

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

9

КЛАСС

$$y = ax^2$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$a-h \leq x \leq a+h$$

$$ax^2 + bx + c > 0, a \neq 0$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

БАЗОВЫЙ
УРОВЕНЬ

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

М34

Учебник (16-е издание, стереотипное соответствует 15-му, переработанному) допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Авторы:

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 9-й класс : базовый уровень : учеб-
М34 **ник : издание в pdf-формате / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк,**
К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. —
16-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2024. — 255, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-09-116446-6 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-112135-3 (печ. изд.).

Данный учебник является заключительной частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных организаций. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС ООО, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены новые по форме задания: задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-116446-6 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-112135-3 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2014, 2023

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение», 2014, 2019

Все права защищены



Дорогие девятиклассники!

В этом году вам предстоит рассмотреть ряд новых тем из курса алгебры. Расширятся известные вам сведения об уравнениях и неравенствах. Вы получите представление об особенностях таких последовательностей, как арифметическая и геометрическая прогрессии, изучите свойства квадратичной функции. Также вы сможете попрактиковаться в решении задач практического содержания.

В учебнике подробно разъясняется новый материал, приводятся образцы решения задач. Проверить, как вы усвоили этот материал, помогут «Контрольные вопросы и задания», помещённые в конце каждого параграфа. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса алгебры 7—8 классов».

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что ваше внимание привлекут задачи-исследования и задания для работы в парах, при выполнении которых вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей, чётко формулировать и отстаивать свою позицию. При подготовке к государственной итоговой аттестации по алгебре вам помогут включённые в каждый пункт учебника задания для повторения, а также помещённые в конце учебника «Упражнения для повторения курса 7—9 классов».

После окончания 9 класса вам придётся сделать выбор, где вы будете продолжать образование. Учащимся, которые хотят обучаться в классах с повышенной математической подготовкой, советуем обратить внимание на более сложные задания, включённые в каждый пункт учебника и помеченные специальным знаком, а также на дополнительные пункты под рубрикой «Для тех, кто хочет знать

больше», помещённые в конце каждой главы. Специально для учащихся, увлечённых математикой, в конце учебника предлагаются «Задачи повышенной трудности». Решение таких задач поможет не только расширить кругозор, но и подготовиться к участию в математических олимпиадах.

Учащимся, которым любопытно знать, как зарождался и развивался тот или иной раздел математики, рекомендуем прочитать в учебнике «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении курса алгебры и предстоящей государственной итоговой аттестации.

В учебнике используются следующие условные обозначения:



— текст, который нужно запомнить



— материал, который важно знать



— начало решения задачи



— окончание решения задачи



— начало обоснования утверждения или вывода формулы



— окончание обоснования утверждения или вывода формулы

11.

— задание обязательного уровня

27.

— задание повышенной трудности



— упражнения для повторения



Глава I ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

При изучении главы вы вспомните основные числовые множества и соотношения между ними. В центре внимания будет множество действительных чисел: перечислены свойства действий над действительными числами, рассмотрен общий способ сравнения действительных чисел. Вы познакомитесь с такими понятиями, как абсолютная и относительная погрешности приближённого значения. Особое место в главе занимают задачи практического содержания, при решении которых вы сможете ещё раз убедиться в том, как тесно математика связана с реальной жизнью.

§ 1 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Действия над действительными числами

Современные знания о числах и способах вычислений складывались на протяжении многих столетий. Стимулом к развитию понятия числа послужили потребности человека, которые возникли у него в ходе практической деятельности.

Ещё в глубокой древности люди стали вести счёт предметов, что привело к возникновению натуральных чисел. Люди знали их так много тысячелетий тому назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер сказал: «Бог создал натуральные числа, а всё остальное — дело рук человека».

Множество натуральных чисел принято обозначать буквой N (первой буквой латинского слова *nature* — «природа»). В множестве натуральных чисел есть наименьшее число — это 1, но наибольшего числа нет: какое бы большое натуральное число мы ни взяли, найдётся натуральное число, большее взятого. Натуральных чисел *бесконечно много*.

В множестве N выполнимыми являются действия сложения и умножения: сумма и произведение любых двух натуральных чисел также будут числами натуральными. Иными словами, выполняя действия сложения и умножения, мы остаёмся в границах множества N . Говорят, что множество натуральных чисел *замкнуто* относительно сложения и умножения. В то же время действия вычитания и деления в множестве натуральных чисел выполняются не всегда: нельзя разделить одно натуральное число на другое, если первое число не кратно второму, и нельзя вычесть из меньшего натурального числа большее. Например, разность $60 - 70$ и частное $18 : 64$ натуральными числами не являются.

Потребность людей в измерении величин и то обстоятельство, что результат измерения не всегда выражается целым числом, привели к расширению множества натуральных чисел. Появились дробные числа. Сначала это были дроби, выражающие какую-либо долю единицы (половина, треть, четверть). Затем появились и другие дробные числа.

Однако не всегда толчком к развитию знаний о числах были исключительно практические потребности людей. К расширению понятия числа приводили также задачи самой математики. Именно так обстояло дело с появлением отрицательных чисел. Многие задачи, особенно решаемые с помощью уравнений, сводились к вычитанию из меньшего числа большего. Это потребовало введение новых чисел — отрицательных.

Наряду с отрицательными числами появилось и число нуль. Интересно, что долгое время нуль не считался полноправным числом. И лишь с введением системы координат нуль был признан числом.

Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 образуют множество целых чисел. Множество целых чисел обозначается буквой Z (первой буквой немецкого слова *Zahl* — «число»). В множестве целых чисел нет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Множество целых чисел включает в себя множество натуральных чисел: $N \subset Z$. Любое натуральное число является целым числом, но не любое целое число является натуральным. Например: $20 \in N$ и $20 \in Z$; $-20 \in Z$, но $-20 \notin N$.

Множество целых чисел Z замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения: сумма, разность и произведение двух целых чисел также являются целыми числами. Однако частное двух целых чисел будет целым числом только в том случае, когда делимое кратно делителю. Например, частное $36 : 9$ — целое число, а частное $36 : 8$ целым числом не является.

Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Множество рациональных чисел обозначается буквой Q (первой буквой английского слова *quotient*, что в переводе означает «частное»). Это связано с тем, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения (частного) $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, $n \neq 0$.

Множество рациональных чисел включает в себя множество целых чисел: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Любое целое число является рациональным числом, но не всякое рациональное число является целым. Например, $12 \in \mathbb{Z}$ и $12 \in \mathbb{Q}$; $1,2 \in \mathbb{Q}$, но $1,2 \notin \mathbb{Z}$.

В множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ выполнимы все четыре арифметических действия: сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (кроме случая деления на нуль) также являются рациональными числами.

● Докажем, например, что сумма двух рациональных чисел есть число рациональное.

Возьмём рациональные числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (m, n, p и q — целые числа и $n \neq 0, q \neq 0$). Составим сумму этих чисел и преобразуем её:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}.$$

Очевидно, что числитель дроби $mq + np$ — целое число, знаменатель дроби nq — целое число, отличное от нуля. Значит, сумма $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ равна отношению двух целых чисел, т. е. является рациональным числом. ○

Рациональные числа изображают точками на координатной прямой. Но если представить, что все рациональные точки нанесены на координатную прямую, то окажется, что на прямой есть точки, не имеющие рациональной координаты. Это, например, точка K — конец отрезка, равного диагонали единичного квадрата (рис. 1). Как известно из курса алгебры 8 класса, координата построенной точки K равна $\sqrt{2}$ и является иррациональным числом.

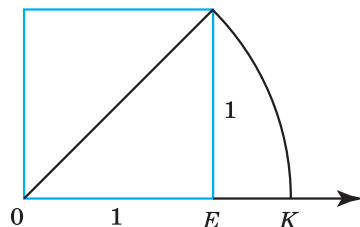


Рис. 1

Вообще, иррациональных чисел бесконечно много. Так, если n не является квадратом какого-либо натурального числа, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число. Например, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ — иррациональные числа.

Иррациональные числа нельзя записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число.

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\mathbb{R}$ (первой буквой английского слова *realis* — «реальный», «настоящий», «действительный»).

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ включает в себя множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, следовательно, любое рациональное

число является действительным числом. Но не всякое действительное число является рациональным. Например, $\frac{3}{7} \in \mathbf{Q}$ и $\frac{3}{7} \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$, но $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Таким образом, числовые множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ связаны отношением включения, которое может быть описано следующей цепочкой: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Эта цепочка проиллюстрирована на рисунке 2.

Как вы знаете, действительные числа изображают точками на координатной прямой, причём между точками прямой и множеством действительных чисел существует *взаимно-однозначное соответствие*, а именно, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число и, наоборот, каждому действительному числу соответствует точка координатной прямой.

При этом как бы близко на координатной прямой не были расположены две её точки, между ними существует бесконечное множество точек как с рациональными, так и с иррациональными координатами. Говорят, что множество действительных чисел обладает *свойством плотности*.

В множестве действительных чисел выполняются все четыре арифметических действия. При этом справедливы следующие свойства, которые называют *основными законами алгебры*:

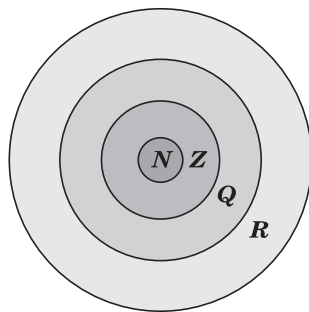


Рис. 2

$a + b = b + a$	— переместительное свойство сложения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	— сочетательное свойство сложения
$a + 0 = a$	— свойство нуля при сложении
$a + (-a) = 0$	— существование противоположного числа
$a \cdot b = b \cdot a$	— переместительное свойство умножения
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	— сочетательное свойство умножения
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	— распределительное свойство умножения относительно сложения
$a \cdot 1 = a$	— свойство единицы при умножении
$a \cdot 0 = 0$	— свойство нуля при умножении
$a \cdot \frac{1}{a} = 1 (a \neq 0)$	— существование обратного числа

