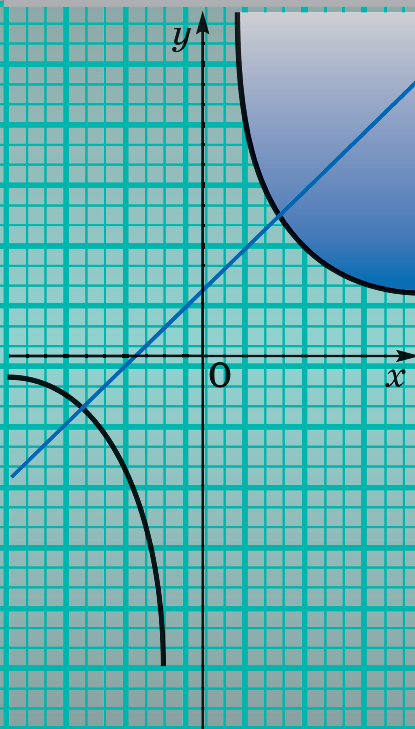




МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра

9



УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

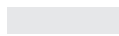
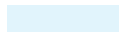
Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников,
А. В. Шевкин

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 432 от 14.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 119 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 109-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Условные обозначения:

-  — задания, предназначенные для устной работы
-  — задания повышенной трудности
-  — начало необязательного материала внутри пункта
-  — конец необязательного материала внутри пункта

Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций :
А45 издание в pdf-формате / [С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 9-е изд., стер. — Москва :
Просвещение, 2022. — 335 с. : ил. — (МГУ — школе).

ISBN 978-5-09-101259-0 (электр. изд.). — Текст : электрон-
ный.

ISBN 978-5-09-087635-3 (печ. изд.).

Данный учебник является заключительной частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и переработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС, и дать учащимся хорошую подготовку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной программы или программы для классов с углублённым изучением математики.

УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101259-0 (электр. изд.) © Издательство «Просвещение», 2014, 2019
ISBN 978-5-09-087635-3 (печ. изд.) © Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2014, 2019
Все права защищены

$x^2 - 3x + 2$ НЕРАВЕНСТВА

При изучении материала главы 1 вам предстоит научиться решать неравенства — линейные и второй степени, изучить метод интервалов для решения рациональных неравенств, который будет часто использоваться не только в 9 классе, но и в старших классах.

§ 1. Линейные неравенства с одним неизвестным

1.1. Неравенства первой степени с одним неизвестным

Неравенство вида

$$kx + b > 0 \quad (1)$$

или

$$kx + b < 0, \quad (2)$$

где k и b — данные числа, причём $k \neq 0$, называют **неравенством первой степени с одним неизвестным x** .

Число k называют **коэффициентом** при неизвестном, а число b — **свободным членом** неравенств (1) и (2).

Решением неравенства с одним неизвестным x называют такое число x_0 , при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Здесь и далее рассматриваются неравенства с неизвестным x , хотя вместо x можно писать любую букву: $t, v, y, \dots$.

Пример 1. Решим неравенство

$$2x + 5 < 0. \quad (3)$$

Чтобы его решить, можно рассуждать так.

Пусть некоторое число x_0 есть решение неравенства (3). Подставим его вместо x в неравенство (3). Получим верное числовое неравенство

$$2x_0 + 5 < 0. \quad (4)$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства число -5 , получим верное числовое неравенство

$$2x_0 < -5. \quad (5)$$

Деля это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство

$$x_0 < -\frac{5}{2}. \quad (6)$$

Итак, любое решение неравенства (3) является решением неравенства $x < -\frac{5}{2}$. Покажем, что любое решение неравенства $x < -\frac{5}{2}$ является решением неравенства (3). Пусть некоторое число x_0 есть решение неравенства $x < -\frac{5}{2}$. Тогда верно числовое неравенство (6).

Умножив это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство (5). Прибавляя далее к обеим частям неравенства (5) число 5, получим верное числовое неравенство (4), т. е. получим, что x_0 является решением неравенства (3).

Итак, множество всех решений неравенства (3) есть множество всех решений неравенства $x < -\frac{5}{2}$, т. е. множество всех решений неравенства (3) составляет интервал $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого неравенства первой степени. Из этих рассуждений вытекает следующий способ решения неравенства первой степени с одним неизвестным:

перенести свободный член этого неравенства в правую часть (изменив знак числа b на противоположный);
разделить обе части полученного неравенства на коэффициент при неизвестном (при этом если $k > 0$, то знак неравенства не изменяется; если $k < 0$, то знак неравенства изменяется на противоположный); полученное неравенство и определяет множество всех решений исходного неравенства.

