



АЛГЕБРА

ЛАБ
ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

9

КЛАСС



УДК 373:512
ББК 22.14я72
М34

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Авторы:

заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*; доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*; отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*; кандидат педагогических наук *Е. Л. Мардахаева*.

Издание выходит в pdf-формате.

Алгебра : 9-й класс : учебник : издание в pdf-формате /
М34 *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова,*
Е. Л. Мардахаева. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 368 с. : ил.

ISBN 978-5-09-101270-5 (электр. изд.) — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-092171-8 (печ. изд.).

Учебник написан в соответствии с ФГОС ООО и входит в завершённую линию учебников для 7—9-х классов; поддерживает разные модели изучения алгебры: базовую и углублённую. Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

УДК 373:512
ББК 22.14я72

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, Семенов Павел Владимирович,
Александрова Лидия Александровна, Мардахаева Елена Львовна

АЛГЕБРА

9 класс

Учебник

Подписано в печать 23.11.2021. Формат 70×90/16. Гарнитура SchoolBookSanPin.

Усл. печ. л. 26,91. Тираж

экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация,
127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru.

ISBN 978-5-09-101270-5 (электр. изд.) © АО «Издательство «Просвещение», 2020
ISBN 978-5-09-092171-8 (печ. изд.) © Художественное оформление
АО «Издательство «Просвещение», 2020
Все права защищены

Оглавление

Глава 1. Системы уравнений	5
§ 1. Уравнения с двумя переменными	5
§ 2. График уравнения с двумя переменными	11
§ 3. Уравнение окружности на координатной плоскости	17
§ 4. Основные понятия, связанные с системами двух уравнений с двумя переменными	25
§ 5. Решение систем уравнений методом подстановки	31
§ 6. Решение систем уравнений методом алгебраического сложения	38
§ 7. Решение систем уравнений методом введения новых переменных	42
§ 8. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций	48
Итак, в главе 1	59
Вопросы	59
Тест	60
Дополнительные задачи	61
Из истории математики	64
Глава 2. Решение неравенств	67
§ 9. Решение квадратных неравенств	67
§ 10. Решение неравенств методом интервалов (<i>часть 1</i>)	76
§ 11. Решение неравенств методом интервалов (<i>часть 2</i>)	84
§ 12. Системы и совокупности неравенств с одной переменной	94
§ 13*. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	104
§ 14*. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	108
§ 15. Уравнения и неравенства с параметром	112
§ 16. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными	119
Итак, в главе 2	126
Вопросы	126
Тест	126
Дополнительные задачи	128
Из истории математики	132
Глава 3. Числовые функции	135
§ 17. Определение числовой функции	135
§ 18. Способы задания функции	144
§ 19. Свойства функций	158
§ 20. Чётные и нечётные функции	166

§ 21. Исследование функций. Чтение графика функции	179
§ 22. Функция $y = x^3$	195
§ 23. Понятие корня n -й степени из действительного числа	202
§ 24. Функция $y = \sqrt[n]{x}$	207
§ 25*. Построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля	217
Итак, в главе 3	229
Вопросы	229
Тест	230
Дополнительные задачи	232
Из истории математики	235
Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии	239
§ 26. Числовые последовательности	239
§ 27. Рекуррентный способ задания числовой последовательности	246
§ 28. Определение арифметической прогрессии. Формула n -го члена арифметической прогрессии	250
§ 29. Характеристическое свойство арифметической прогрессии	258
§ 30. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии . . .	262
§ 31. Определение геометрической прогрессии. Формула n -го члена геометрической прогрессии	267
§ 32. Характеристическое свойство геометрической прогрессии	277
§ 33. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии . . .	281
§ 34*. Сумма бесконечной геометрической прогрессии	285
§ 35. Прогрессии и банковские расчёты	290
Итак, в главе 4	295
Вопросы	295
Тест	296
Дополнительные задачи	297
Из истории математики	300
Глава 5. Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул	303
§ 36. Правило умножения и основные комбинаторные формулы	303
§ 37. Вероятность суммы двух событий. Независимые события	313
§ 38. Испытания с двумя исходами и их независимые повторения	323
§ 39. Простейшие случайные величины	333
Итак, в главе 5	345
Вопросы	346
Тест	347
Дополнительные задачи	348
Из истории математики	352
Ответы	354

Московский
государственный
университет
имени М. В. Ломоносова.
Москва



- §1. Уравнения с двумя переменными
- §2. График уравнения с двумя переменными
- §3. Уравнение окружности на координатной плоскости
- §4. Основные понятия, связанные с системами двух уравнений с двумя переменными
- §5. Решение систем уравнений методом подстановки
- §6. Решение систем уравнений методом алгебраического сложения
- §7. Решение систем уравнений методом введения новых переменных
- §8. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций

Глава 1

Системы уравнений

§ 1. Уравнения с двумя переменными

В курсе алгебры 7-го класса мы изучали *линейные уравнения с двумя переменными* — уравнения вида $ax + by = c$, где a , b , c — числа (коэффициенты). Мы знаем, что всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by = c$ в верное числовое равенство, называют *решением уравнения* $ax + by = c$. Например, решениями уравнения $3x + 4y = 12$ являются такие пары чисел: $(x; y)$: $(0; 3)$, $(4; 0)$, $(-4; 6)$, $\left(\frac{16}{3}; -1\right)$ — и многие другие. А вот пары $(1; 1)$, $(2; -5)$, $(1,3; \sqrt{2})$ не являются решениями уравнения $3x + 4y = 12$.

Разумеется, встречаются и уравнения с двумя переменными, не являющиеся линейными. Вообще, *уравнение с двумя переменными* x, y — это уравнение вида $p(x; y) = 0$ или $h(x; y) = g(x; y)$, где $p(x; y)$, $h(x; y)$, $g(x; y)$ — алгебраические выражения; *решением уравнения с двумя переменными* $(x; y)$ называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению.

Пусть, например, дано уравнение с двумя переменными $2x^2 - xy = 2x + y - 4$. Пара $(1; 2)$ является решением этого уравнения. В самом деле, подставив значения $x = 1$, $y = 2$ в левую и правую части уравнения, получим: $2 \cdot 1^2 - 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 2 - 4$; $0 = 0$ — верное равенство.

Вот ещё одно решение этого уравнения: $(0; 4)$ (проверьте!). А, скажем, пара $(3; 2)$ решением уравнения $2x^2 - xy = 2x + y - 4$ не является: при $x = 3$, $y = 2$ левая часть уравнения принимает значение 12, а правая — значение 4.

Встречаются и уравнения, не имеющие решений, например $3x^2 + 6 = 3 - 3y^2$. Действительно, значения его левой части — не

меньше 6, а правой части — не больше 3, ведь $3x^2 \geq 0$ и $3y^2 \leq 0$. Значит, равенства левой и правой частей не может быть ни при каких значениях переменных.

