между собой. Так постепенно, в течение тысячелетий, формировалось понятие числа. Люди учились называть и записывать числа, проводить с ними вычисления и создали тот пласт математической культуры, который в дальнейшем был назван **арифметикой**.

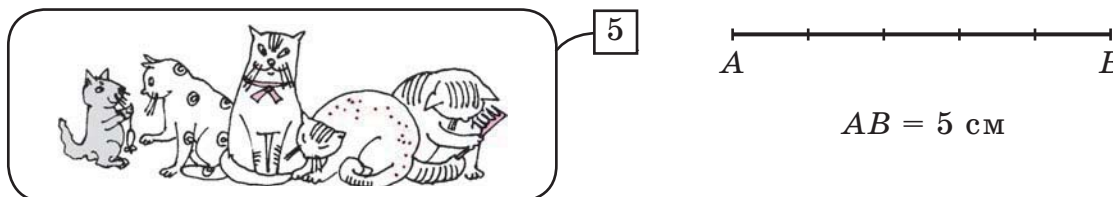
Значительную часть этого многовекового пути мы уже прошли в начальной школе – подобно тому, как за 9 месяцев каждый из нас из зародыша превратился в человека, проделав путь, на который природе понадобились миллионы лет.

Теперь нам предстоит «прожить» ещё несколько веков развития математики и прежде всего изучить арифметику дробных чисел – научиться сравнивать дроби между собой, совершать с ними арифметические действия, а главное – использовать эти числа при решении практических задач. Но вначале нам необходимо вспомнить некоторые важные сведения о натуральных числах и дробях, известные из начальной школы.



1. Натуральные числа и дроби.

Натуральные числа служат, прежде всего, для счёта предметов. Они получают и при измерении величин, – но только тогда, когда выбранная мерка укладывается в измеряемой величине целое число раз. Например, число 5 – это количество кошек на рисунке и длина отрезка AB в сантиметрах:



Множество натуральных чисел обозначают буквой N . Это множество бесконечно: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Как нам уже известно, для записи натуральных чисел обычно пользуются **десятичной позиционной системой** записи чисел.

Любые два натуральных числа можно сравнить по величине, можно сложить или перемножить. Действия сложения и умножения натуральных чисел обладают следующими **основными свойствами**:

$a + b = b + a$ – **переместительное** свойство сложения;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – **сочетательное** свойство сложения;

$ab = ba$ – **переместительное** свойство умножения;

$(ab)c = a(bc)$ – **сочетательное** свойство умножения;

$(a + b)c = ac + bc$ – **распределительное** свойство умножения относительно сложения.

Натуральные числа можно не только складывать и умножать, но и вычитать и делить. Мы уже знаем, что на множестве натуральных чисел N :

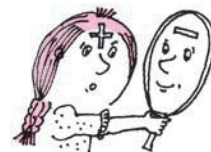
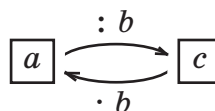
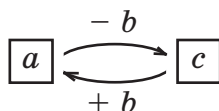
Разность чисел a и b – это такое число c , что $b + c = a$.

Частное чисел a и b – это такое число c , что $bc = a$.

Это **определения** разности и частного натуральных чисел. С помощью знака равносильности их можно записать так:

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$$

$$a : b = c \Leftrightarrow cb = a$$



Вычитание и деление являются **обратными действиями** по отношению к сложению и умножению соответственно, то есть:

$$(a - b) + b = a;$$

$$(a : b) \cdot b = a;$$

$$(a + b) - b = a;$$

$$(a \cdot b) : b = a.$$

(при условии, что данные действия вычитания и деления выполнимы на множестве N).

В отличие от сложения и умножения, вычитание и деление натуральных чисел можно выполнить не всегда. Например, нельзя число 1 разделить на 2 – нет такого натурального числа c , для которого $c \cdot 2 = 1$.

В то же время на практике одно яблоко можно разделить поровну между 2 детьми. Но в этом случае неизбежно появляется половина – или одна вторая часть яблока. Эту долю можно записать в виде $\frac{1}{2}$. Мы знаем, что если единицу счёта или измерения разделить на n равных частей (*долей*), то каждая часть будет составлять $\frac{1}{n}$. Для решения практических задач часто используют сотые доли, которые называют *процентами* ($\frac{1}{100} = 1\%$). При дележе семи яблок между двумя детьми каждый получит 7 половинок, или $\frac{7}{2}$ от целого яблока, и мы видим, что применение дробных чисел позволяет ответить на вопрос «Сколько?» и в тех случаях, когда натуральных чисел недостаточно.

Для того чтобы математическая теория могла отвечать на практические вопросы, во всех таких случаях вводятся в рассмотрение новые – *дробные* – числа, или дроби.

Дробь – это запись вида $\frac{m}{n}$, где $m \in N$, $n \in N$. С помощью дробей можно представить результат деления любого натурального числа на любое натуральное число, например:

$$7 : 2 = \frac{7}{2}, \quad 3 : 7 = \frac{3}{7}, \quad 16 : 24 = \frac{16}{24}.$$

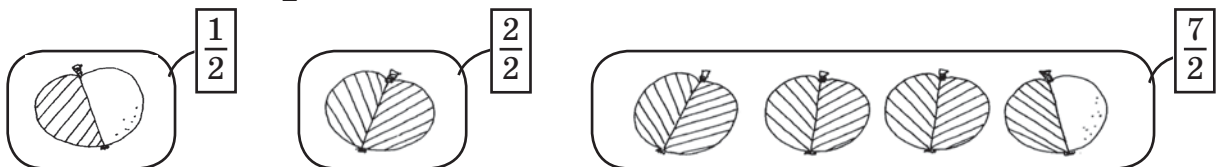
И вообще, для любых натуральных чисел m и n можно записать:

$$m : n = \frac{m}{n}.$$

В дроби $\frac{m}{n}$ (читается: «эм на эн» или «эм энных») число m , находящееся *над* чертой, называется **числителем**, а число n , находящееся *под* чертой, – **знаменателем**. Знаменатель показывает, на сколько равных частей разделили единицу («целое»), а числитель показывает, сколько таких частей взяли. Черту дроби можно понимать как знак деления. Если натуральные числа дополнить нулём, то, взяв $m = 0$, будем считать, что $0 : n = \frac{0}{n}$ ($n \neq 0$).