Пример 2. Решим неравенство

$$-4x + 13 < 0. \quad (7)$$

Перенеся свободный член в правую часть, получим неравенство

$$-4x < -13.$$

Разделив обе части этого неравенства на отрицательное число -4 , получим неравенство

$$x > \frac{13}{4}$$

(обратите внимание на изменение знака неравенства). Таким образом, множество всех решений неравенства (7) составляет интервал $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

1. Изобразите на координатной оси интервал:

- а) $(-2; 7)$; б) $(-17; 34)$; в) $(1234; 1398)$;
 г) $(-\infty; 0)$; д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; -3)$;
 ж) $(2; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$; и) $\left(\frac{1}{3}; 0,5\right)$.

2. Изображённое на рисунке 1 множество чисел задайте в виде неравенства.

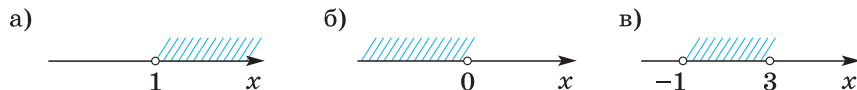


Рис. 1

3. Изобразите на координатной оси множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству (двойному неравенству):

- а) $x > 0$; б) $x < 3$; в) $x > 3579$;
 г) $x < -2$; д) $x > -1748$; е) $x < 0,06$;
 ж) $x > \sqrt{5}$; з) $x < \pi$; и) $0 < x < \sqrt{2}$;
 к) $-2 < x < -0,5$; л) $|x| < 1$; м) $|x| > 1$.

4. Какой знак ($=$, $\neq$, $<$, $>$) следует поставить между числами a и b , если их разность $a - b$:

- а) положительное число; б) отрицательное число;
 в) натуральное число; г) не равна нулю;
 д) равна нулю?

5. Какое число больше:

- а) a или $a + 3$; б) $b + 1$ или $b + 2$;
 в) $a - 5$ или $a + 2$; г) $b - 7$ или $b - 6$?

Здесь a и b — любые данные числа.

6. Сравните с нулём разность $x - a$, если: а) $x > a$; б) $x < a$.

7. Запишите какое-нибудь неравенство первой степени с одним неизвестным. Назовите коэффициент при неизвестном и свободный член этого неравенства.

- 8.** а) Что называют решением неравенства с одним неизвестным?
 б) Что значит решить неравенство с одним неизвестным?

9. Можно ли указать:

- а) наименьшее решение неравенства $x > 0$;
 б) наибольшее решение неравенства $x < -2$;
 в) наименьшее целое решение неравенства $x > -5$;
 г) наибольшее целое решение неравенства $x < 1$?

10. Является ли число 3 решением неравенства:

- а) $x > 0$; б) $x > -2$; в) $x < \pi$;
 г) $x < 3$; д) $x < \sqrt{10}$; е) $\sqrt{8,7} < x$?

Решите неравенство (11—25):

- 11.** а) $x - 1 > 0$; б) $x + 5 < 0$; в) $x - 0,5 < 0$;
 г) $3 + x > 0$; д) $7 + x > 0$; е) $x - 1\frac{1}{3} < 0$.

- 12.** а) $x + 4 > 7$; б) $x - 11 < -7$; в) $x + 7 > 7$;
 г) $x - 6 < 6$; д) $4 + x > 2$; е) $3 + x < -6$.

- 13.** а) $x - 2 > 0,2$; б) $x - 3,5 < 4$; в) $2,1 + x < 7$;
 г) $x - 2 > -0,6$; д) $x + 10,7 > 7,9$; е) $5,013 + x < 0,13$.

- 14.** а) $x - 3 < -\frac{1}{3}$; б) $x + \frac{1}{5} < 199$; в) $\frac{5}{7} + x > 2\frac{1}{2}$;
 г) $x - 2\frac{1}{2} < -1\frac{3}{5}$; д) $x + \frac{37}{90} < \frac{11}{18}$; е) $\frac{13}{48} + x > 7\frac{15}{16}$.

- 15.** а) $x - 3,6 > 2\frac{1}{3}$; б) $7,4 + x > 7\frac{2}{5}$; в) $x - 12\frac{1}{4} < 15,3$.

- 16.** а) $2x > 4$; б) $7x < -14$; в) $-5x < 100$;
 г) $-3x < 9$; д) $-2x > -2$; е) $-3x > -6$.

- 17.** а) $3x < 2$; б) $-2x < 11$; в) $-4x > -2$;
 г) $-5x > 1$; д) $-17x > -2$; е) $13x < 3$.

- 18.** а) $2x > 0$; б) $-2x < 0$; в) $-x < 2$;
 г) $-x < 0$; д) $-x > -2$; е) $-x > 1$.