Упражнения

1. Найдите десять рациональных чисел, которые заключены между числами 0,001 и 0,01. Найдите несколько иррациональных чисел, находящихся в этом промежутке.
2. Среди чисел 1,38; 2,5; 0; 1,(5); -1,68; 1,68; $2\frac{3}{4}$; 4,05; 1,4; 1,8; 1,75 найдите такие, которые заключены между иррациональными числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.
3. Какое из утверждений верно: «Если $a \in N$, то $a \in Z$ » или «Если $a \in Z$, то $a \in N$ »?
4. Найдите два значения x , при которых:
а) $x \in Z$ и $x \notin N$; б) $x \in Q$ и $x \notin Z$; в) $x \in Q$ и $x \notin N$.
5. Каким из множеств N , Z , Q и R принадлежит:
а) 6; б) -1,98; в) 0,5(87); г) π ?
6. Найдите три числа, которые принадлежат:
а) Z и R ; б) R и N ; в) Q и R ; г) N , Q и R .
7. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:
а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{7}{9}$; д) $1\frac{8}{11}$; е) $2\frac{4}{15}$.
В каждом случае выделите период, заключив его в скобки.
8. Представьте число в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Округлите результат до десятых; до сотых; до тысячных:
а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{3}{32}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{13}{64}$; д) $\frac{37}{15}$; е) $\frac{87}{65}$.
9. Проверьте, выполнив деление, что верно равенство:
а) $2,(3) = 2\frac{1}{3}$; в) $7,(18) = 7\frac{2}{11}$;
б) $0,1(6) = \frac{1}{6}$; г) $3,4(6) = 3\frac{7}{15}$.
10. Докажите, что разность, произведение и частное двух рациональных чисел (делитель отличен от нуля) — числа рациональные.
11. Запишите, используя знак $\in$, утверждение:
а) Число 13 является натуральным;
б) число 0,8 является рациональным;
в) число $\sqrt{3}$ является действительным;
г) число 585 является натуральным;
д) число 0 является целым.

12. Среди чисел

-2 ; 0 ; $\sqrt{2}$; $8,83$; π ; $\frac{1}{48}$; $-\sqrt{11}$; 200 ; -100 ; $\frac{2}{3}$; $-5,12$; $-\frac{3}{7}$; $0,0002$

найдите:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------|
| а) натуральные числа; | г) рациональные числа; |
| б) целые отрицательные числа; | д) иррациональные числа; |
| в) целые неотрицательные числа; | е) действительные числа. |

13. Какое множество является:

- а) объединением множеств N и Z , их пересечением;
б) объединением множеств Q и R , их пересечением;
в) объединением множеств N и Q , их пересечением;
г) объединением множеств Z и R , их пересечением?

14. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам:

$\sqrt{7}$; $-\sqrt{11}$; $\sqrt{12,3}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{3}$; 0 ; $1,6 + \sqrt{2}$.

15. Укажите пять значений переменной a , при которых число $\sqrt{a}$ является рациональным и пять значений, при которых это число является иррациональным.

16. Приведите пример числа, которое является:

- а) рациональным и нецелым;
б) действительным, но не рациональным;
в) целым, но не натуральным.

17. Прочитайте утверждения и выберите верные:

$-18 \in Z$;	$\frac{12}{15} \in N$;	$3,38 \notin Q$;
$205 \in Q$;	$2,5 \notin R$;	$2 + \sqrt{2} \in R$;
$\sqrt{3} \notin N$;	$\sqrt{2} \in Q$;	$3\frac{1}{4} + 0,25 \in R$;
$0,15 \in Z$;	$0,(8) \in R$;	$4 + \sqrt{4} \in Z$.

18. Запишите с помощью знака $\subset$ соотношения между множествами:

- а) Q и N ; в) R и N ;
б) Q и Z ; г) R и Z .



19. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству:

- | | | |
|-------------------|--------------------------|-----------------------|
| а) $x < 3$; | в) $x \geq 1$; | д) $0 < x \leq 2,5$; |
| б) $-2 < x < 4$; | г) $5 \leq x \leq 7,5$; | е) $x \geq 10,5$. |



20. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a = 1$, $b = 0,64$;
- б) $\sqrt{a-b}$, если $a = 1$, $b = 0,64$;
- в) $2\sqrt{a+4b}$, если $a = 0,12$, $b = 0,01$;
- г) $\sqrt{3a-b}$, если $a = 0,6$, $b = 0,8$;
- д) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, если $a = 0,7$, $b = 0,09$;
- е) $-\sqrt{a-\sqrt{b}}$, если $a = 4,8$, $b = 0,64$.

21. Найдите значение выражения:

- а) $(22,5 : 0,45) \cdot (5,27 + 1,93)$;
- б) $(7,6 - 8,5) : (0,23 + 2,92)$;
- в) $35,4 \cdot (62,4 - 49,9) - 12,5 \cdot 15,4$;
- г) $12,48 : (1,23 + 1,17) - 14,7 : 0,49$.

2. Сравнение действительных чисел

Вам уже приходилось сравнивать действительные числа, при этом для каждого вида чисел использовался свой способ сравнения. Напомним некоторые из этих способов.

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше. Например, сравним две дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{9}$. Чтобы воспользоваться правилом, приведём их к об-

щему знаменателю, получим: $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$, $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$, значит $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Чтобы сравнить обыкновенную дробь и десятичную, нужно перейти к какой-нибудь одной форме представления дробей. Сравним, например, числа $\frac{5}{6}$ и $0,6$. Число $\frac{5}{6}$ в виде десятичной дроби представить нельзя, поэтому запишем в виде обыкновенной дроби число $0,6$. Получим: $0,6 = \frac{3}{5}$; так как $\frac{5}{6} > \frac{3}{5}$, то $\frac{5}{6} > 0,6$.

При сравнении чисел разных знаков пользуются правилом: всякое отрицательное число меньше положительного, например: $-100 < 0,0017$.