Если числитель дроби равен её знаменателю, то $n : n = \frac{n}{n} = 1$.

Если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь называют **правильной**, а если он больше или равен знаменателю, то дробь называют **неправильной**. Например, дробь $\frac{1}{2}$ – правильная, а дроби $\frac{2}{2}$ и $\frac{7}{2}$ – неправильные:



Правильные дроби меньше 1, а неправильные – больше или равны 1.

При делении 7 яблок на двоих детей ответ можно получить и другим способом: раздать каждому по 3 яблока и одно оставшееся разделить пополам. Тогда каждый получит по $3 + \frac{1}{2}$, или, как обычно записывают, $3\frac{1}{2}$ яблока. Вторая запись при этом называется **смешанным числом** (или **смешанной дробью**) – «целое число + дробь».

Ясно, что при любом из рассмотренных способов дележа каждый получит одно и то же количество яблок, значит, числа $\frac{7}{2}$ и $3\frac{1}{2}$ равны: $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. При этом оба числа могут быть преобразованы друг в друга по следующим правилам.

Чтобы преобразовать неправильную дробь в смешанное число, числитель делят на знаменатель с остатком: частное дает целую часть, остаток – числитель, а делитель – знаменатель дробной части.

В нашем примере:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 - \text{знаменатель дробной части} \\ 6 & 3 - \text{целая часть} \\ \hline 1 & \text{числитель дробной части} \end{array}$$



Обратно, **чтобы записать смешанное число в виде неправильной дроби, можно:**

- 1) **знаменатель умножить на целую часть;**
- 2) **к произведению прибавить числитель дробной части;**
- 3) **полученную сумму записать в числитель, а знаменатель оставить без изменений.**

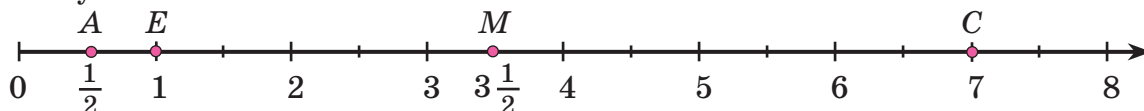
А именно:

$$3\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Эти правила можно использовать для любых смешанных чисел и неправильных дробей. Например, $\frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$, так как при делении 39 на 7 получается частное 5 и остаток 4. Обратно, $5\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 5 + 4}{7} = \frac{39}{7}$.

Если числитель неправильной дроби делится на знаменатель без остатка, то эта дробь преобразовывается в натуральное число: $\frac{18}{3} = 18 : 3 = 6$.

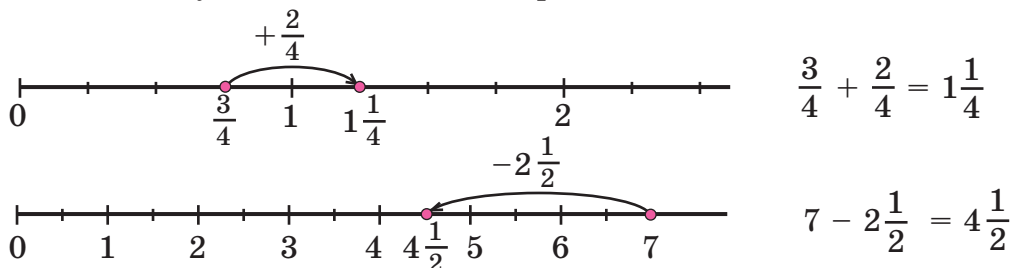
Натуральные и дробные числа можно изображать точками **числового (координатного) луча**. Это луч, на котором расположены числа по следующему правилу: выбран единичный отрезок, начало луча соответствует числу 0, а все остальные точки соответствуют числам, равным расстояниям от этой точки до начала луча.



Число, соответствующее некоторой точке числового луча, называется **координатой** этой точки. Например, координатой точки E является число 1, координатой A – число $\frac{1}{2}$, координатой M – число $3\frac{1}{2}$, а координатой C – число 7. Пишут: $E(1)$, $A(\frac{1}{2})$, $M(3\frac{1}{2})$, $C(7)$.

По расположению двух точек на числовом луче можно сравнивать числа: **большее из двух чисел расположено правее, а меньшее – левее.**

На числовом луче можно также изображать сложение и вычитание чисел:



Вместе с тем числовой луч обычно используют для сравнения, сложения и вычитания чисел тогда, когда числа несложно изобразить. А если нет? Алгоритмы сравнения и операций над натуральными числами и числом 0 нам уже хорошо известны. Мы познакомились также с некоторыми правилами сравнения дробей, научились складывать и вычитать дроби с одинаковыми знаменателями. А вот остальные действия с дробными числами и их свойства нам ещё предстоит изучить.

К

1

Какие высказывания истинны, а какие – ложны? Какие – общие, а какие – типа «хотя бы один»?

- Любое натуральное число в десятичной позиционной системе счисления можно записать с помощью десяти цифр.
- Некоторые натуральные числа записываются с помощью трёх цифр.
- Из двух натуральных чисел больше то, у которого больше первая цифра.
- Некоторые четырёхзначные натуральные числа больше некоторых пятизначных натуральных чисел.
- Существует наименьшее натуральное число.
- Существует наибольшее натуральное число.
- Все натуральные числа больше единицы.
- Каждое натуральное число на единицу меньше следующего за ним.
- Натуральное число может быть больше своего квадрата.