- 19.** а) $\frac{1}{2}x < 3$; б) $\frac{3}{4}x < 1$; в) $-\frac{1}{3}x > -1$;
 г) $\frac{1}{5}x > 0$; д) $2x > \frac{2}{3}$; е) $-4x < \frac{8}{11}$.

- 20.** а) $\frac{2}{3}x < \frac{5}{6}$; б) $-\frac{4}{7}x > \frac{8}{7}$; в) $-2x < 1\frac{1}{3}$;
 г) $2\frac{1}{5}x > 3$; д) $1\frac{1}{2}x > -2\frac{1}{2}$; е) $-3\frac{2}{7}x < -3\frac{1}{7}$.

- 21.** а) $0,2x > 3$; б) $3x > 1,8$; в) $-0,001x < 1$.

22. а) $0,2x > \frac{2}{5}$; б) $1,5x < \frac{9}{10}$; в) $-1,1x < 4\frac{2}{5}$;
 г) $\frac{x}{2} > 3$; д) $\frac{x}{4} > \frac{7}{12}$; е) $-\frac{2x}{3} < -8$.
23. а) $2x - 4 > 0$; б) $3x - 1 < 0$; в) $-2x - 4 > 0$;
 г) $7x + 4 < 0$; д) $4x + 3 > 0$; е) $-4x + 3 < 0$.
24. а) $1 + \frac{2}{9}x < 0$; б) $\frac{4}{5} - 3x < 0$; в) $1\frac{1}{7} - \frac{4}{7}x > 0$;
 г) $4\frac{1}{3} - 8\frac{2}{3}x > 0$; д) $2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2} < 0$; е) $\frac{5}{7}x - \frac{5}{7} > 0$.
25. а) $0,3x - 20 < 0$; б) $4x + 0,1 > 0$;
 в) $1,35 - 27x > 0$; г) $0,15 - 150x < 0$;
 д) $-0,3x - 13 > 0$; е) $-0,17x - 51 < 0$.

1.2. Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным

Покажем, как можно, используя график линейной функции, решать неравенства вида

$$kx + b > 0 \quad (1)$$

или

$$kx + b < 0, \quad (2)$$

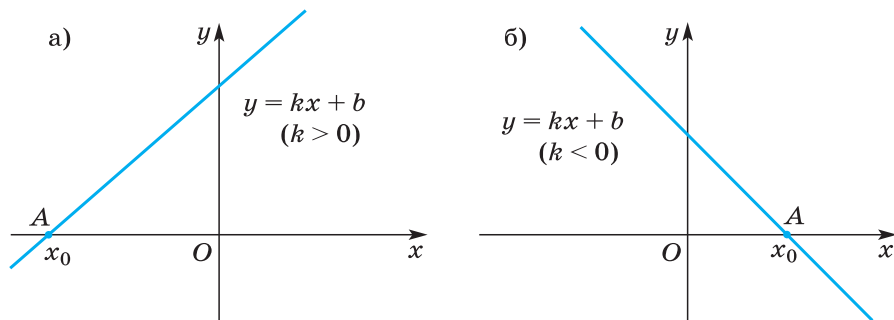
где k и b — данные числа и $k \neq 0$.

В декартовой системе координат xOy рассмотрим прямую

$$y = kx + b. \quad (3)$$

На рисунке 2, а изображена такая прямая при $k > 0$, а на рисунке 2, б — при $k < 0$.

Решить неравенство (1) — это значит найти все значения x , для каждого из которых соответствующая точка прямой $y = kx + b$ расположена выше оси Ox .



■ Рис. 2

Пусть точка A — точка пересечения прямой (3) с осью Ox . Абсциссу точки A обозначим через x_0 . Так как её ордината равна нулю, то x_0 удовлетворяет уравнению $0 = kx_0 + b$, откуда

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Обратимся к рисунку 2, а, соответствующему случаю $k > 0$. Мы видим, что точки прямой $y = kx + b$ расположены выше оси Ox для всех x , находящихся правее точки x_0 , т. е. для всех x из интервала $(x_0; +\infty)$.

Итак, при $k > 0$ множество решений неравенства (1) составляет интервал $(x_0; +\infty)$, а множество решений неравенства (2) составляет интервал $(-\infty; x_0)$.

При $k < 0$ (рис. 2, б), наоборот, множество решений неравенства (1) составляет интервал $(-\infty; x_0)$, а множество решений неравенства (2) составляет интервал $(x_0; +\infty)$.