Правило сравнения двух отрицательных чисел таково: из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Например, $-250 > -350$, так как $|-250| < |-350|$.

При сравнении чисел, одно из которых или оба имеют вид $\sqrt{a}$, пользуются свойством: при увеличении подкоренного выражения

значение арифметического квадратного корня возрастает. Сравним, например, числа 7 и $\sqrt{48}$. Так как $7 = \sqrt{49}$ и $\sqrt{49} > \sqrt{48}$, то $7 > \sqrt{48}$.

Удобно, однако, иметь общий способ сравнения чисел, который не зависит от их конкретного вида. Такой способ основан на десятичной записи.

Известно, что всякое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Эта дробь периодическая, если число рациональное, и непериодическая, если число иррациональное.

Сравним, например, числа π и $\sqrt{10}$: $\pi = 3,1415\dots$, а $\sqrt{10} = 3,1622\dots$. Цифры в разряде единиц и десятых совпадают, а в разряде сотых в первом числе стоит 4, а во втором — 6. Следовательно, $\pi < \sqrt{10}$.

Упражнения

22. Расположите в порядке возрастания числа:

$$-1\frac{1}{3}; -1,3; 1,15; 1\frac{1}{8}; -1,4.$$

23. Расположите в порядке убывания числа:

$$-5,28; -1,634\dots; -1,34; -1,(3).$$

24. Какие целые числа расположены между числами:

- а) $-4,122\dots$ и $3,895\dots$; в) $-5,07$ и $-2,708$;
б) $-6,240\dots$ и $-1,328\dots$; г) $-2,25$ и $0,62?$

25. Сравните числа:

- а) $0,017$ и $0,099$; е) $\frac{12}{13}$ и $\frac{13}{14}$;
б) $-4,9$ и $-4,25$; ж) $-6,006$ и $6,066$;
в) $-8,48$ и $-8,84$; з) $-34\frac{3}{4}$ и $-34,75$;
г) $\frac{11}{16}$ и $0,6875$; и) $0,653$ и $\frac{13}{20}$;
д) $-2,882$ и $-2\frac{13}{20}$; к) $\frac{3}{7}$ и $0,43$.

26. Сравните числа:

- а) $2,5$ и -25 ; в) $-0,14$ и $-0,41$;
б) $-3,01$ и $3,001$; г) $-2,35$ и $-3,25$.

27. Сравните числа:

- а) $2,3(4)$ и $2,(34)$; в) $-1,34$ и $-1,(34)$;
б) $1,0(5)$ и $1,0(05)$; г) $0,61$ и $0,61(1)$.

28. Сравните числа:

- а) $0,5(45)$ и $0,(54)$; г) $-7,(3)$ и $-7,123$;
б) $0,54(5)$ и $0,545$; д) $6,(347)$ и $6,1(743)$;
в) $0,(27)$ и $0,2(72)$; е) $0,1(0)$ и $0,0(9)$.

- 29.** Сравните числа:
а) 5,48(5) и 5,4(85); б) $-3,5(61)$ и $-3,56(1)$.
- 30.** Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{75}$.
- 31.** Сравните числа c и $\sqrt{c}$ при условии, что: а) $c > 1$; б) $0 < c < 1$. Существует ли значение c , при котором верно равенство $\sqrt{c} = c$?
- 32.** Сравните числа:
а) $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{5}$; в) $0,3\sqrt{10}$ и $0,1\sqrt{80}$;
б) $0,1\sqrt{4500}$ и $\sqrt{45}$; г) $-4\sqrt{0,2}$ и $-\sqrt{0,7}$.
- 33.** Найдите значение выражения:
а) $12\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7} : 1\frac{19}{21}$; б) $\left(12\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7}\right) : 1\frac{19}{21}$.
- 34.** Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:
а) $2,4 \cdot 10^{-2}$ и $0,0125 \cdot 10^3$; в) $15,4 \cdot 10^6$ и $0,044 \cdot 10^7$;
б) $(1,3 \cdot 10^{-2})^2$ и $5,2 \cdot 10^{-5}$; г) $(3,5 \cdot 10^{-3})^2$ и $(7 \cdot 10^{-4})^2$.
- 35.** Найдите значение выражения:
а) $7^5 \cdot (7^2)^4 : 7^{11}$; г) $10 : (5^{-2})^{13} : 25^{14}$;
б) $11^{-4} : 11^{13} : 11^{17}$; д) $\frac{15^5}{3^3 \cdot 5^4} : \frac{12^5}{3^6 \cdot 4^6}$;
в) $5^9 : 5^{-12} : 5^{20}$; е) $\frac{10^{10}}{2^8 \cdot 5^9} : \frac{17^6 \cdot 8^3}{34^7}$.
- 36.** Вычислите:
а) $\frac{27^5 + 27^4}{9^8 + 9^7 + 9^6}$; б) $\frac{16^7 + 16^6}{8^{10} + 8^9 + 8^8}$; в) $\frac{4^{95} + 4^{94} + 4^{93}}{21 \cdot (16^2)^{23}}$.

3. Погрешность и точность приближения

По графику функции $y = x^2$ найдены приближённые значения этой функции при $x = 1,5$ и $x = 2,1$:

если $x = 1,5$, то $y \approx 2,3$;

если $x = 2,1$, то $y \approx 4,4$.