Напомним, что два уравнения $p(x; y) = 0$ и $q(x; y) = 0$ называют *равносильными*, если они имеют одинаковые множества решений (в частности, если оба уравнения не имеют решений). Например, уравнения $f(x; y) = 0$ и $\sqrt{f(x; y)} = 0$ равносильны.

Решая уравнения с одной или двумя переменными, заменяют данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такую замену называют *равносильным преобразованием уравнения*. Равносильными являются следующие преобразования:

1) *перенос членов уравнения из одной его части в другую с противоположными знаками.*

Например, замена уравнения $x^2 + 2 = 1 - y^2$ уравнением $x^2 + y^2 = 1 - 2$ есть равносильное преобразование уравнения;

2) *умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число или на одно и то же выражение, всюду отличное от нуля.*

Например, замена уравнения $3x^2 + 3y^2 = -3$ уравнением $x^2 + y^2 = -1$ есть равносильное преобразование уравнения (обе части уравнения почленно разделили на одно и то же число 3).

Неравносильными преобразованиями уравнения могут оказаться:

а) *освобождение от знаменателей, содержащих переменные;*

б) *возведение обеих частей уравнения в квадрат.*

Если в процессе решения уравнения применялось одно из указанных неравносильных преобразований, то среди найденных решений могут оказаться посторонние решения, т. е. пары чисел, не удовлетворяющие исходному уравнению. В таком случае обязательна проверка всех найденных решений подстановкой в исходное уравнение.

Пример 1 Решить уравнение $\sqrt{2x + 8} + \sqrt{4y + 3} = 0$.

Решение. Выражение, находящееся под знаком квадратного корня, должно быть неотрицательным, т. е.

$$2x + 8 \geq 0, 4y + 3 \geq 0.$$

При этих значениях x, y выполняются неравенства

$$\sqrt{2x + 8} \geq 0, \sqrt{4y + 3} \geq 0.$$

Значит, левая часть заданного уравнения всегда неотрицательна, причём равенство её нулю возможно лишь в одном случае: когда **каждое** из двух неотрицательных слагаемых обращается в нуль. Таким

образом, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x+8} = 0, \\ \sqrt{4y+3} = 0, \end{cases}$

которая равносильна системе $\begin{cases} 2x+8 = 0, \\ 4y+3 = 0. \end{cases}$

Решив эту систему уравнений, получим $x = -4$, $y = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(-4; -\frac{3}{4}\right)$.

Особый интерес для математики представляет задача отыскания целочисленных решений уравнения с двумя переменными.

Пример 2 Найти все целочисленные решения уравнения $2x + y = 10$.

Решение. Если $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, то уравнение $2x + y = 10$ принимает вид $2k + y = 10$, откуда получаем $y = 10 - 2k$; $10 - 2k$ — целое число. Значит, целочисленными решениями уравнения служат любые пары вида $(k; 10 - 2k)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Приведём некоторые решения: $(0; 10)$, $(1; 8)$, $(2; 6)$, $(-1; 12)$ и т. д.

Пример 3 Найти целочисленные решения уравнения $x^2 - y^2 = 5$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 5$. Левая часть уравнения представляет собой произведение интересующих нас двух целых чисел. Это произведение может равняться 5 лишь в четырёх случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 5; когда первый множитель равен 5, а второй 1; когда первый множитель равен -1 , а второй -5 ; когда первый множитель равен -5 , а второй -1 . Значит, задача сводится к решению четырёх достаточно простых систем линейных уравнений, которые мы с вами научились решать в курсе алгебры 7-го класса:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 5; \end{cases} \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 1; \end{cases} \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -5; \end{cases} \begin{cases} x - y = -5, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 3$, $y = 2$; из второй: $x = 3$, $y = -2$; из третьей: $x = -3$, $y = -2$; из четвёртой: $x = -3$, $y = 2$.

Ответ: $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$, $(-3; 2)$.

Пример 4* Найти целочисленные решения уравнения $3x + 5y = 16$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $3x = 16 - 5y$ и далее

$$x = \frac{16 - 5y}{3}.$$

Значение x будет целым тогда и только тогда, когда выражение $p(y) = 16 - 5y$ делится без остатка на 3; в этом выражении мы, естественно, рассматриваем только целочисленные значения переменной y .

Для целого числа y по отношению к числу 3 имеются три возможности:

- 1) число y кратно числу 3, т. е. $y = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 - 2) число y даёт при делении на 3 остаток 1, т. е. $y = 3n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$;
 - 3) число y даёт при делении на 3 остаток 2, т. е. $y = 3n + 2$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Рассмотрим каждую из этих возможностей по отдельности.

1) $y = 3n$. Тогда $p(y) = 16 - 5y = 16 - 5n$. Это число не делится на 3.

2) $y = 3n + 1$. Тогда $p(y) = 16 - 5y = 16 - 5(3n + 1) = 11 - 15n$. Это число не делится на 3.

3) $y = 3n + 2$. Тогда $p(y) = 16 - 5y = 16 - 5(3n + 2) = 6 - 15n = 3(2 - 5n)$. Это число делится на 3.

Итак, $y = 3n + 2$. Тогда

$$x = \frac{16 - 5y}{3} = \frac{3(2 - 5n)}{3} = 2 - 5n.$$

Значит, целочисленными решениями уравнения $3x + 5y = 16$ являются пары вида $(2 - 5n; 3n + 2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Если, например, $n = 1$, то получаем пару $(-3; 5)$, она удовлетворяет уравнению $3x + 5y = 16$; если $n = -1$, то получаем пару $(7; -1)$, она удовлетворяет уравнению $3x + 5y = 16$; если $n = 2$, то получаем пару $(-8; 8)$, она удовлетворяет уравнению $3x + 5y = 16$ и т. д.

Ответ: $(2 - 5n; 3n + 2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнения

1.1. Является ли пара чисел $(1; 2)$ решением уравнения:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| а) $x^2 + 2y = 5$; | г) $2x^2 - 4y = -6$; |
| б) $3x^2 - 2y^4 + 4xy^2 = 0$; | д) $3x^5 - 2y^3 + 5x^2y = -3$; |
| в) $4x^2 - \sqrt{y+2} = 2$; | е) $3x^2 - 4\sqrt{x} = 2$? |

1.2. Укажите пары чисел, которые являются решением уравнения

$$(x - 1)^2 - 2y^2 = 1;$$

а) $(1; 2), (-1; 1), (2; 0);$

б) $(4; -2), (-2; 0), (1; 1);$

в) $(6; 2\sqrt{3}), (-3; \sqrt{2}), (7; 3\sqrt{2});$

г) $(3; -1), (-2; 2), (-1; -2);$

д) $(-2; -2), (4; 1), (3; 2);$

е) $(-4; -2\sqrt{3}), (1 + \sqrt{3}; 1), (3; \sqrt{2}).$

1.3. Решите уравнение:

а) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0;$

б) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{3y + 6} = 0;$

в) $\sqrt{x - 3} + |y^2 - 4| + \sqrt{2z + 5} = 0;$

г) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0;$

д) $\sqrt{3x + 9} + \left| \frac{1}{2}y - 3 \right| = 0;$

е) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{3y + 6} + |0,3z - 3| = 0.$

Есть ли среди представленных уравнений пары равносильных уравнений? Назовите их, объясните свой выбор.