Пример 1. Используя график линейной функции, решим неравенства

$$2x + 1 > 0 \quad (4)$$

и

$$2x + 1 < 0. \quad (5)$$

Рассмотрим в декартовой системе координат xOy прямую

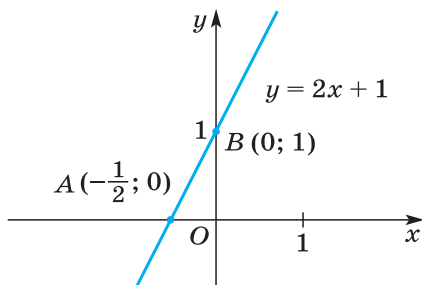
$$y = 2x + 1, \quad (6)$$

которую можно построить по двум точкам. В качестве первой точки возьмём точку пересечения нашей прямой с осью Ox . Полагая в формуле (6) $y = 0$, получим уравнение $0 = 2x + 1$. Его решение

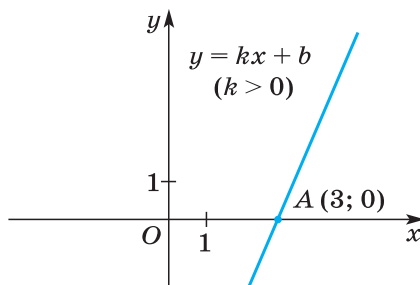
$x_0 = -\frac{1}{2}$ есть абсцисса точки A — точки пересечения прямой с осью Ox . Итак, $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

В качестве второй точки можно взять точку B пересечения нашей прямой с осью Oy . Её абсцисса $x = 0$, а ордината $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Итак, $B(0; 1)$.

Через точки A и B проводим прямую. Это и есть прямая $y = 2x + 1$ (рис. 3). Из рисунка 3 видно, что множество решений



■ Рис. 3



■ Рис. 4

неравенства (4) составляет интервал $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, а множество решений неравенства (5) — интервал $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$kx + b > 0, \quad (7)$$

если известно, что прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $A(3; 0)$ и её угловой коэффициент положителен.

Учитывая, что угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ положителен и прямая пересекает ось Ox в точке $A(3; 0)$, можно показать (схематически), как расположена прямая в координатной плоскости (рис. 4). Из этого рисунка видно, что множество всех решений неравенства (7) составляет интервал $(3; +\infty)$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

26. Постройте график линейной функции:

- а) $y = x - 4$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -3x - 3$;
г) $y = 5x - 6$; д) $y = -0,5x + 1,5$; е) $y = 1\frac{1}{2}x - 0,3$.

С помощью графика определите интервал, на котором функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

27. Запишите интервал, на котором линейная функция, график которой изображён на рисунке 5, принимает положительные значения; отрицательные значения.

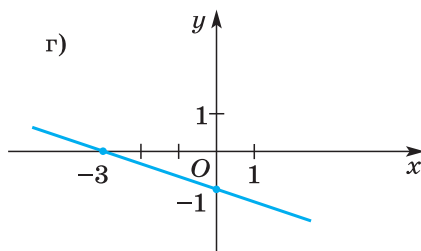
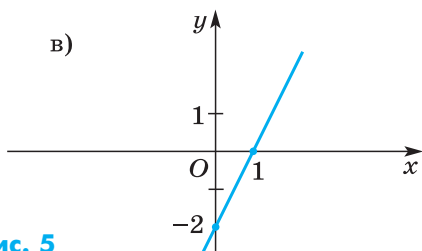
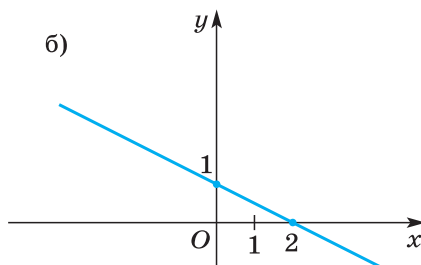
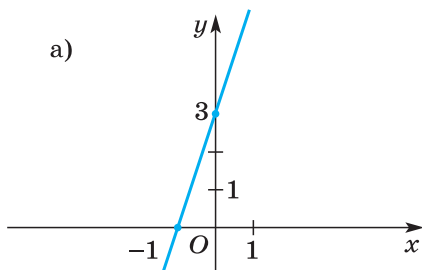


Рис. 5

- 28.** Как можно решить неравенство первой степени с одним неизвестным, используя график линейной функции?
- 29.** Решите неравенство, используя график линейной функции:
- а) $x + 2 > 0$; б) $-x + 2 > 0$; в) $2x - 1 < 0$;
 г) $-2x - 1 < 0$; д) $0,2x + 1 > 0$; е) $-\frac{1}{3}x + 5 < 0$;
 ж) $400x + 100 > 0$; з) $200x - 500 > 0$; и) $0,01x - 0,05 < 0$.

1.3. Линейные неравенства с одним неизвестным

Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа, называют **линейным неравенством с одним неизвестным x** .

Следующие неравенства могут служить примерами линейных неравенств с одним неизвестным x :

$$2x + 7 < x - 5, \quad 0x - 3 < 0, \quad 7 < 2x + 9, \\ 2x + 7 > 2x + 5, \quad 3x + 2 + x > x - 1 + x, \quad 3x + 2 < 0.$$

Ясно, что любое неравенство первой степени есть частный случай линейного неравенства.