2

- Запиши подряд три раза число 3560. Прочитай получившееся число. Сколько в его записи классов? Сколько разрядов?
- Что означает цифра 3 в записи получившегося числа? Какая цифра в разряде сотен миллионов? Сколько в нем всего сотен миллионов?
- Назови разряды, в которых записаны нули. Можно ли пропустить нули в записи числа?
- Какие различные системы записи чисел ты знаешь? Как записать римскими цифрами число 3560?

3 Запиши цифрами число: 1) следующее за числом восемьсот пять миллионов двести семьдесят девять тысяч девятьсот девяносто девять; 2) предшествующее числу семьдесят четыре миллиарда пятьдесят шесть миллионов две тысячи девятьсот; 3) предшествующее числу 35 001 400 000; 4) следующее за числом 192 939 495 999.

4 Можно ли сравнить числа, если вместо некоторых цифр стоят звёздочки?
1) $*1***$ и $9**$; 2) $27**$ и $30**$; 3) $99***$ и $*8***$; 4) $***5$ и $***6$.

5 Прочитай определение и назови определяемое понятие:

Произведением числа a и числа b ($b > 1$) называется сумма b слагаемых, каждое из которых равно a :

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}}, \text{ где } a, b \in N$$

Почему при $b = 1$ и $b = 0$ данное определение не имеет смысла? Как определяется понятие произведения в этих случаях? Запиши эти определения в виде буквенных равенств.

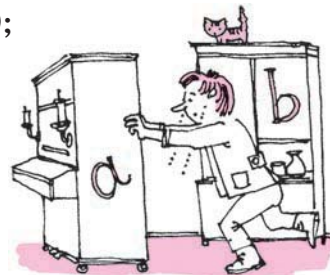
6 Прочитай в тексте данного пункта учебника определения разности и частного. Пользуясь ими, найди, если возможно, значения выражений: $a - 0$, $a - a$, $a : 1$, $a : a$, $0 : a$, $a : 0$. Какое из данных выражений не имеет смысла?

7 Счет-тест (10 мин)

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1) $938\,790\,475 + 13\,076\,225\,542$; | 3) $67\,190 \cdot 40\,500$; |
| 2) $210\,521\,052\,105 - 209\,286\,484\,215$; | 4) $5\,925\,100\,800 : 976$. |

8 Запиши в тетрадь буквенные равенства, выражающие свойства сложения и умножения: переместительное, сочетательное, распределительное – и объясни их смысл. Используя эти свойства, реши примеры наиболее удобным способом:

- 1) $201 + 202 + 203 + 204 + 205 + 206 + 207 + 208 + 209$;
- 2) $400 + (24\,589 + 927) + (3600 + 73 + 411)$;
- 3) $4 \cdot 5 \cdot 376 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 2$;
- 4) $2 \cdot (14 \cdot 2 \cdot 8) \cdot (125 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5)$;
- 5) $974 \cdot 385 + 5 \cdot 385 + 385 \cdot 21$;
- 6) $5084 \cdot 23 + 5084 + 976 \cdot 5084$.



9 а) Составь и расположи в порядке возрастания все возможные трёхзначные числа, которые можно записать с помощью цифр 7, 1, 9 (цифры в записи числа не повторяются).
б) Составь и расположи в порядке убывания все возможные пятизначные числа, которые можно записать с помощью трёх четверок и двух нулей.

10 Используя все цифры, причём каждую только один раз, составь и прочитай наименьшее возможное натуральное число, в разряде сотен миллионов которого стоит цифра 5, а единицы разряда десятков тысяч отсутствуют.

11 Прочитай число 39 052 784. Зачеркни три цифры так, чтобы получилось: 1) наименьшее возможное натуральное число; 2) наибольшее возможное натуральное число.

12 В сказочном государстве Бусирия люди знают только натуральные числа и 0, умеют их складывать и вычитать, а «умножают» их по бусирскому правилу:

$$a \otimes b = ab + a + b.$$

Представь себя учеником бусирской школы и выполни контрольную работу:

1) Вычисли значения выражений:

$$2 \otimes 3, 4 \otimes 9, 0 \otimes 712, 5 \otimes 8, 2 \otimes 8 + 3 \otimes 8.$$

2) Докажи, что бусирское умножение « $\otimes$ » обладает переместительным свойством.

3) Выясни, обладает ли оно сочетательным свойством.

4) Проверь, выполняется ли распределительное свойство:

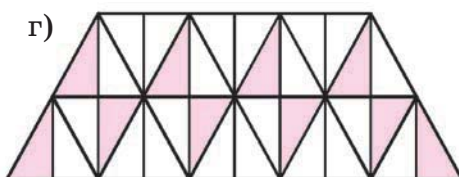
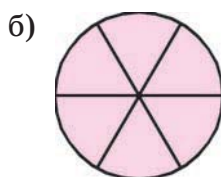
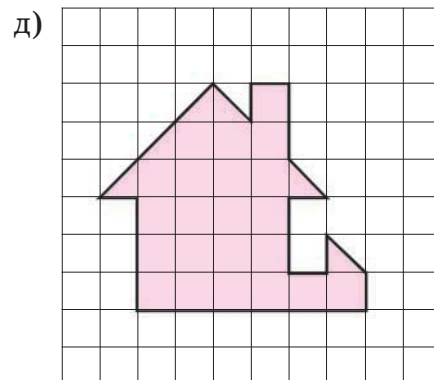
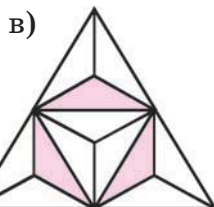
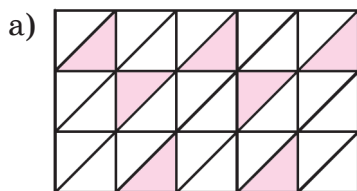
$$(a + b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c.$$

5) Какое число обладает свойством единицы (при обычном умножении: $a \cdot 1 = a$)? А свойством нуля ($a \cdot 0 = 0$)?