1.4. а) $4x - 3y = 18, x = 0,75y + 6, y = 6 - 1\frac{1}{3}x;$

б) $x^2 + y - 2x + 3 = 0, y = -2 - (x - 1)^2, x = \sqrt{y - 2} + 1;$

в) $xy = -6, y = -\frac{6}{x}, xy + 4 = -2;$

г) $2x + 3y = 9, y = 3 - \frac{2}{3}x, x = 3 + 1,5y;$

д) $x^2 + y - 4x + 2 = 0, y = (x - 2)^2 + 2, x = \sqrt{y - 2} + 2;$

е) $xy = 8, y = \frac{8}{x}, xy - 5 = 3.$

1.5. а) $\frac{x^2 - 9y^2}{x + 4y} = 0, x^2 - 9y^2 = 0, x - 3y = 0;$

б) $\sqrt{3x + y} = 2, 3x + y = 4, |3x + y| = 2;$

в) $\frac{x^2 + 12xy + 36y^2}{x + 6y} = 0, x^2 + y^2 + 1 = 0, x + 6y = 0;$

$$\text{г) } \frac{x^2 - 4xy + 5y^2}{x + y} = 0, x - 5y = 0, \frac{x - 5y}{x + y} = 0;$$

$$\text{д) } \sqrt{x^2 - 3xy} = 2y, (x - 4y)(x + y) = 0, \frac{\sqrt{x - 4y}}{\sqrt{x + y}} = 0;$$

$$\text{е) } \sqrt{x + y - 3} = -3, x^2 + y^2 = 2xy - 3, x + y = 12.$$

1.6. а) При каких значениях параметра a пара чисел $(-2; 1)$ является решением уравнения $ax^2 + a^2y = 5$?

б) При каких значениях параметров p и q пара чисел $(1; -2)$ является решением каждого из данных уравнений $px + 2y = q$ и $4x + qy = 2p$?

Найдите целочисленные решения уравнения.

1.7. а) $3x + 2y = 7$;

г) $3x - 2y = 7$;

б) $4x - 5y = 19$;

д) $3x - 5y = 13$;

в) $7x - 3y = 10$;

е) $5x + 7y = 3$.

1.8. а) $9x^2 - 4y^2 = 5$;

г) $x^2 - 9y^2 = 7$;

б) $xy = 2x + y$;

д) $xy - 2y = 3x$;

в) $2x^2 + xy - y^2 = 5$;

е) $3x^2 - 2xy = y^2 - 5$.

1.9. а) Найдите двузначное число, которое в 6 раз больше суммы своих цифр.

б) Найдите двузначное число, которое равно сумме утроенного числа десятков и квадрата единиц.

Упражнения для повторения

1.10. Найдите пересечение множеств A и B , если:

а) A — множество двузначных чисел, кратных 3, B — множество двузначных чисел, кратных 4;

б) A — множество всех нечётных целых чисел, $B = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; \dots; 75\}$;

в) A — множество двузначных чисел, кратных 5, B — множество двузначных чисел, кратных 6;

г) A — множество всех чётных целых чисел, $B = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; \dots; 95\}$.

1.11. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) $0,(12)$;

б) $0,3(8)$;

в) $0,(15)$;

г) $0,2(7)$.

1.12. Запишите в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби:

а) $\frac{17}{40}$; б) $\frac{7}{11}$; в) $\frac{7}{25}$; г) $\frac{15}{22}$.

1.13. Решите неравенство:

а) $-2(x - 5) - 7 < 5(3 - x) + 6$;

б) $\frac{2x + 1}{5} \leq 1 + \frac{2x - 4}{3}$;

в) $3(x - 4) + 5 > 27 - 7(x - 3)$;

г) $\frac{x - 1}{3} \geq 2 + \frac{4x + 7}{7}$.

§ 2. График уравнения с двумя переменными

Пусть дано уравнение $p(x; y) = 0$. Множество точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy таких, что $(x; y)$ — решение уравнения $p(x; y) = 0$, называют *графиком уравнения*. В курсе алгебры 7-го класса мы научились строить графики линейных уравнений с двумя переменными. Графиком линейного уравнения с двумя переменными $ax + by = c$, где хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля, является прямая линия, для построения которой достаточно указать две точки, ей принадлежащие. На рисунке 1 изображён график уравнения $3x + 4y = 12$ — прямая, проходящая через точки $(0; 3)$ и $(4; 0)$, удовлетворяющие уравнению $3x + 4y = 12$.

Если уравнение $p(x; y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$, то график уравнения $p(x; y) = 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. В таких случаях говорят, что уравнение $p(x; y) = 0$ с двумя переменными разрешено относительно переменной y .

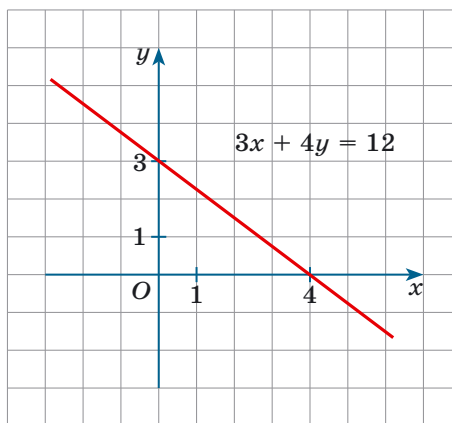


Рис. 1

Пример 1 Построить график уравнения: а) $y + x^2 = 0$; б) $xy = 3$; в) $y - \sqrt{x + 1} - 2 = 0$.

Решение. а) Преобразуем уравнение $y + x^2 = 0$ к виду $y = -x^2$. Графиком функции $y = -x^2$ является парабола (рис. 2).

б) Преобразуем уравнение $xy = 3$ к виду $y = \frac{3}{x}$. Графиком функции $y = \frac{3}{x}$ является гипербола (рис. 3).