Члены многочленов в левой и правой частях линейного неравенства называют **членами этого неравенства**.

Два неравенства с одним неизвестным x называют **равносильными**, если любое решение первого неравенства является решением второго и, наоборот, любое решение второго является решением первого. Любые неравенства, не имеющие решений, считаются равносильными.

При решении неравенств пользуются утверждениями 1—4.

1. Члены неравенства можно переносить с противоположными знаками из одной части неравенства в другую.

Иначе говоря, если какой-нибудь член неравенства перенести с противоположным знаком из одной части неравенства в другую, то получится неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$2x - 7 < 0 \quad \text{и} \quad 2x < 7, \\ 3x + 5 > 2x - 9 \quad \text{и} \quad 3x - 2x + 5 > -9.$$

2. В неравенстве можно приводить подобные члены.

Иначе говоря, если в левой или правой части неравенства привести подобные члены, то получится неравенство, равносильное исходному.

Например, равносильны неравенства

$$3x - 4\frac{1}{2} + 5x - \frac{1}{2} > 0 \text{ и } 8x - 5 > 0,$$
$$2x + 3 - 1 < x - 2x + 2 \text{ и } 2x + 2 < -x + 2.$$

3. При умножении (или делении) неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на положительное число и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$\frac{1}{4}x > 2 \text{ и } x > 8,$$
$$3x + 5 < 0 \text{ и } x + \frac{5}{3} < 0.$$

4. При умножении (или делении) неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$7x - 3 > 0 \text{ и } -7x + 3 < 0,$$
$$5x + 4 < -3x + 2 \text{ и } -5x - 4 > 3x - 2.$$

Приведём примеры решения линейных неравенств с использованием утверждений 1—4.

Пример 1. Решим неравенство

$$4x - 7 < -2x + 5. \quad (1)$$

Перенеся все члены неравенства (1) в левую часть, получим неравенство

$$4x - 7 + 2x - 5 < 0,$$

равносильное неравенству (1). Приведя подобные члены в левой части полученного неравенства, получим неравенство первой степени с одним неизвестным

$$6x - 12 < 0,$$

равносильное неравенству (1). Все его решения составляют интервал $(-\infty; 2)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (1) составляет интервал $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$7x + 5 < 7x - 1. \quad (2)$$

Перенеся все члены неравенства (2) в левую часть, получим неравенство

$$7x + 5 - 7x + 1 < 0, \quad (3)$$

равносильное неравенству (2). Приведя подобные члены в левой части неравенства (3), получим неравенство

$$0 \cdot x + 6 < 0, \quad (4)$$

равносильное неравенству (3), а значит, и неравенству (2).

Очевидно, что нет ни одного числового значения x , которое удовлетворяло бы неравенству (4). Следовательно, неравенство (4), а значит, и равносильное ему неравенство (2) не имеют решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решим неравенство

$$9x - 5 > 9x - 6. \quad (5)$$

Перенеся все члены неравенства (5) в левую часть, получим неравенство

$$9x - 5 - 9x + 6 > 0, \quad (6)$$

равносильное неравенству (5). Приведя подобные члены в левой части неравенства (6), получим неравенство

$$0 \cdot x + 1 > 0,$$

равносильное неравенству (6), а значит, и неравенству (5).

Получилось неравенство, справедливое для любых значений x . Это означает, что решением неравенства (5) является любое действительное число, т. е. множество всех решений неравенства (5) составляет интервал $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

- 30.** а) Какое неравенство называют линейным неравенством с одним неизвестным?
 б) Что называют членами линейного неравенства?
 в) Какие неравенства называют равносильными?
 г) Сформулируйте утверждения о равносильности неравенств.
- 31.** Приведите неравенство к виду $kx + b > 0$ или $kx + b < 0$:
 а) $3x - 2 > 7x + 5$; б) $4 - 6x < 9 - x$;
 в) $7 > 0,2x$; г) $8 - 2(3 - 2x) < 1$.
- 32.** Является ли число, указанное в скобках, решением неравенства:
 а) $4x - 4 > 3x + 3$ (-1); б) $2 + 12x < -x + 3$ (-2);
 в) $5x - 7 > 9 + x$ (100); г) $72x - 18 < -13x$ (-10)?
- 33.** Являются ли равносильными неравенства:
 а) $2x - 1 > 6$ и $6 > 2x - 1$; б) $x < 3$ и $x + 2 < 5$;
 в) $2x > 4$ и $x < 2$; г) $2x > 5$ и $x - 7 > -2 - x$;
 д) $2 < 7 - x$ и $3x < 5 + 2x$; е) $3x - 7 > 5$ и $-3x + 7 < -5$?