По формуле $y = x^2$ можно найти точные значения этой функции:

если $x = 1,5$, то $y = 1,5^2 = 2,25$;

если $x = 2,1$, то $y = 2,1^2 = 4,41$.

Приближённое значение отличается от точного значения в первом случае на 0,05, а во втором на 0,01, так как:

$$2,3 - 2,25 = 0,05; \quad 4,41 - 4,4 = 0,01.$$

Чтобы узнать, на сколько приближённое значение отличается от точного, надо из большего числа вычесть меньшее, т. е. найти модуль разности точного и приближённого значений. Этот модуль разности называют *абсолютной погрешностью*.

Определение. Абсолютной погрешностью приближённого значения называют модуль разности точного и приближённого значений.

Так, в рассмотренном примере абсолютная погрешность приближённого значения, равного 2,3, есть 0,05, а абсолютная погрешность приближённого значения, равного 4,4, есть 0,01:

$$|2,25 - 2,3| = |-0,05| = 0,05; \quad |4,41 - 4,4| = 0,01.$$

Найти абсолютную погрешность не всегда возможно. Пусть, например, при измерении длины отрезка AB , изображённого на рисунке 3, получен результат:

$$AB \approx 4,3 \text{ см.}$$

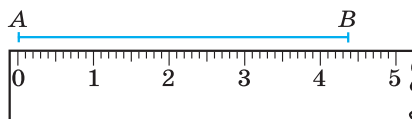


Рис. 3

Мы не можем найти абсолютную погрешность приближённого значения, так как не знаем точного значения длины отрезка AB . В подобных случаях важно указать такое число, больше которого абсолютная погрешность быть не может. В рассматриваемом примере в качестве такого числа можно взять число 0,1. В самом деле, цена деления линейки 0,1 см, и поэтому абсолютная погрешность приближённого значения, равного 4,3, не больше чем 0,1, т. е.

$$|AB - 4,3| \leq 0,1.$$

Говорят, что число 4,3 есть приближённое значение длины отрезка AB (в сантиметрах) с точностью до 0,1.

Вообще, если $x \approx a$ и абсолютная погрешность этого приближённого значения не превосходит некоторого числа h , то число a называют *приближённым значением x с точностью до h* . Пишут:

$$x \approx a \text{ с точностью до } h.$$

Используют также такую запись:

$$x = a \pm h.$$

Запись $x = a \pm h$ означает, что точное значение переменной x заключено между числами $a - h$ и $a + h$, т. е.

$$a - h \leq x \leq a + h.$$

Например, на рулоне обоев написано, что его длина равна $18 \pm 0,3$ м. Значит, если l — истинное значение длины рулона (в метрах), то

$$18 - 0,3 \leq l \leq 18 + 0,3, \text{ т. е. } 17,7 \leq l \leq 18,3.$$

Точность приближённого значения зависит от многих причин. В частности, если приближённое значение получено в процессе измерения, его точность зависит от прибора, с помощью которого выполнялось измерение. Например, на медицинском термометре деления нанесены через $0,1^\circ$. Это даёт возможность измерять температуру с точностью до $0,1^\circ$. Комнатный термометр, на котором деления нанесены через 1° , позволяет измерять температуру с точностью до 1° . На торговых весах, у которых цена деления шкалы 5 г, можно взвешивать с точностью до 5 г.

Для оценки качества измерения можно использовать *относительную погрешность* приближённого значения.



Определение. Относительной погрешностью приближённого значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения.

Относительную погрешность принято выражать в процентах.

В тех случаях, когда абсолютная погрешность приближённого значения неизвестна, а известна только его точность, ограничиваются оценкой относительной погрешности.

Рассмотрим такой пример. При измерении (в сантиметрах) толщины b стекла и длины l книжной полки получили такие результаты:

$$b = 0,4 \pm 0,1; \quad l = 100,0 \pm 0,1.$$

В первом случае относительная погрешность не превосходит $\frac{0,1}{0,4} \cdot 100\%$, т. е. 25%, а во втором не превосходит $\frac{0,1}{100} \cdot 100\%$, т. е. 0,1%. Говорят, что в первом случае измерение выполнено с относительной точностью до 25%, а во втором — с относительной точностью до 0,1%. Качество второго измерения намного выше, чем первого.

Упражнения

- 37.** Округлите числа 17,26; 12,034; 8,654 до десятых и найдите абсолютную погрешность каждого из приближённых значений.
- 38.** Найдите абсолютную погрешность приближённого значения, полученного в результате округления:
- а) числа 9,87 до единиц;
 - б) числа 124 до десятков;
 - в) числа 0,453 до десятых;
 - г) числа 0,198 до сотых.
- 39.** При выполнении вычислений дробь $\frac{1}{7}$ заменили десятичной дробью 0,14. Какова абсолютная погрешность этого приближения?
- 40.** В каких границах заключено число y , если:
- а) $y = 6,5 \pm 0,1$;
 - б) $y = 1,27 \pm 0,2$?
- 41.** На упаковке простокваши написано, что её надо хранить при температуре 4 ± 2 °С. В каких границах заключено значение температуры t °С, допустимое для хранения?
- 42.** На упаковке товара указано, что его масса равна $420 \text{ г} \pm 3\%$. В каких границах заключена масса a г этого товара?
- 43.** На коробке конфет указано, что она должна храниться при температуре 16 ± 3 °С. Удовлетворяет ли этому условию температура воздуха, равная:
- а) 18 °С;
 - б) 21 °С;
 - в) 14,5 °С;
 - г) 12,5 °С?
- 44.** Определяя массу мешка картофеля с точностью до 1 кг, нашли, что она равна 32 кг. Может ли масса этого мешка, измеренная с точностью до 0,1 кг, оказаться равной:
- а) 31,4;
 - б) 32,5;
 - в) 33,2;
 - г) 30,7?
- 45.** Начертите острый угол и измерьте его с помощью транспортира. Какова точность полученного результата?
- 46.** При измерении длины стержня пользовались различными измерительными инструментами: линейкой с миллиметровыми делениями, штангенциркулем (цена деления 0,1 мм) и микрометром (цена деления 0,01 мм). При этом были получены результаты: 17,9 мм, 18 мм, 17,86 мм. Каким инструментом выполнено каждое из указанных измерений и какую точность даёт каждый инструмент?
- 47.** Округлите число 2,525 до десятых. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.