13 Что обозначают числитель и знаменатель дроби? Нарисуй чертёж, иллюстрирующий дробь: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{4}{4}$; в) $\frac{7}{6}$.

14 Запиши с помощью дробей, какие части фигур закрашены. Какие из этих частей можно выразить натуральными числами, а какие – с помощью процентов?



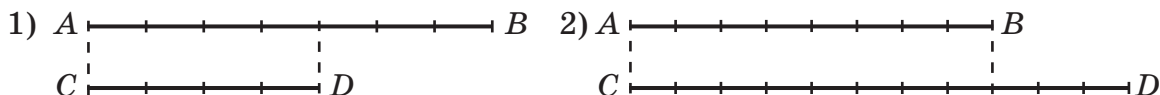
- 15 Прочитай дроби. Какая дробь в каждой из групп *a*, *б* и *в* может быть «лишней»? Обоснуй свой выбор.

а) $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{11}{13}$; б) $\frac{25}{7}, \frac{15}{14}, \frac{10}{21}, \frac{47}{18}$; в) $\frac{7}{13}, \frac{13}{13}, \frac{28}{13}, \frac{39}{11}$.

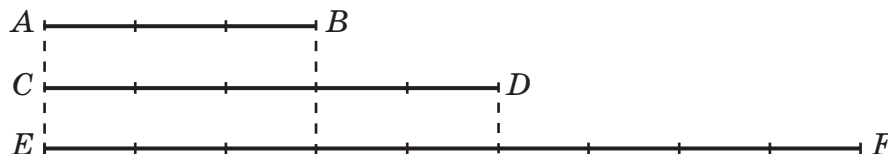
- 16 Запиши с помощью дроби:

- 1) Какую часть метра составляют 1 дм, 9 дм, 1 см, 27 см?
- 2) Какую часть тонны составляют 1 кг, 16 кг, 1 ц, 85 ц?
- 3) Какую часть часа составляют 1 мин, 3 мин, 1 с, 49 с?

- 17 Какую часть отрезка *AB* составляет отрезок *CD*? Какую часть отрезка *CD* составляет отрезок *AB*?



- 18 Какую часть каждый из отрезков *AB*, *CD* и *EF* составляет от других отрезков? Сделай записи.



- 19 Найди множество значений переменной x ($x \in N$), при которых:

- а) дробь $\frac{x-4}{7}$ будет правильной; б) дробь $\frac{6}{x+2}$ будет неправильной.

- 20 Какие высказывания истинны? К ложным общим высказываниям приведи контрпримеры.

- а) Всякая правильная дробь меньше 1.
- б) Неправильная дробь всегда больше 1.
- в) Некоторые неправильные дроби меньше 1.
- г) Любая правильная дробь меньше любой неправильной.
- д) Неправильная дробь может быть меньше 2.

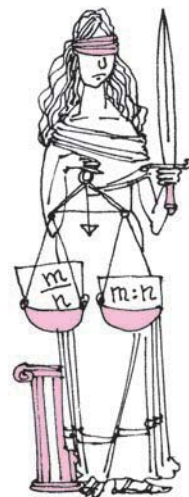
- 21 Запиши частные $3:25$, $17:6$, $4:1$, $20:2$, $7:7$ в виде дроби, а дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{24}{11}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{72}{9}$, $\frac{45}{45}$ в виде частного.

- 22 Реши уравнения:

1) $\frac{x}{15} = 5$; 2) $\frac{96}{y} = 16$; 3) $\frac{k-2}{17} = 8$; 4) $\frac{336}{n+29} = 7$.

Образец:

$$\frac{a}{8} = 2 \Leftrightarrow a = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow a = 16.$$



- 23 1) Ленту длиной 3 метра разрезали на 4 равные части. Сколько метров в каждой части?
2) Пловец за 7 секунд проплыл 5 метров. С какой скоростью он плыл?

24 Сколько седьмых долей в единице? Представь единицу в виде дроби со знаменателем 5, 67, 89, 100, n .

25 Сколько пятых долей в числе 3? Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, k замени равными им дробями сначала со знаменателем 9, затем – 11, а затем – со знаменателем 100. Как записать с помощью знака процента сотые доли величины?

26 1) Нарисуй числовой луч, приняв за единицу 8 клеток тетради. Отметь на нем числа $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{17}{8}$.

2) Сравни дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$. Как сравнить дроби с помощью числового луча?

3) Сравни дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$. Вспомни правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями. Пользуясь им, сравни дроби $\frac{19}{78}$ и $\frac{53}{78}$.

4) Сравни дроби $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{8}$. Запиши две какие-нибудь дроби с одинаковыми числителями и сравни их.

5) Представь дробь $\frac{17}{8}$ в виде смешанного числа.

27 1) Выдели целую часть из дробей $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{19}{6}$. Проиллюстрируй решение с помощью числового луча.

2) Выдели целую часть из дробей $\frac{38}{7}$, $\frac{45}{12}$, $\frac{54}{18}$, $\frac{231}{100}$, $\frac{586}{125}$, $\frac{9769}{1000}$.

28 1) 19 кг халвы разложили поровну в 4 коробки. Сколько килограммов халвы положили в каждую коробку?

2) Из 40 м ткани сшили 9 одинаковых костюмов. Сколько метров ткани пошло на каждый костюм?

29 Знак какого арифметического действия пропущен в записи смешанного числа между его целой и дробной частью?

30 1) Представь смешанные числа $1\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{5}$, $3\frac{2}{5}$, $4\frac{3}{5}$ в виде неправильных дробей. Проиллюстрируй решение на числовом луче.

2) Представь в виде неправильных дробей числа $1\frac{7}{9}$, $5\frac{2}{5}$, $7\frac{9}{13}$, $15\frac{4}{7}$, $10\frac{21}{47}$.

31 Счет-тест (5 мин).