Решите неравенство (34—41):

- 34.** а) $x + 4 > 5x$; б) $x - 2 < 3x$;
в) $2x + 1 < x$; г) $7x - 13 > 9x$.
- 35.** а) $2x - x - 1 < 2$; б) $3 < 7x - 5 - 4x$;
в) $5x - 2x - 8x + x - 12x > 7 - 2x$;
г) $8 - 9x > x - 3 - 3x + 4x + 15$.
- 36.** а) $x - 2 < x$; б) $x + 5 > x$;
в) $6 - 3x > 1 - 3x$; г) $12 + 4x < 3 - x + 5x$.
- 37.** а) $x + 2 < x$; б) $x - 5 > x$;
в) $4 - 8x < -8x + 4$; г) $x - 3 + 2x < 4 + 3x - 1$.
- 38.** а) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x + 5 > \frac{1}{3}x - 1$; б) $\frac{1}{2}x - 3 < 2 - \frac{1}{3}x$;
в) $1 - \frac{3}{7}x - 5 < 6 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{21}x$; г) $2x - \frac{3}{5}x > 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$;
д) $\frac{2}{5}x - 1 < \frac{3}{4}x - \frac{13}{20}$; е) $3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x < 14 + \frac{1}{12}x$.
- 39.** а) $1,2 - 2,6x - 5 > 3,2x - 3$;
б) $x - 1,2 < 0,3x + 3,7$;
в) $7 - 0,2x < 21,28 - 1,6x$;
г) $0,8x + 0,12 - 0,3x > 76,2 - 0,1x + 0,6x$;
д) $1,52 - 2,8x < 1,72 - 5,2x$;
е) $0,014 - 12,5x > 1,25 - 0,5x + 1,086 - 12x$.
- 40.** а) $2x + (3x - 1) > 4$; б) $x - 16 < (5 - 2x) - x - 1$;
в) $2x - (x - 1) < 3$; г) $(2x - 3) - (x + 1) > 1$;
д) $(x + 1) - (2x + 3) - (1 - 7x) < x - (8 - 5x)$;
е) $(3x - 11) - (5 - 9x) + (x - 1) > 1 - 4x - (12 + x)$.
- 41.** а) $2(x - 1) < 4$; б) $3(2x - 1) > 12$;
в) $4(1 + x) < 8 - 4x$; г) $25 - 10x > -5(2x - 7)$.
- 42. Доказываем.** Докажите, что данное неравенство равносильно линейному неравенству, и найдите все его решения:
а) $x(2 - x) < (3 - x)(3 + x)$; б) $3(x - 1)(x + 1) > 3(1 + x^2)$;
в) $(x - 2)(x - 3) + (4 - x)(x + 2) > 0$;
г) $(2x - 1)(x + 2) - (x - 5)(2x + 1) > 0$.

43. Решите неравенство:

- а) $\frac{x-1}{3} < 1$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$;
в) $\frac{2x}{3} < \frac{x}{4} - 1$; г) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{3} > 8$;
д) $\frac{x-4}{5} > 2 - \frac{x}{3}$; е) $\frac{2x+1}{4} + 2 < \frac{3x+2}{3}$;
ж) $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{4} < \frac{x}{6} + \frac{x-2}{3}$; з) $\frac{7x-2}{4} > 1 - \frac{x-1}{3} + 2\frac{1}{12}x$.

- 44.** Может ли неравенство первой степени с одним неизвестным:
 а) быть верным при любом значении неизвестного;
 б) не иметь решений?
- 45.** Может ли линейное неравенство с одним неизвестным:
 а) быть верным при любом значении неизвестного;
 б) не иметь решений?
- 46.** Найдите область определения функции:
 а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; в) $y = \frac{5x}{\sqrt{1-x}}$.

1.4. Системы линейных неравенств с одним неизвестным

Если требуется найти все числа x , каждое из которых есть решение одновременно нескольких данных линейных неравенств с одним неизвестным x , то говорят, что надо решить **систему линейных неравенств с одним неизвестным x** . Значение x , являющееся решением каждого неравенства системы, называют **решением системы неравенств**.

Для того чтобы решить систему линейных неравенств, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений — она и будет множеством всех решений данной системы.

Обычно неравенства системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой.

Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Пример 1. Решим систему неравенств

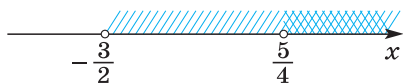
$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ -4x + 5 < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решив первое неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Решив второе неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Теперь найдём те значения x , для которых одновременно превращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (1), т. е. найдём общую часть интервалов

$\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ и $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Для этого отметим на координатной оси Ox оба интервала. Из рисунка 6 видно, что общая часть этих интервалов есть интервал $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Следовательно, множество всех решений системы неравенств (1) составляет интервал $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.