48. Выполняя лабораторную работу по определению плотности железа, ученик получил результат $7,6 \text{ г/см}^3$. Вычислите относительную погрешность экспериментального результата (табличное значение плотности железа равно $7,8 \text{ г/см}^3$).
49. Поверхность Земли равна $510,2 \text{ млн км}^2$ (с точностью до $0,1 \text{ млн км}^2$). Оцените относительную погрешность приближённого значения.
50. Измерили толщину человеческого волоса d и расстояние от Земли до Луны l . Получили $d \approx 0,15 \text{ мм}$ с точностью до $0,01 \text{ мм}$ и $l \approx 384\,000 \text{ км}$ с точностью до 500 км . Сравните качество измерений, оценив относительные погрешности.

П

51. Сравнивая с нулём значения выражений, ученик получил следующие результаты:
1. $3\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$ 2. $4\sqrt{7} - 9\sqrt{2} < 0$
3. $6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} > 0$ 4. $7\sqrt{11} - 6\sqrt{12} < 0$
- При этом он допустил ошибку. Найдите её и исправьте.
52. Докажите неравенство:
- а) $6a(a + 1) < (3a + 1)(2a + 1) + a$;
б) $(2p - 1)(2p + 1) + 3(p + 1) > (4p + 3)p$.
53. а) Разность корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равна 16. Найдите q .
б) Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + q = 0$ равна 29. Найдите q .

Контрольные вопросы и задания

- 1 Назовите основные числовые множества. Запишите последовательность соотношений между этими множествами в виде цепочки включений и проиллюстрируйте её рисунком.
- 2 Сформулируйте и запишите в буквенном виде законы сложения и законы умножения чисел.
- 3 Сформулируйте и запишите в виде буквенного равенства свойства нуля при сложении, свойства нуля и единицы при умножении.
- 4 Что называется абсолютной погрешностью приближённого значения? Объясните смысл записи $x = a \pm h$.
- 5 Что называется относительной погрешностью приближённого значения?

4. Размеры объектов и длительность процессов в окружающем мире

В природе существуют как очень большие объекты, так и очень малые. Их можно измерить и получить представление о различиях их величин с точки зрения математики. Среди малых объектов можно привести пример атомов, состоящих из электронов и ядер с размерами $1 \text{ \AA}$ (ангстрем или 10^{-10} м). Малыми размерами обладают вирусы, большинство из которых имеют длину от 20 до 300 нм (нанометр, т. е. одна миллиардная часть метра — 10^{-9} м). В то же время окружающая нас Вселенная огромна, и в ней находится очень много огромных объектов. Например, Юпитер — самая большая планета Солнечной системы, газовый гигант. Его экваториальный радиус равен 71,4 тыс. км, т. е. $7,14 \cdot 10^7 \text{ м}$.

Различия касаются не только размеров окружающего мира, но и длительности процессов в нём. Супербыстрое или самое краткое событие, зафиксированное учёными в истории науки — это прохождение рентгеновского фотона через молекулу водорода. Оно равно 247 зептосекунд (1 зептосекунда равна 10^{-21} с), т. е. $2,47 \cdot 10^{-23} \text{ с}$. Среди животных, птиц и рыб очень разнится скорость их движения. Так, птица сапсан — король вертикального полёта, пикируя на добычу, развивает скорость до 360 км/ч или $3,6 \cdot 10^5 \text{ м/ч}$. Не случайно его именем назван скоростной поезд. А морской конёк плавает со скоростью всего лишь 1,5 м/ч.

Упражнения

54. Приведите примеры очень больших и очень малых величин и укажите их размеры. (Для поиска информации воспользуйтесь данными из Интернета или из справочников.)
55. Приведите примеры процессов, различающихся по скорости их протекания: очень быстрых и очень медленных. (Для поиска информации воспользуйтесь данными из Интернета или из справочников.)
56. а) Расстояния между звёздами измеряют в световых годах. Световой год равен примерно 9460 млрд км. От звезды X до звезды Y расстояние a световых лет. Запишите это расстояние в тысячах километров.
б) Российские учёные из государственного научного центра вирусологии и биотехнологии «Вектор» сделали снимки нового

вируса SARS-CoV-2 под микроскопом. Размер частиц составляет 100—120 нм. Запишите размер частиц этого вируса в метрах.