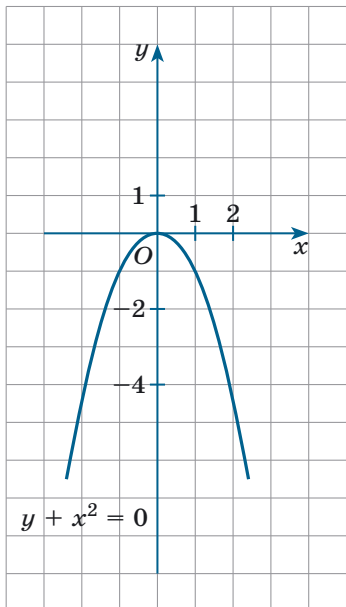


Рис. 2

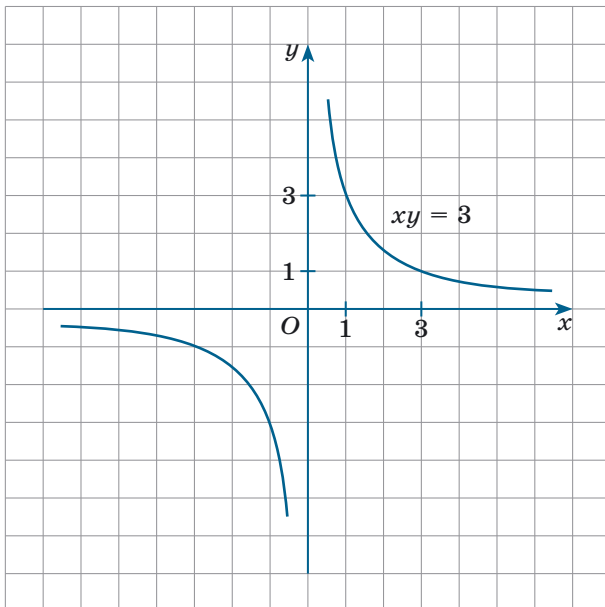
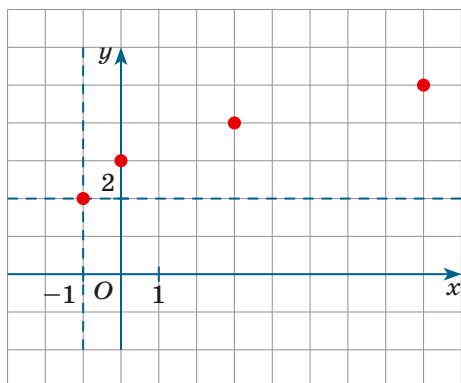
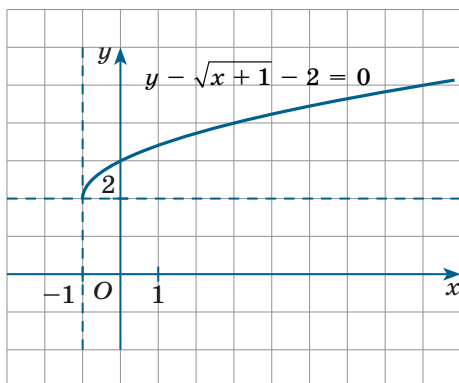


Рис. 3

в) Преобразуем уравнение $y - \sqrt{x+1} - 2 = 0$ к виду $y = \sqrt{x+1} + 2$. Чтобы построить график функции $y = \sqrt{x+1} + 2$, напомним, как мы поступали в подобных случаях в курсе алгебры 8-го класса. Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 2)$ (пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 2$ на рисунке 4, а). «Привяжем» функцию $y = \sqrt{x}$ к новой системе координат. Для этого выберем несколько контрольных точек для функции $y = \sqrt{x}$, например $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(9; 3)$, но строить их будем не в старой, а в новой системе координат (эти точки отмечены на рисунке 4, а). По этим точкам построим ветвь параболы — это и есть требуемый график (рис. 4, б).



a



б

Рис. 4

Пример 2 Построить график уравнения $(y - |x|)(y + 2x^2) = 0$.

Решение. Поскольку произведение двух множителей равно нулю, задача сводится к построению графиков двух уравнений: $y - |x| = 0$, $y + 2x^2 = 0$. Перепишем уравнения в виде $y = |x|$, $y = -2x^2$ и построим в одной системе координат графики функций $y = |x|$, $y = -2x^2$ (рис. 5). Объединение этих графиков является графиком уравнения $(y - |x|)(y + 2x^2) = 0$.

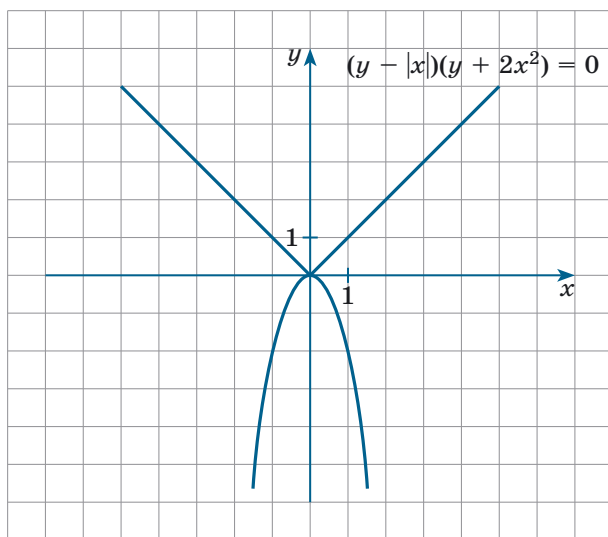


Рис. 5

Упражнения

Запишите уравнение, график которого изображён на данном рисунке.

2.1.

а) Рис. 6;

в) рис. 8;

д) рис. 10;

б) рис. 7;

г) рис. 9;

е) рис. 11.