■ Рис. 6

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 5x - 23 < 0, \\ 12x - 13 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решив каждое неравенство системы (2), найдём, что множеством всех решений первого неравенства являются все x , меньшие $\frac{23}{5}$ ($x < \frac{23}{5}$), а множеством всех решений второго — все x , большие $\frac{13}{12}$ ($x > \frac{13}{12}$).



■ Рис. 7

Множеством всех решений системы (2) будет множество всех тех x , для каждого из которых одновременно превращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (2). Следовательно, это будут те x , которые больше чем $\frac{13}{12}$, но меньше чем $\frac{23}{5}$, т. е. все x из интервала $\frac{13}{12} < x < \frac{23}{5}$ (рис. 7).

Итак, множество всех решений системы (2) составляет интервал $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 2x - 3 < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решениями первого неравенства системы (3) являются все $x > 5$, а решениями второго — все $x < \frac{3}{2}$.



■ Рис. 8

Решениями системы (3) могут быть только те x , которые больше чем 5, но меньше чем $\frac{3}{2}$. Ясно, что таких x не существует (рис. 8). Следовательно, система (3) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Систему неравенств иногда можно записать в виде двойного неравенства. Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7 \end{cases} \quad (4)$$

можно записать в виде двойного неравенства

$$0 < 2x - 5 < 7. \quad (5)$$

Поэтому двойное неравенство можно решать двумя способами.

I способ. Запишем двойное неравенство (5) в виде системы неравенств (4) и решим эту систему:

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 5, \\ 2x < 7 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2,5, \\ x < 6, \end{cases}$$

т. е. $2,5 < x < 6$.

II способ. Решаем двойное неравенство (5) следующим образом. Прибавим к каждой его части число 5:

$$5 < 2x < 12. \quad (6)$$

Каждую часть двойного неравенства (6) умножим на положительное число 0,5:

$$2,5 < x < 6.$$

Следовательно, решения двойного неравенства (5) составляют интервал $(2,5; 6)$.

Заметим, что на самом деле второй способ решения двойного неравенства есть краткая запись первого способа.

47. Что значит решить систему линейных неравенств с одним неизвестным?

48. Найдите хотя бы одно общее решение неравенств:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| а) $x > 3$ и $x > 2$; | б) $x < -2$ и $x < -1$; |
| в) $x + 1 > 0$ и $x - 1 > 0$; | г) $x - 2 < 0$ и $x + 2 < 0$; |
| д) $2x > -4$ и $x + 1 < 0$; | е) $3x < 9$ и $x + 3 > 0$. |

Отметьте на координатной оси все решения системы неравенств, если они существуют (**49—51**):

- 49.** а) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x > 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -5. \end{cases}$

50. а) $\begin{cases} x < 7, \\ x < 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -1, \\ x < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < -5, \\ x < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -10, \\ x < -16. \end{cases}$

51. а) $\begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -5, \\ x > -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 4, \\ x < 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -5. \end{cases}$

52. Запишите какую-либо систему неравенств, все решения которой образуют интервал, отмеченный на рисунке 9 двойной штриховкой.

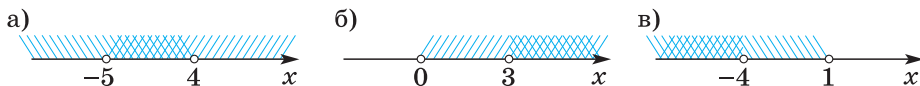


Рис. 9

53. Для неравенства $2x < 1$ подберите другое неравенство так, чтобы система этих неравенств:

- а) не имела решений;
б) имела множеством всех решений интервал $(-\infty; 0,5)$.

Решите систему неравенств (54—55):

54. а) $\begin{cases} 3 > x, \\ x < 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x > 1, \\ -7 < x + 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x > 6, \\ 1 > 3 - 2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6 - 2x > 5, \\ 3 - 2x > 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 2x - 8 > 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x + 3 < 8, \\ 7 - 3x > 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x - 1 > 3x + 1, \\ 5x - 1 > 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x < x - 6, \\ 2 > 5 + 3x. \end{cases}$

55. а) $\begin{cases} 2x + 7 > 3 - x, \\ \frac{1}{3}x - 1 > 2x - \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{3}x > 8, \\ \frac{3}{4}x - 1 > \frac{3}{5}x - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < 1, \\ 4-x > \frac{x-5}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} > \frac{3-x}{2}, \\ \frac{x}{7} - 1 < \frac{2-8x}{4}. \end{cases}$

56. а) Найдите все x , для каждого из которых значение функции $y = 2x - 3$ больше значения функции $y = -x + 4$.