57. Одна секунда — мгновение для человека и целая эпоха с точки зрения атомов и электронов. Невооружённый человеческий взгляд может заметить явления, длящиеся буквально единицы миллисекунд (1 миллисекунда равна 10^{-3} с). Одна наносекунда ещё меньше и составляет 10^{-9} с. Посчитайте дистанцию, которую пройдёт частица со скоростью света за одну наносекунду, и результат запишите в миллиметрах.
58. Современные фотоаппараты делают огромное количество кадров за короткий промежуток времени. Рекорд составляет 6 миллионов кадров за секунду. Можно увидеть события, которые человеческий глаз никогда не сможет увидеть. За какое время происходит один кадр в таком фотоаппарате? Результат запишите в наносекундах.



59. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{2a + 2b} \right) \cdot \frac{2a}{a + b} + \frac{b}{b - a};$

б) $\frac{y}{x - y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x - y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} \right).$

60. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 240; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65, \\ 2x - y = 15. \end{cases}$

61. Сколько решений имеет уравнение:

а) $\frac{25}{x} = 2x - 5;$ б) $x^3 = |x|?$

5. Практико-ориентированные задачи

Часто, даже не подозревая об этом, вы сталкиваетесь в быту с необходимостью применить те или иные математические знания. Например, прикидывая, хватит ли вам наличных денег на покупку продуктов, или поместится ли телевизор с диагональю, длина которой указана в дюймах, в нишу шкафа. Рассчитывая время, которое вам понадобится, чтобы добраться до места встречи с другом, вы обязательно будете учитывать и скорость передвижения, и расстояние до места встречи. При приготовлении нового блюда вам потребуется, например, такое математическое

понятие, как часть от числа, а также знания о переводе одних единиц измерения в другие. Если вы захотите положить свои деньги на вклад в банк, то обязательно появится мысль о том, в каком банке это выгоднее всего сделать, исходя из предлагаемой им процентной ставки. Изучая историю развития человечества, становится понятно, что развитие математики как науки началось во многом благодаря тому, что люди каждый день попадали в ситуации, когда надо было что-то складывать и вычитать, умножать и делить, находить значения различных величин, то есть каждый человек был вынужден искать решения *практико-ориентированных задач*, связанных с его жизнью и бытом. Оказалось, что процессы, происходящие в реальной жизни, проще всего описывать с помощью математических моделей, а умение решать практико-ориентированные задачи незаменимо в практической деятельности и повседневной жизни человека.

Рассмотрим некоторые практико-ориентированные задачи.

Задача 1. Надежда Михайловна решила сделать ремонт в гостиной, в которой имеются окно (120×130 см) и дверь (800×2000 мм). Она выбрала в магазине обои в рулонах (размер одного рулона $10,5 \times 1,06$ м) по цене 2300 р. за один рулон, а также ламинат по цене 1100 р. за упаковку. Хватит ли Надежде Михайловне 25 тыс. р. на покупку этих материалов, если гостиная имеет размеры $4,5 \times 6 \times 2,7$ (ш $\times$ д $\times$ в), а ламинат продаётся упаковками по $2,74 \text{ м}^2$ в каждой?

- Каждая стена имеет форму прямоугольника, поэтому можно найти общую площадь стен:

$$4,5 \cdot 2,7 \cdot 2 + 6 \cdot 2,7 \cdot 2 = 2,7 \cdot 2 \cdot (4,5 + 6) = 5,4 \cdot 10,5 = 56,7 \text{ м}^2.$$

Учитывая, что дверь и окно не подлежат оклейке обоями, вычтем из найденной площади стен площадь окна и двери.

$$\text{Имеем } S_{\text{окна}} = 120 \text{ см} \cdot 130 \text{ см} = 1,2 \text{ м} \cdot 1,3 \text{ м} = 1,56 \text{ м}^2;$$

$$S_{\text{двери}} = 800 \text{ мм} \cdot 2000 \text{ мм} = 0,8 \text{ м} \cdot 2 \text{ м} = 1,6 \text{ м}^2,$$

$$\text{Тогда } S_{\text{оклейки}} = 56,7 \text{ м}^2 - 1,56 \text{ м}^2 - 1,6 \text{ м}^2 = 53,54 \text{ м}^2.$$

Найдём, какую площадь можно оклеить одним рулоном обоев:

$$10,5 \cdot 1,06 = 11,13 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Тогда Надежде Михайловне понадобится $53,54 : 11,13 \approx 5$ рулонов, цена которых составит $2300 \cdot 5 = 11\,500$ р.

Найдём площадь пола:

$$S_{\text{пола}} = 4,5 \text{ м} \cdot 6 \text{ м} = 27 \text{ м}^2.$$

Отсюда получим, что для гостиной понадобится $27 : 2,74 \approx 10$ упаковок ламината, цена которых составит $1100 \cdot 10 = 11\,000$ р.

Таким образом, для покупки всех материалов необходимо $11\,500 + 11\,000 = 22\,500$ р., а значит, Надежде Михайловне хватит имеющейся у неё суммы. ◀

Задача 2. Мобильный оператор предлагает три тарифа сотовой связи.

Тариф	Условия тарифа	Абонентская плата	Плата сверх тарифа
«1500»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно 2000 мин в месяц, безлимитный Интернет	1500 р. в месяц	3,5 р. за минуту
«2000»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно 3000 мин в месяц, Интернет — бесплатно 10 Гб в месяц	2000 р. в месяц	1,5 р. за минуту, 40 р. за 1 Гб
«3000»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно, Интернет — бесплатно 30 Гб	3000 р. в месяц	30 р. за Гб

Антон тратит 2500 мин в месяц на исходящие звонки и 35 Гб Интернета. Какой тариф будет для него самым выгодным?