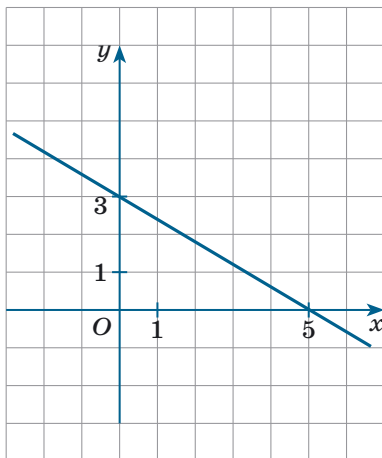


Рис. 6

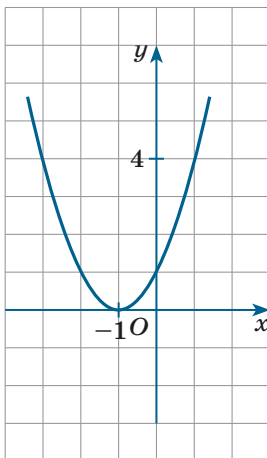


Рис. 7

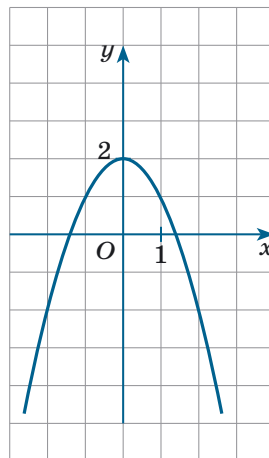


Рис. 8

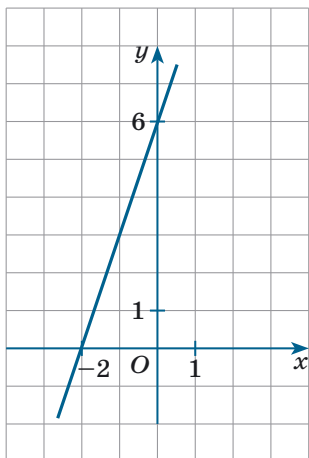


Рис. 9

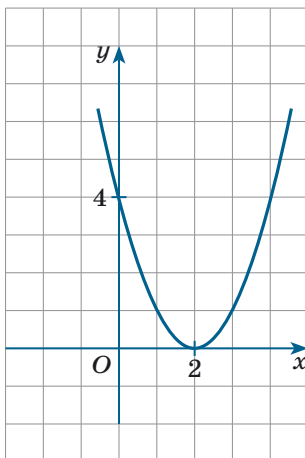


Рис. 10

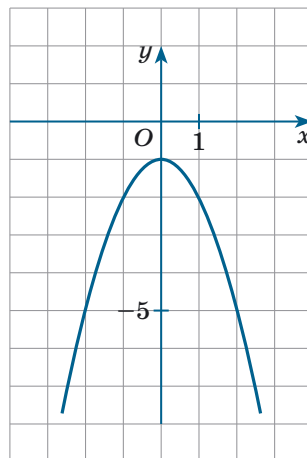


Рис. 11

- 2.2.** а) Рис. 12; в) рис. 14; д) рис. 16 (с. 16);
 б) рис. 13; г) рис. 15; е) рис. 17 (с. 16).

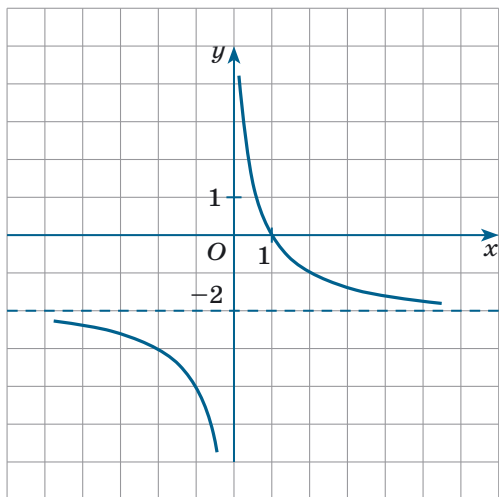


Рис. 12

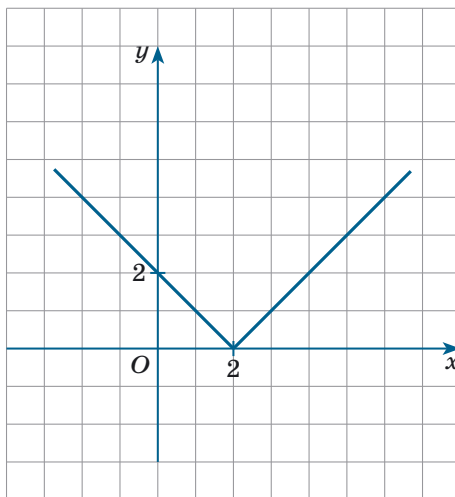


Рис. 13

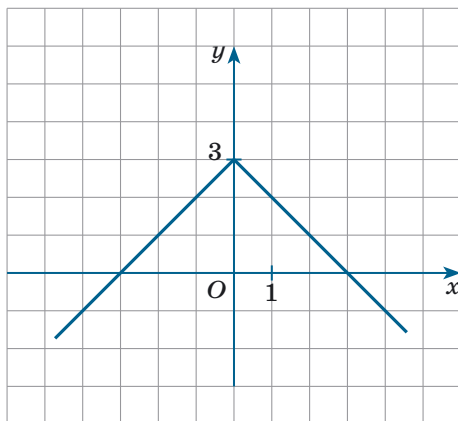


Рис. 14

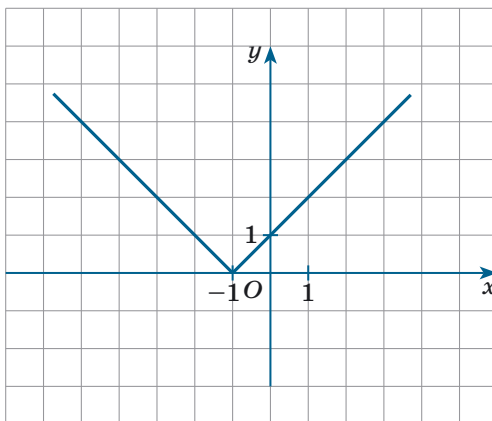


Рис. 15

Постройте график уравнения.

- 2.3.** а) $4x + 3y = 8$; г) $2x + 3y = 9$;
 б) $5x - 4y = 20$; д) $7x - 2y = 14$;
 в) $2x + 7y = 21$; е) $3x + 4y = 12$.

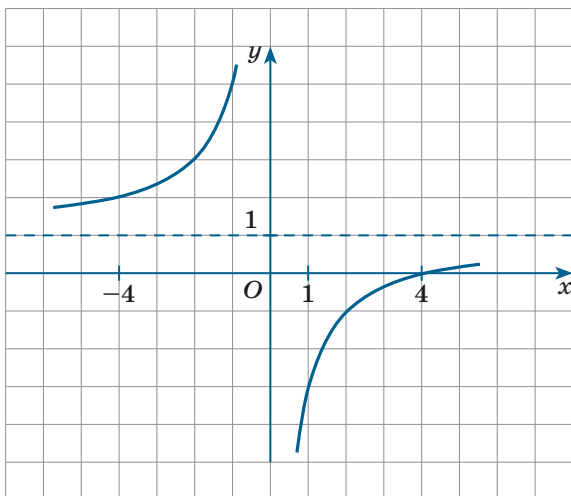


Рис. 16

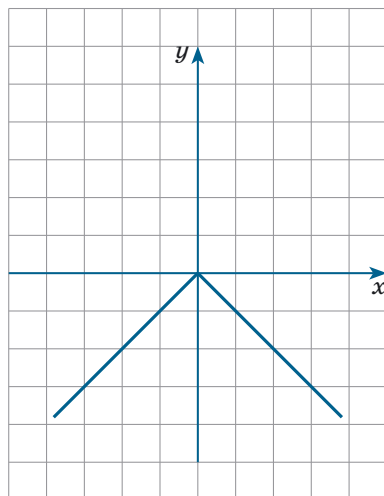


Рис. 17

2.4. а) $3y - x^2 = 6$;

б) $-x^2 - y + 2 = 0$;

в) $y - x^2 + 2x = 1$;

г) $4y + x^2 = 8$;

д) $2x^2 + y - 3 = 0$;

е) $x^2 - y + 3 = 4x$.