1) $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$;

3) $2 + \frac{4}{7}$;

5) $6\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5}$;

7) $5\frac{2}{7} - 2\frac{5}{7}$;

2) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$;

4) $5 - \frac{3}{4}$;

6) $12\frac{7}{9} - 4\frac{5}{9}$;

8) $1\frac{8}{11} + 6\frac{3}{11}$.

- 32** Числа на карточках записываются по общему правилу. Найди его и заполни клетки со знаком вопроса.

$3\frac{1}{7}$	$5\frac{4}{7}$	$2\frac{3}{7}$
----------------	----------------	----------------

$1\frac{4}{5}$	?	$4\frac{3}{5}$
----------------	---	----------------

?	$8\frac{5}{9}$	$3\frac{7}{9}$
---	----------------	----------------

- 33** Найди расстояние между точками A и B координатного луча, если:

1) $A(28\ 715)$, $B(103\ 600)$; 2) $A(3\frac{5}{19})$, $B(7\frac{1}{19})$; 3) $A(8\frac{2}{5})$, $B(1\frac{4}{5})$.

π

- 34** Запиши число, представленное в виде суммы разрядных слагаемых:

1) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6$; 3) $5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 4$;
 2) $8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10 + 5$; 4) $4 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2$.

Прочитай полученные числа.

- 35** Прочитай числа:

а) 7984, б) 42 012; в) 505 050; г) 9 090 909; д) 123 456 789; е) 4 400 040 004.

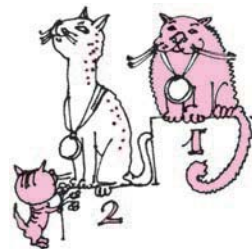
Представь их в виде суммы разрядных слагаемых, используя степени числа 10.

- 36** Найди методом *проб и ошибок* число: 1) квадратом которого является 1764; 2) куб которого равен 2197. Можно ли ответить на вопрос с одной попытки?

- 37** 1) $(863 + 256 \cdot 0) \cdot (214 : 214) - 1 \cdot 863$;
 2) $0 \cdot (996 + 7008 \cdot 32 - 74\ 359) + 785 : 1 - (543 - 543) : 9374$;
 3) $[596 - 0 : 1249 + (188 : 188) \cdot 4] : 1 + (712 - 60\ 928 : 952) \cdot (38 - 38)$;
 4) $72 \cdot (49 : 49) - [(7602 : 14 \cdot 36) \cdot (6815 - 6815) - 0 : 325 + 12 : 1] \cdot 1$.

- 38** Запиши в виде буквенных равенств правила вычитания числа из суммы и суммы из числа и реши с их помощью примеры первого столбика. Перепиши полученные равенства, заменив в них знак «+» на знак « $\cdot$ », а знак «−» на знак «:». Какие правила получились? Используй их для решения примеров второго столбика.

а) $(283 + 195) - 83$; д) $(29 \cdot 720) : 72$;
 б) $(549 + 678) - 478$; е) $(18\ 000 \cdot 56) : 18$;
 в) $756 - (256 + 36)$; ж) $1250 : (125 \cdot 5)$;
 г) $842 - 396 - 4$; з) $(2430 : 5) : 2$.



- 39** Переведи условие задачи на математический язык:

1) На выставке кошек представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сиамских кошек в 2 раза больше, чем ангорских, персидских – в 3 раза больше, чем сиамских, а сибирских – на 13 меньше, чем персидских. Сколько кошек каждой породы на выставке, если всего их 77?

2) На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятёрки на 3 больше, чем двойки, тройки на одну меньше, чем четвёрки, а четвёрки в 4 раза больше, чем двойки». Сколько человек получили пятёрки и сколько четвёрки, если в классе 32 человека?

40 1) Если задуманное число вычесть из числа 777, результат уменьшить в 7 раз, а затем увеличить на 7, то получится число, которое на 7 больше, чем наименьшее трёхзначное число. Найди задуманное число.

2) Задумали число, разделили на него 555, полученное частное вычли из 55, результат увеличили в 5 раз и получили число, в 10 раз большее квадрата числа 5. Какое число задумали?

41 1) В классе 28 учеников. Девочки составляют $\frac{4}{7}$ количества всех учеников класса. Сколько девочек в классе?

2) В шахматном турнире приняли участие 48 человек, что составило 6% всех учеников школы. Сколько учащихся в этой школе?

3) В танцевальном ансамбле 32 танцора. Из них 8 человек уехали на гастроли. Какая часть участников ансамбля уехала на гастроли?

42 1) Рабочий получил за месяц k рублей. 14% этих денег он истратил на ремонт квартиры. Сколько денег пришлось ему заплатить за ремонт?

2) Маляр покрасил m рам, что составило $\frac{2}{5}$ всех рам, которые ему надо покрасить за день. Сколько рам он должен покрасить в этот день?

3) В автобусном парке n машин. Из них 7 машин ремонтируется. Какая часть всех машин находится в ремонте?

43 Русские изобретатели отец и сын Черепановы построили первый паровоз в 1833 году. Он проезжал 1 км за 4 мин. Какое расстояние проезжал этот паровоз за 1 минуту? Вырази его скорость в километрах в час. Во сколько раз паровоз Черепановых шел медленнее современных поездов, средняя скорость которых составляет примерно 90 км/ч?

44 Скорость катера 24 км/ч. Успеет ли он за 15 мин проплыть 8000 м?

45 Построй 3 угла, в сумме образующих развернутый угол, так, чтобы первый из них был в 2 раза больше второго, а третий – в 3 раза больше первого.

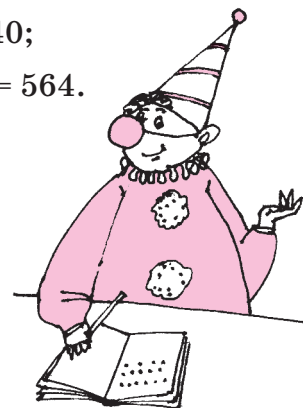
46 Напиши все возможные натуральные числа, составленные с помощью двух пятёрок и пяти нулей. Расположи их в порядке убывания. Представь каждое из полученных чисел в виде суммы разрядных слагаемых.