б) Найдите все x , для каждого из которых значение функции $y = 1 - x$ больше значения функции $y = 0,5x + 5$.

57. а) Найдите все x , для каждого из которых функции $y = 3x$ и $y = 1 + x$ одновременно принимают отрицательные значения.

б) Найдите все x , для каждого из которых функции $y = 0,4x + 1$ и $y = -2x + 3$ одновременно принимают положительные значения.

Оглавление

ГЛАВА 1. Неравенства

§ 1. Линейные неравенства с одним неизвестным	5
1.1. Неравенства первой степени с одним неизвестным	—
1.2. Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным	9
1.3. Линейные неравенства с одним неизвестным	12
1.4. Системы линейных неравенств с одним неизвестным	16
1.5*. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля	21
§ 2. Неравенства второй степени с одним неизвестным	26
2.1. Понятие неравенства второй степени с одним неизвестным	—
2.2. Неравенства второй степени с положительным дискриминантом	28
2.3. Неравенства второй степени с дискриминантом, равным нулю	32
2.4. Неравенства второй степени с отрицательным дискриминантом	35
2.5. Неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени	37
§ 3. Рациональные неравенства	40
3.1. Метод интервалов	—
3.2. Решение рациональных неравенств	45
3.3. Системы рациональных неравенств	50
3.4. Нестрогие неравенства	53
3.5*. Замена неизвестного при решении неравенств	58
Дополнения к главе 1	61
1. Доказательство числовых неравенств	—
2. Производные линейной и квадратичной функций	66
3. Исторические сведения	74

ГЛАВА 2. Степень числа

§ 4. Функция $y = x^n$	75
4.1. Свойства и график функции $y = x^n$, $x \geq 0$	—
4.2. Свойства и графики функций $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$	77
§ 5. Корень степени n	81
5.1. Понятие корня степени n	—
5.2. Корни чётной и нечётной степеней	82
5.3. Арифметический корень степени n	87
5.4. Свойства корней степени n	93
5.5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$	97
5.6*. Корень степени n из натурального числа	101
5.7*. Иррациональные уравнения	104

Дополнения к главе 2	109
1. Понятие степени с рациональным показателем	—
2. Свойства степени с рациональным показателем	112
3. Исторические сведения	117

ГЛАВА 3. Последовательности

§ 6. Числовые последовательности и их свойства	119
6.1. Понятие числовой последовательности	—
6.2. Свойства числовых последовательностей	123
§ 7. Арифметическая прогрессия	126
7.1. Понятие арифметической прогрессии	—
7.2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии	130
§ 8. Геометрическая прогрессия	133
8.1. Понятие геометрической прогрессии	—
8.2. Сумма первых n членов геометрической прогрессии	136
8.3*. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	138
Дополнения к главе 3	142
1. Метод математической индукции	—
2. Исторические сведения	147

ГЛАВА 4. Тригонометрические формулы

§ 9*. Угол и его мера	149
9.1*. Понятие угла	—
9.2*. Градусная мера угла	152
9.3*. Радианная мера угла	156
§ 10*. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла	159
10.1*. Определение синуса и косинуса угла	—
10.2*. Основные формулы для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$	165
10.3*. Тангенс и котангенс угла	170
Дополнения к главе 4	175
1. Косинус разности и косинус суммы двух углов	—
2. Формулы для дополнительных углов	179
3. Синус суммы и синус разности двух углов	180
4. Сумма и разность синусов и косинусов	182
5. Формулы для двойных и половинных углов	185
6. Произведение синусов и косинусов	191
7. Исторические сведения	193

ГЛАВА 5. Элементы приближённых вычислений, статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§ 11. Приближения чисел	194
11.1. Абсолютная погрешность приближения	—
11.2. Относительная погрешность приближения	198

11.3*. Приближения суммы и разности	202
11.4*. Приближение произведения и частного	206
11.5*. Приближённые вычисления и калькулятор	210
§ 12. Описательная статистика	212
12.1. Способы представления числовых данных	—
12.2. Характеристики числовых данных	217
§ 13. Комбинаторика	222
13.1. Задачи на перебор всех возможных вариантов	—
13.2. Комбинаторные правила	224
13.3. Перестановки	227
13.4. Размещения	228
13.5. Сочетания	230
§ 14. Введение в теорию вероятностей	232
14.1. Случайные события	—
14.2. Вероятность случайного события	236
14.3. Сумма, произведение и разность случайных событий	240
14.4. Несовместные события. Независимые события	243
14.5. Частота случайных событий	246
Дополнения к главе 5	248
1. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля	—
2. Высказывания	250
3. Исторические сведения	254
Задания для повторения	257
Задания для самоконтроля по программе 7—9 классов	305
Задания на исследование	315
Список дополнительной литературы	317
Предметный указатель	319
Ответы	321