2.5. а) $\frac{4}{x} - y = 0$;

б) $xy - 2y = 0$;

в) $xy - 2x = -3$;

г) $\frac{1}{x} - \frac{y}{6} = 0$;

д) $xy + 4y = 0$;

е) $3x + xy = 6$.

2.6. а) $(2x + y + 4)(3x - y - 2) = 0$;

б) $(x - 5y - 10)(2y - x^2 + 1) = 0$;

в) $(xy - 4)(x + 2y - 1) = 0$;

г) $(2x - 3y + 6)(3x + 4y - 12) = 0$;

д) $(2x + 6y - 12)(3y - x^2 + 1) = 0$;

е) $(xy + 6)(2x - 3y - 6) = 0$.

ИКТ

2.7. а) $(\sqrt{x} - y)(y - x^2) = 0$;

б) $(|x| + y - 2)(xy - 2y - 4) = 0$;

в) $(|x + 1| - y - 2)(\sqrt{x} - y) = 0$;

г) $(xy - 6)(y + \sqrt{x}) = 0$;

д) $(2 - 0,5x^2 - y)(y - |x + 2|) = 0$;

е) $(|x| + y + 3)(\sqrt{x} - y - 2) = 0$.

- ИКТ 2.8.** а) $|y| = 3x$; г) $|y| = x - 2$;
б) $|y| = x^2 + 1$; д) $|y| = 2x^2$;
в) $|y| = |x|$; е) $|y| = |x| - 2$.

Упражнения для повторения

2.9. Можно ли утверждать, что $y > x$, если верно заданное неравенство:

- а) $x + 10 > y + 8$; в) $x - 3 \geq y - 5$;
б) $-5x < -5y$; г) $3x - 2 > 3y - 2$?

2.10. Проверьте справедливость утверждения:

- а) если $a > 2$, $b > 5$, то $3a + 4b > 26$;
б) если $a > 2b$, $b > c$, то $4a > 8c$;
в) если $a < 2$, $b < 3$, то $4a + 2b < 14$;
г) если $a < 2b$, $b < 3c$, то $3a < 18c$.

2.11. Дачники прошли от посёлка до станции 10 км. Сначала они шли со скоростью 4 км/ч, а затем увеличили скорость на 2 км/ч. Какое расстояние они могли пройти со скоростью 4 км/ч, чтобы успеть на поезд, который отправлялся со станции через 2 ч после их выхода из посёлка?

2.12. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{1}{a+2} + \frac{5}{a^2 - a - 6} + \frac{2a}{a-3} \right) \cdot \frac{a}{2a+1}$;
б) $\left(\frac{2}{b+1} + \frac{10}{b^2 - 3b - 4} + \frac{3b}{b-4} \right) : \frac{3b+2}{3}$.

§ 3. Уравнение окружности на координатной плоскости

В этом параграфе речь пойдёт о том, каким уравнением можно задать окружность на координатной плоскости. Окружность — это множество точек плоскости, равноудалённых от фиксированной точки; фиксированная точка — центр окружности. «Равноудалённых» — это значит находящихся от центра окружности на одном и том же расстоянии. А как находить расстояние на координатной плоскости между двумя точками? Об этом и пойдёт речь в теореме 1.

Теорема 1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ координатной плоскости xOy вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Доказательство. Соединим точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ отрезком и проведём прямые $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ (рис. 18). Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Длина катета AC равна расстоянию между точками x_1 и x_2 оси Ox , т. е. $AC = |x_2 - x_1|$. Длина катета BC равна расстоянию между точками y_1 и y_2 оси Oy , т. е. $BC = |y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е.

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2. \quad (1)$$

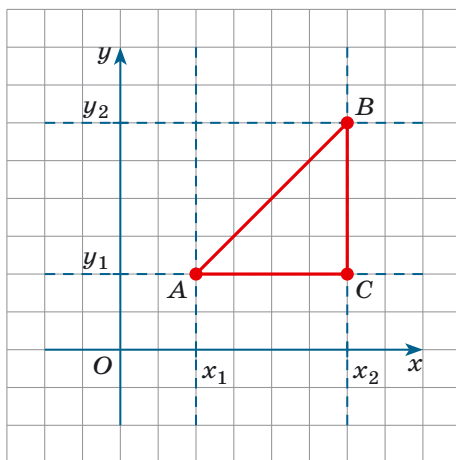


Рис. 18

Так как $|a|^2 = a^2$, то формулу (1) можно переписать в виде

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Значит, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Теорема доказана.

Вычислим, например, расстояние между точками $(7; 14)$ и $(-5; 9)$. Получим:

$$\sqrt{(-5 - 7)^2 + (9 - 14)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

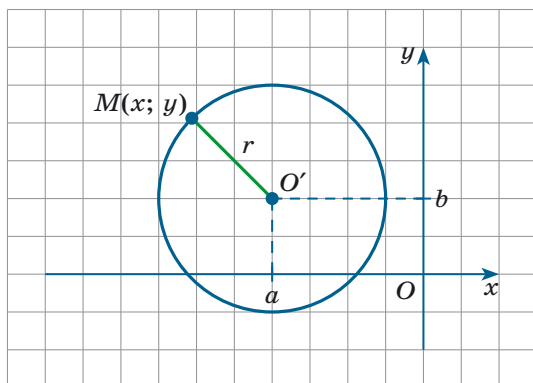


Рис. 19

Теорема 2. Графиком уравнения

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2)$$

на координатной плоскости xOy является окружность с центром в точке $O'(a; b)$ и радиусом r ($r > 0$) (рис. 19).

Доказательство. Возьмём любую точку $M(x; y)$ окружности. По теореме 1 $O'M = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. Но $O'M = r$, значит,

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \text{ т. е. } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Итак, координаты любой точки $M(x; y)$, принадлежащей окружности, удовлетворяют уравнению (2).

Если точка $P(x; y)$ не лежит на окружности, то либо $O'P < r$ (если точка P расположена внутри окружности), либо $O'P > r$ (если точка P расположена вне окружности). И в том и в другом случае уравнению (2) координаты точки P не удовлетворяют. Следовательно, точки окружности и только они удовлетворяют уравнению (2).