47 1) $79\,797\,979 + x = 1\,067\,452\,300$; 3) $x : 9307 = 8640$;

2) $x - 544\,544 = 11\,756\,686$; 4) $4\,540\,200 : x = 564$.

48 Математический фокус

Запиши четырёхзначное число, у которого каждая последующая цифра на 1 больше предыдущей. Затем запиши число теми же цифрами, но в обратном порядке. Вычти из большего числа меньшее. Повтори это ещё 3 раза, беря иные числа, и сравни полученные результаты. Что ты замечаешь?



49 Переведи условие задачи на математический язык:

На изготовление свитера, шапки и шарфа израсходовали 555 г шерсти, причем на шапку ушло в 5 раз меньше шерсти, чем на свитер, и на 5 г больше, чем на шарф. Сколько шерсти израсходовали на каждое изделие?

50 1) Какую часть километра составляют 1 м, 58 м, 1 дм, 439 дм?

2) Какую часть квадратного метра составляют 1 дм², 214 дм², 1 см², 75 см²?

3) Какую часть центнера составляют 1 кг, 9 кг, 1 г, 547 г?

4) Какую часть суток составляет 1 ч, 5 ч, 1 мин, 32 мин?

51 С одной пасеки собрали 1350 кг меда, что составляет $\frac{5}{8}$ меда, собранного со второй пасеки. На какой пасеке было больше ульев и на сколько, если с каждого улья получили по 90 кг меда?

52 Выдели целую часть дробей: $\frac{176}{9}$; $\frac{237}{28}$; $\frac{413}{64}$.

53 Представь смешанное число в виде неправильной дроби: $9\frac{2}{7}$; $4\frac{5}{42}$; $2\frac{9}{96}$.

54 Расшифруй скороговорку. Повтори её 10 раз подряд.

Т $\frac{7}{9} + 3\frac{2}{9}$; **А** $15\frac{2}{9} - (7\frac{1}{9} + 4\frac{5}{9})$;

О $9 - 5\frac{1}{4}$; **И** $(2\frac{5}{7} + 8\frac{2}{7}) - 4\frac{7}{8}$;

Р $1\frac{7}{8} + 2\frac{6}{8}$; **Х** $(4\frac{2}{5} + 3\frac{4}{5}) - (12 - 8\frac{1}{5})$;

П $4\frac{5}{7} - 1\frac{6}{7}$; **С** $12\frac{6}{11} - (5\frac{4}{11} + 6\frac{9}{11} - 2\frac{3}{11})$.



$3\frac{5}{9}$	$4\frac{5}{8}$	$4\frac{2}{5}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$

$3\frac{3}{4}$	$4\frac{2}{5}$	$4\frac{5}{8}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$

$3\frac{3}{4}$	$2\frac{7}{11}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$

$3\frac{3}{4}$	$2\frac{7}{11}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$

55 Реши уравнения:

1) $\frac{450}{x} = 9$;

2) $\frac{y}{7} = 9$;

3) $\frac{9+a}{9} = 23$;

4) $\frac{504}{b-18} = 72$.

56 Лодка проплыла по реке 300 м за 2 мин. Во сколько раз скорость лодки меньше скорости теплохода, плывущего по той же реке в том же направлении со скоростью 27 км/ч? Через сколько времени теплоход догонит лодку, если сейчас между ними 36 км?

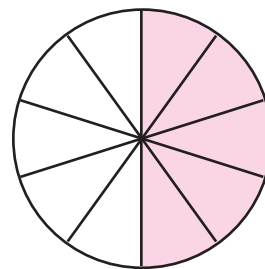
57* Дедка вдвое сильнее бабки, бабка втрое сильнее внучки, внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее кошки, кошка вшестеро сильнее мышки. Дедка, бабка, внучка, Жучка и кошка вместе с мышкой могут вытащить репку, а без мышки – не могут. Сколько надо позвать мышек, чтобы они смогли сами вытащить репку?

58* Продолжи ряд на две фигуры, сохраняя закономерность:



2. Основное свойство дроби. Преобразование дробей.

На рисунке закрашена $\frac{1}{2}$ круга. В каждой половине содержится $\frac{5}{10}$ круга. Обе дроби равны между собой, но при этом числитель и знаменатель второй дроби в 5 раз превышают числитель и знаменатель первой дроби.



Полученное равенство можно записать двумя способами:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} \quad \text{или} \quad \frac{5}{10} = \frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2}.$$

Это верно и для любых других дробей. Действительно, для натуральных чисел ранее было доказано, что $a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$ и $a : b = (a : n) : (b : n)$ (п. 2.4.5). В то же время нам известно, что знак деления можно заменить чертой дроби (п. 3.1.1). Таким образом, приходим к выводу:

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \quad a, b, n \in N.$$

Мы получили утверждение, которое называют **основным свойством дроби**. С его помощью можно преобразовывать дроби.

Второе равенство позволяет упрощать дроби, например:

$$\frac{36}{44} = \frac{36 : 4}{44 : 4} = \frac{9}{11}.$$

Такое преобразование называют **сокращением дроби**. В примере мы сократили дробь $\frac{36}{44}$ на 4. Полученную дробь $\frac{9}{11}$ сократить нельзя, так как 9 и 11 – взаимно простые числа (то есть НОД (9; 11) = 1). Дробь, числитель и знаменатель которой являются взаимно простыми числами, называется **несократимой**.

Каждую дробь можно единственным образом записать в виде несократимой дроби. Для этого нужно сократить её на *наибольший общий делитель числителя и знаменателя*. Например, НОД (245, 15) = 5. Поэтому, разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{245}{15}$ на 5, мы получим равную ей несократимую дробь.

$$\text{Запись обычно ведут так: } \frac{245}{15} = \frac{49}{3}.$$

На практике часто удобно не вычислять НОД числителя и знаменателя, а проводить сокращение дроби последовательно, например:

$$\frac{210}{315} = \frac{70}{105} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

(сначала сократили на 3, а потом на 5 и на 7). При этом, разумеется, для нахождения общих делителей полезно использовать признаки делимости.