- Рассчитаем расходы Антона по каждому тарифу.
По первому тарифу они составят

$$1500 + 3,5 \cdot 500 = 3250 \text{ р.},$$

по второму тарифу —

$$2000 + 40(35 - 10) = 2000 + 40 \cdot 25 = 3000 \text{ р.},$$

а по третьему —

$$3000 + 30(35 - 30) = 3000 + 30 \cdot 5 = 3150 \text{ р.}$$

Тогда самым выгодным для Антона тарифом будет тариф «2000». ◀

Задача 3. Вера Николаевна вырастила большой урожай огурцов и решила замариновать их. В рецепте было указано, что для приготовления маринада ей понадобится 2%-й раствор уксуса. Но в наличии у неё оказался только 9%-й раствор, а магазины уже не работали. Сколько Вере Николаевне нужно добавить воды в 500 г 9%-го раствора уксуса, чтобы получить необходимую концентрацию для маринада?

- Пусть x г воды надо добавить в 9%-й раствор уксуса для получения 2%-го раствора.

Составим таблицу.

Раствор	Масса раствора, г	Масса уксуса, г
9%-й	500	$500 \cdot 0,09 = 45$
2%-й	$500 + x$	$(500 + x) \cdot 0,02 = 10 + 0,02x$

Масса уксуса при добавлении воды не меняется, поэтому получим

$$10 + 0,02x = 45 \text{ (г)}.$$

Решив уравнение, узнаем, что $x = 1750$ г, значит, необходимо 500 г 9%-го раствора уксуса разбавить 1750 г воды для получения 2%-го раствора. <

Упражнения

62. В каких единицах в нашей стране обычно измеряют следующие величины:

- 1) высоту холодильника;
- 2) площадь поверхности тела человека;
- 3) ширину реки;
- 4) массу таблетки;
- 5) скорость движения черепахи;
- 6) заработный фонд крупной компании;
- 7) площадь страны;
- 8) массу атомного ледокола;
- 9) объём лёгких человека;
- 10) площадь футбольного поля;
- 11) диаметр колеса самоката;
- 12) массу собаки;
- 13) урожайность пшеницы за определённый год;
- 14) площадь дачного участка;
- 15) скорость пассажирского самолёта;
- 16) толщину волоса;
- 17) объём воды, поступившей через систему водоснабжения;
- 18) массу сахарного песка для приготовления пирога?

(Для ответа на вопросы задачи вы можете воспользоваться данными из Интернета или справочников.)

63. Родители дали Алине 500 р. на покупку тетрадей к новому учебному году. Сколько тетрадей она сможет купить, если стоимость одной тетради составляет 26 р. 50 к.?

64. Даниле родители дали 500 р. на покупку тетрадей к новому учебному году. Узнав, что в ближайшем магазине одна тетрадь стоит 26 р. 50 к., Данила решил поехать в гипермаркет, где цена одной тетради была на 20% меньше. На сколько больше тетрадей он сможет приобрести в гипермаркете, чем в магазине?

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА	5
1. Действия над действительными числами	—
2. Сравнение действительных чисел	11
3. Погрешность и точность приближения	13
§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ	18
4. Размеры объектов и длительность процессов в окружающем мире	—
5. Практико-ориентированные задачи	19
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
6. Точность представления действительных чисел в виде десятичных дробей. Число π	25
Дополнительные упражнения к главе I	28

ГЛАВА II. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 3. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА	33
7. Свойства чётности и нечётности функций	—
8. Графики и свойства некоторых видов функций	37
§ 4. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК	43
9. Функция $y = ax^2$, её график и свойства	—
10. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$	49
11. Построение графика квадратичной функции	56
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
12. Дробно-линейная функция и её график	62
Дополнительные упражнения к главе II	68

ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	71
13. Целое уравнение и его корни	—
14. Дробные рациональные уравнения	79
15. Решение задач с помощью уравнений	85

§6. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	88
16. Решение неравенств второй степени с одной переменной	—
17. Решение неравенств методом интервалов	93
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
18. Некоторые приёмы решения целых уравнений	98
Дополнительные упражнения к главе III	104

ГЛАВА IV. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§7. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ	110
19. Уравнение с двумя переменными и его график	—
20. Решение систем уравнений с двумя переменными	117
21. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными	124
22. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	126
§8. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ	130
23. Неравенства с двумя переменными	—
24. Системы неравенств с двумя переменными	135
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
25. Некоторые приёмы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными	139
Дополнительные упражнения к главе IV	144

ГЛАВА V. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

§9. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	149
26. Последовательности	—
27. Определение арифметической прогрессии. Формула n -го члена арифметической прогрессии	153
28. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии	160

§ 10. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	167
29. Определение геометрической прогрессии. Формула n -го члена геометрической прогрессии	—
30. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии	174
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
31. Метод математической индукции	178
Дополнительные упражнения к главе V	182
Упражнения для повторения курса 7–9 классов	188
Задачи повышенной трудности	209
Исторические сведения	215
Сведения из курса алгебры 7–8 классов	220
Справочные материалы	235
Список дополнительной литературы	238
Предметный указатель	239
Ответы	240