Пример Убедиться, что указанное уравнение задаёт окружность; указать радиус окружности, координаты её центра и построить окружность в координатной плоскости xOy :

а) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$; б) $x^2 + y^2 = 9$; в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.

Решение. а) Заданное уравнение имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; в данном случае $a = -2$, $b = 3$, $r = 1$. Значит, по теореме 2 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ — уравнение окружности с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом 1 (рис. 20).

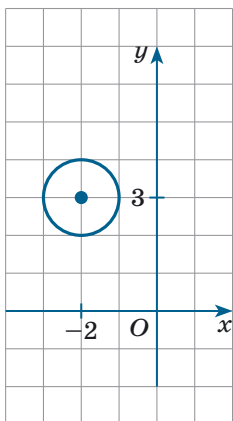


Рис. 20

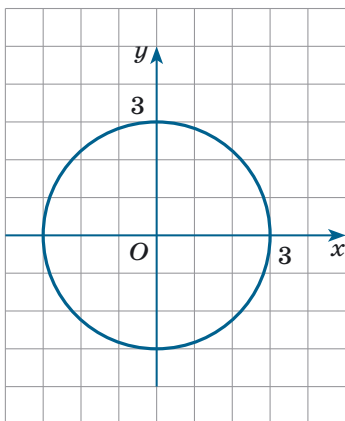


Рис. 21

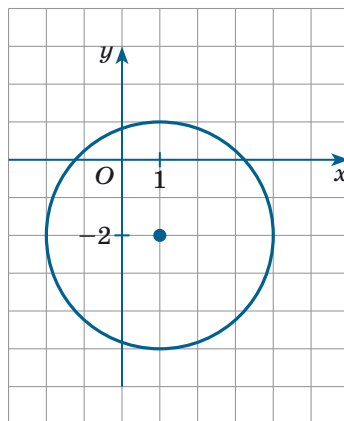


Рис. 22

б) Заданное уравнение имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; в данном случае $a = 0$, $b = 0$, $r = 3$. Значит, $x^2 + y^2 = 9$ — уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 3 (рис. 21).

в) В отличие от уравнений «а» и «б», где было видно, что даны уравнения окружности, в данном случае сразу ничего сказать нельзя, надо поработать с уравнением. Воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y &= 4; \\ (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 &= 4; \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 3^2. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что имеем уравнение окружности с центром в точке $(1; -2)$ и радиусом 3 (рис. 22).

Упражнения

3.1. Найдите расстояние между точками координатной плоскости:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| а) $A(2; 0)$ и $B(-3; 0)$; | г) $F(0; -4)$ и $G(0; 3)$; |
| б) $K(15; 0)$ и $L(0; -8)$; | д) $C(0; -12)$ и $D(-5; 0)$; |
| в) $M(7; -4)$ и $N(7; 6)$; | е) $R(5; -1)$ и $Q(-5; -1)$. |

3.2. Из данных трёх точек выберите пару точек, расстояние между которыми равно 10:

- а) $F(0; -4)$, $H(8; -2)$ и $G(0; 4)$;
 б) $K(3; 5)$, $M(-3; -3)$ и $L(5; -3)$;
 в) $M(5; 4)$, $T(4; -2)$ и $N(-2; -6)$;

- г) $C(-6; -6)$, $D(2; 0)$ и $E(-2; 0)$;
 д) $A(6; 2)$, $D(2; -2)$ и $B(-2; 8)$;
 е) $P(-3; 2)$, $R(5; -4)$ и $Q(-5; -4)$.

3.3. Найдите расстояние от начала координат до вершины параболы:

- а) $y = x^2 + 6x + 5$; г) $y = x^2 - 8x + 19$;
 б) $y = -x^2 + 8x - 19$; д) $y = -x^2 + 6x + 5$;
 в) $y = x^2 + 4x - 7$; е) $y = x^2 - 2x - 1$.

3.4. Найдите длину отрезка AB , где A и B — точки пересечения параболы и прямой, заданных уравнениями:

- а) $y = -x^2 + 1$ и $y = x - 5$;
 б) $y = x^2 + 4x - 8$ и $y = -2 - x$.

3.5. а) Вычислите длину диагонали прямоугольника $MNPO$, заданного координатами его вершин $M(-5; 4)$, $N(3; 4)$, $P(3; -2)$ и $O(-5; -2)$.

б) Докажите, что четырёхугольник $FGCD$, заданный координатами вершин $F(-2; 5)$, $G(1; 1)$, $C(-2; -3)$ и $D(-5; 1)$, является ромбом, и вычислите длину его стороны.

3.6. а) Вычислите длину диагонали квадрата $KLMN$, заданного координатами его вершин $K(-1; 3)$, $L(2; -1)$, $M(-2; -4)$ и $N(-5; 0)$.

б) Вычислите длину медианы CM треугольника ABC , заданного координатами его вершин $A(-3; 0)$, $B(8; -2)$ и $C(4; 1)$.

3.7. Найдите координаты центра и радиус окружности:

- а) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; г) $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 25$;
 б) $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$; д) $(x + 3)^2 + (y + 10)^2 = 49$;
 в) $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 18$; е) $(x + 9)^2 + (y - 6)^2 = 32$.

Постройте график уравнения.

- 3.8.** а) $x^2 + y^2 = 4$; г) $x^2 + y^2 = 9$;
 б) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$; д) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$;
 в) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$; е) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 36$.

- 3.9.** а) $x^2 + (y - 3)^2 = 16$; г) $(x - 4)^2 + y^2 = 4$;
 б) $(x + 2)^2 + y^2 = 36$; д) $x^2 + (y + 4)^2 = 25$;
 в) $x^2 + (y + 7)^2 = 1$; е) $(x - 6)^2 + y^2 = 9$.

3.10. Составьте уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом:

- а) 7; б) $\frac{2}{3}$; в) $2\sqrt{3}$; г) 9; д) $\frac{1}{2}$; е) $3\sqrt{5}$.

3.11. Составьте уравнение окружности:

- а) с центром в точке $A(2; 4)$ и радиусом 4;
- б) с центром в точке $B(5; -6)$ и радиусом 0,5;
- в) с центром в точке $C(0; 8)$ и радиусом $\sqrt{3}$;
- г) с центром в точке $A(3; 1)$ и радиусом 8;
- д) с центром в точке $B(-7; 2)$ и радиусом 1,5;
- е) с центром в точке $C(7; 0)$ и радиусом $\sqrt{11}$.