Можно также раскладывать числитель и знаменатель дроби на множители, причём не обязательно простые:

$$\frac{750}{1200} = \frac{75}{120} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} = \frac{5}{8}.$$

Таким образом, основное свойство дроби позволяет упрощать запись дроби. Но иногда для выполнения некоторого действия её, наоборот, приходится усложнять. Например, чтобы сравнить дроби $\frac{1}{15}$ и $\frac{2}{5}$, можно числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{5}$ умножить на число 3:

$$\overset{3}{\nearrow} \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}.$$

И поскольку $\frac{1}{15} < \frac{6}{15}$, то, значит, и $\frac{1}{15} < \frac{2}{5}$.

Замену дроби равной ей дробью с новым знаменателем называют **приведением дроби к новому знаменателю**. А число, на которое умножается числитель и знаменатель данной дроби, называют **дополнительным множителем**.

Любую дробь можно привести к знаменателю, *кратному* знаменателю этой дроби. Приведём, например, дробь $\frac{4}{7}$ к знаменателю 56:

1) Найдём дополнительный множитель: $56 : 7 = 8$.

2) Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{4}{7}$ на дополнительный множитель:

$$\overset{8}{\nearrow} \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{32}{56}.$$

Для приведения двух или нескольких дробей к общему знаменателю выбирают знаменатель, кратный всем знаменателям данных дробей. При этом для простоты вычислений знаменатель лучше выбирать как можно меньший, а для этого нужно взять **наименьшее общее кратное** знаменателей всех получившихся дробей.

Например, для дробей $\frac{11}{6}$, $\frac{7}{15}$ и $\frac{3}{8}$ вычисляем сначала НОК $(6, 15, 8) = 120$.

Дополнительными множителями для данных дробей будут соответственно частные $120 : 6 = 20$, $120 : 15 = 8$, $120 : 8 = 15$, поэтому:

$$\overset{20}{\nearrow} \frac{11}{6} = \frac{11 \cdot 20}{6 \cdot 20} = \frac{220}{120}, \quad \overset{8}{\nearrow} \frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 8}{15 \cdot 8} = \frac{56}{120}, \quad \overset{15}{\nearrow} \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} = \frac{45}{120}.$$

Тем самым мы привели три заданные дроби к наименьшему общему знаменателю.

Итак, чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, можно:

- 1) найти наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей;
- 2) найти дополнительный множитель для каждой дроби;
- 3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.



И ещё одно важное замечание. Основное свойство дроби показывает, что всякое целое или дробное число можно записать в виде дроби бесконечным числом способов, например:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots; \quad \frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{15}{12} = \frac{20}{16} = \dots; \quad \frac{23}{100} = \frac{230}{1000} = \frac{2300}{10000} = \dots$$

К

59 Начерти координатный луч, приняв за единичный отрезок 12 клеток.

Отметь на нем точку $A\left(\frac{4}{6}\right)$. Какими ещё дробями может быть выражена координата точки A ? Приведи три примера и запиши соответствующие равенства.

60

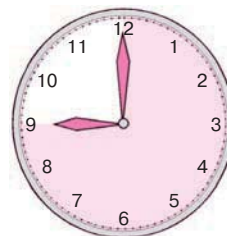
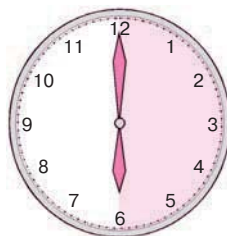
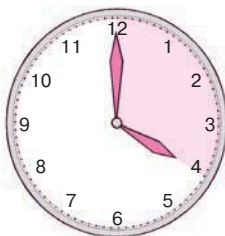
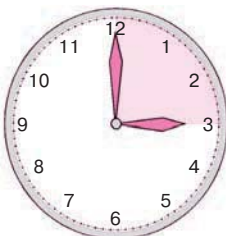
Объясни равенство дробей сначала с помощью рисунка, а потом с помощью основного свойства дроби:

а) $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$;

б) $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$;

в) $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$;

г) $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$.



61

Докажи истинность высказываний:

а) $\frac{7}{15} = \frac{42}{90}$;

б) $\frac{80}{35} = \frac{16}{7}$;

в) $\frac{7}{12} = \frac{56}{96}$;

г) $\frac{42}{140} = \frac{3}{10}$.

62

1) Умножь числитель и знаменатель каждой дроби $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{7}{1}$ на 4.

2) Раздели числитель и знаменатель каждой дроби $\frac{20}{45}$, $\frac{35}{60}$, $\frac{80}{55}$, $\frac{95}{5}$ на 5.

63

Найди такие значения переменных x и y , при которых данные предложения становятся истинными высказываниями:

1) $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$, $\frac{6}{11} = \frac{24}{x}$, $\frac{x}{40} = \frac{7}{8}$;

2) $\frac{7}{y} = \frac{21}{36}$, $\frac{1}{4} = \frac{y}{32}$, $\frac{24}{30} = \frac{12}{y}$.

64 1) Приведи каждую дробь к знаменателю 6 и найди сумму: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

2) Найди сумму и разность дробей, приведя их к общему знаменателю:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{8} - \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{5} - \frac{2}{15}, \quad \frac{3}{7} + \frac{5}{28}.$$

65 1) Приведи каждую дробь к числителю 6 и сравни дроби: $\frac{18}{75}$ и $\frac{3}{56}$.

2) Сравни дроби, приведя их к общему числителю или знаменателю:

$$\frac{1}{2} \text{ и } \frac{4}{13}, \quad \frac{2}{5} \text{ и } \frac{3}{10}, \quad \frac{8}{12} \text{ и } \frac{4}{5}, \quad \frac{2}{3} \text{ и } \frac{5}{7}.$$

66 Сколько в $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ содержится: а) двенадцатых долей;

б) восемнадцатых долей; в) тридцать шестых долей?

67 Можно ли дробь $\frac{6}{15}$ заменить равной ей дробью:

а) с числителем 48, 31, 2, 6а;

б) со знаменателем 60, 76, 5, 30b?



68 1) Что означает выражение «сократить дробь»? Сформулируй определение *несократимой дроби*.

2) Какие возможны способы сокращения дробей? Сократи дробь $\frac{42}{720}$ тремя различными способами. Какой из них тебе понравился больше?

69 Сократи дроби:

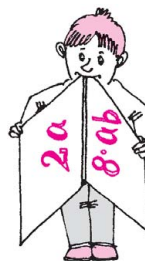
$$\text{а) } \frac{125}{75}, \frac{75}{100}, \frac{24}{360}, \frac{125}{1000}, \frac{42}{320}; \quad \text{б) } \frac{75}{300}, \frac{33}{243}, \frac{820}{41}, \frac{45}{900}, \frac{105}{1200}.$$

70 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

$$\text{а) } \frac{15 \cdot 3}{7 \cdot 10}, \frac{9 \cdot 5}{5 \cdot 21}, \frac{21 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 105}, \frac{19 \cdot 8 \cdot 11}{12 \cdot 57 \cdot 7};$$

$$\text{б) } \frac{2a}{8ab}, \frac{15mkt}{34mt}, \frac{18dcm}{45bdk}, \frac{xy}{4mnxy};$$

$$\text{в) } \frac{mn^2}{mnk}, \frac{3a^2b}{6ab}, \frac{4c}{8c^2d}, \frac{15xy^2}{20x^2yz}.$$



71 Докажи, что сократимы дроби: а) $\frac{360}{945}, \frac{624}{768}, \frac{3950}{350}$; б) $\frac{1260}{1980}, \frac{5184}{5472}, \frac{4140}{9315}$.

Сократи их, разложив сначала числитель и знаменатель на множители.

72 Объясни, почему несократимы дроби: $\frac{5}{49}, \frac{18}{193}, \frac{41}{67}, \frac{2007}{2008}$.

73 Запиши частные $48 : 72, 14 : 56, 40 : 64$ в виде несократимых дробей.

74 Отметь на координатном луче точки $A \left(\frac{100}{300} \right)$, $B \left(\frac{120}{240} \right)$, $C \left(\frac{300}{180} \right)$, $D \left(\frac{84}{72} \right)$.

75 1) Запиши множество натуральных значений переменной x , при которых дробь $\frac{x}{12}$ является правильной несократимой дробью.

2) Запиши множество натуральных значений переменной y , при которых дробь $\frac{18}{y}$ является неправильной сократимой дробью.

76 Какие из высказываний общие, а какие типа «хотя бы один»? Докажи или опровергни их.

1) Дробь, числитель и знаменатель которой кратны 3, сократима.

2) Все дроби, большие $\frac{2}{3}$, сократимы.

3) Существует сократимая дробь, числитель и знаменатель которой – простые числа.

4) Всякая дробь при сокращении уменьшается.

5) Некоторые сократимые дроби равны $\frac{1}{2}$.

6) Неправильная дробь после сокращения может стать правильной.

7) Дробь несократима *тогда и только тогда*, когда разность между ее числителем и знаменателем равна 1.

77 1) Какую часть часа составляют 5 мин, 12 мин, 15 мин, 40 мин, 45 мин?

2) Какую часть суток составляют 3 ч, 6 ч, 12 ч, 15 ч, 18 ч?

3) Какую часть центнера составляют 5 кг, 10 кг, 20 кг, 25 кг, 50 кг, 75 кг?

4) Какую часть тонны составляют 8 ц, 30 кг, 125 кг, 250 кг, 500 кг, 800 кг?

78 Один оператор набрал 48 страниц текста за 9 ч, а другой – 68 страниц за 12 ч. Кто из них работает быстрее?

79 Из 42 м полотна сшили 10 одинаковых пододеяльников, а из 33 м – 15 одинаковых простыней. Сколько полотна идет на комплект, в который входит 1 простыня и 1 пододеяльник?

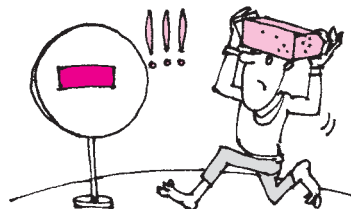


80 Как разделить сумму, разность и произведение на число? Пользуясь свойствами делимости, докажи или опровергни высказывания:

а) $\frac{5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{18}_6} = \frac{5 \cdot 1}{6} = \frac{5}{6}$; б) $\frac{5 + \cancel{3}}{\cancel{18}_6} = \frac{5 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Проверь с помощью вычислений.

Можно ли сократить дробь $\frac{5-3}{18}$?



Оглавление

Глава 3. Дроби

§ 1. Понятие дроби

1. Натуральные числа и дроби	4
2. Основное свойство дроби. Преобразование дробей	15
3. Сравнение дробей	29

§ 2. Арифметика дробей

1. Сложение и вычитание дробей	40
2. Сложение и вычитание смешанных чисел	49
3. Умножение дробей	57
4. Деление дробей	73
5. Примеры вычислений с дробями	89
6. Задачи на дроби	100
7. Задачи на дроби (продолжение)	117
8. Задачи на совместную работу	131

Глава 4. Десятичные дроби

§ 1. Понятие десятичной дроби

1. Новая запись чисел	146
2. Десятичные и обыкновенные дроби	155
3. Приближённые равенства. Округление чисел	161
4. Сравнение десятичных дробей	170

§ 2. Арифметика десятичных дробей

1. Сложение и вычитание десятичных дробей	178
2. Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.	193
3. Умножение десятичных дробей	200
4. Деление десятичных дробей	214
Задачи на повторение	234

Ответы	237
---------------------	-----