3.12. Составьте уравнение окружности:

- а) с центром в точке $(-3; -4)$, касающейся оси Oy ;
- б) с центром в точке $(9; -12)$, проходящей через начало координат;
- в) с центром в точке $(2; -3)$, проходящей через точку $(1; -1)$;
- г) с центром в точке $(4; 5)$, касающейся оси Ox ;
- д) с центром в точке $(5; -12)$, проходящей через начало координат;
- е) с центром в точке $(-3; 4)$, проходящей через точку $(-1; 1)$.

3.13. Составьте уравнение окружности, изображённой на указанном рисунке:

- а) рис. 23; в) рис. 25; д) рис. 27;
- б) рис. 24; г) рис. 26; е) рис. 28.

3.14. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок MN и если:

- а) $M(-7; 6)$ и $N(3; -4)$; б) $M(-5; -5)$ и $N(3; 1)$.

3.15. Составьте уравнение окружности:

- а) с центром на оси Oy и проходящей через точки $(8; 2)$ и $(-6; 4)$;
- б) с центром на оси Ox и проходящей через точки $(-1; 0)$ и $(1; -4)$.

3.16. Найдите координаты точек пересечения прямой и окружности:

- а) $y = 0$ и $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$;
- б) $x = 2$ и $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$;
- в) $y = -5$ и $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$;
- г) $x = 0$ и $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
- д) $y = 3$ и $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$;
- е) $x = -4$ и $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

3.17. Постройте множество точек, удовлетворяющих условию:

- а) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 < 9$; г) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 > 16$;
- б) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 \geq 4$; д) $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 \leq 1$;
- в) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 \leq 16$; е) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 \geq 25$.

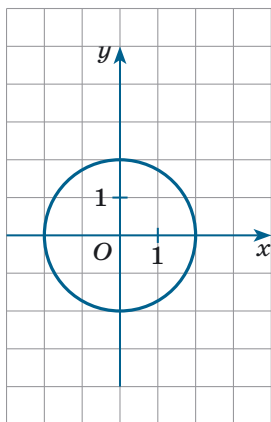


Рис. 23

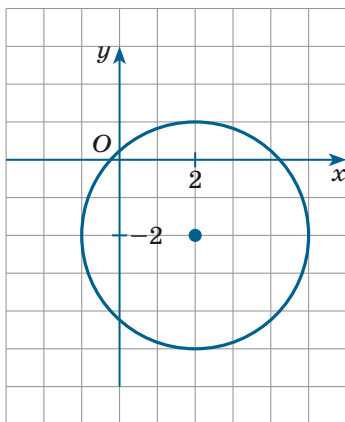


Рис. 24

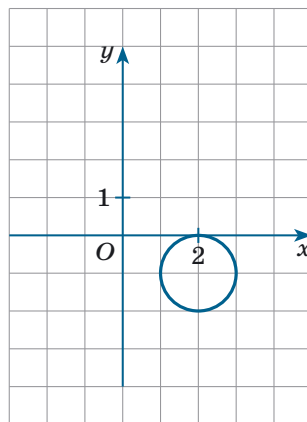


Рис. 25

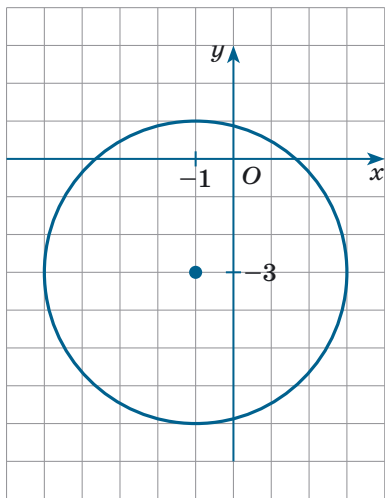


Рис. 26

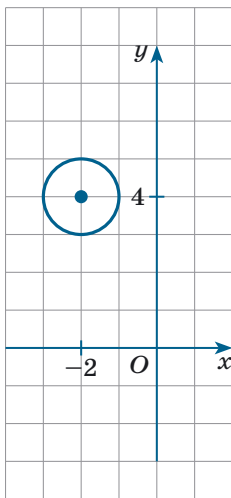


Рис. 27

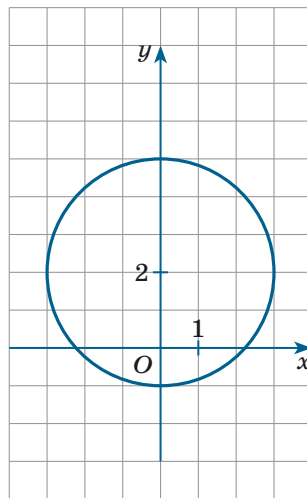


Рис. 28

ИКТ 3.18. Постройте полуокружность:

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

г) $y = \sqrt{16 - x^2}$;

б) $y = -\sqrt{25 - (x - 3)^2}$;

д) $y = -\sqrt{36 - (x + 1)^2}$;

в) $y = \sqrt{24 - x^2 - 2x}$;

е) $y = 1 - \sqrt{5 - x^2 + 4x}$.

ИКТ 3.19. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + y^2 + 4x = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 5$;

д) $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 5$;

в) $x^2 + y^2 + 8x + 16y + 79 = 0$;

е) $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$.

ИКТ 3.20. При каком значении параметра p график уравнения $|x| + y + p = 0$ имеет с окружностью $x^2 + (y + 1)^2 = 4$:

а) единственную точку пересечения;

б) более двух точек пересечения?

3.21. а) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $O(0; 0)$, $P(4; 0)$ и $T(0; 3)$.

б) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 0)$, $B(0; 3)$ и $C(4; -5)$.

Упражнения для повторения

3.22. Решите систему линейных уравнений:

а)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x - 3y = -9; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} -7x + 4y = 9, \\ 3x - y = -6; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x + y = -12, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 42, \\ 3x - y = 12. \end{cases}$$

3.23. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $3, \sqrt{10}, 2\sqrt{3}, \frac{13}{4}$;

в) $2, \frac{\sqrt{13}}{2}, \sqrt{3}, \frac{18}{11}$;

б) $-5, -\frac{14}{3}, -2\sqrt{7}, -\sqrt{26}$;

г) $-4\sqrt{3}, -3\sqrt{7}, -5\sqrt{2}, -7$.

3.24. а) Дано уравнение $x^2 + 2px - 32 = 0$. При каком значении параметра p один из корней уравнения равен 4? Найдите второй корень уравнения.

б) Дано уравнение $x^2 - 5x + p = 0$. При каком значении параметра p один из корней уравнения равен 8? Найдите второй корень уравнения.

3.25. Из города A в город B , находящийся на расстоянии 240 км от A , выехал автобус со скоростью 54 км/ч. Через 40 мин вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. Прибыв в B , автомобиль тотчас повернул обратно. На каком расстоянии от A автомобиль на обратном пути встретился с автобусом?