



АЛГЕБРА

ЛАБ
ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

8
КЛАСС



УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Авторы: заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета А. Г. Мордкович; доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ П. В. Семенов; отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории Л. А. Александрова; кандидат педагогических наук, доцент Е. Л. Мардахаева.

Издание выходит в pdf-формате.

Алгебра : 8-й класс : учебник : издание в pdf-формате /
А45 А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова,
Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвеще-
ние, 2022. — 384 с. : ил.

ISBN 978-5-09-101269-9 (электр. изд.) — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-094124-2 (печ. изд.).

Учебник написан в соответствии с ФГОС ООО и входит в завершённую линию учебников для 7–9-х классов; поддерживает разные модели изучения алгебры: базовую и углублённую. Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич
Семенов Павел Владимирович
Александрова Лидия Александровна
Мардахаева Елена Львовна

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник

Центр развития углублённого и профильного образования, функциональной грамотности, технологии и ИКТ-компетенций

Ответственный за выпуск *Л. В. Кузнецова*

Подписано в печать 08.02.2022. Формат 70×90/16. Гарнитура SchoolBookSanPin.

Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 28,08. Тираж экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru.

ISBN 978-5-09-101269-9 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-094124-2 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2020
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2020
Все права защищены

Зимний дворец.
Санкт-Петербург



- §1. Множества, их элементы и подмножества
- §2. Операции над множествами
- §3. Рациональные числа
- §4. Познакомимся с квадратными корнями
- §5. Иррациональные числа
- §6. Действительные числа и числовая прямая
- §7. Свойства числовых неравенств
- §8. Линейные неравенства
- §9. Модуль действительного числа. Функция $y = |x|$
- §10. Приближённые значения действительных чисел

Глава 1

Множество действительных чисел

§ 1. Множества, их элементы и подмножества

«Множество есть объединение в одно целое элементов, хорошо различаемых нашей интуицией» — так в конце XIX в. писал один из создателей теории множеств великий немецкий математик Георг Кантор. Например, школьные отметки «единица», «двойка», «тройка», «четвёрка», «пятёрка» каждый из нас различает весьма отчётливо. Взятые вместе, все эти отметки образуют некоторое множество. Множество отметок — это {«единица», «двойка», «тройка», «четвёрка», «пятёрка»}. Если обозначить такое множество какой-то буквой, например A , названия отметок заменить цифрами, а оборот «... — это...» заменить знаком равенства, то получится вот что:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Мы задали множество *перечислением* его элементов. Фигурные скобки в правой части написанного равенства позволяют не забыть, что перечисляемые элементы собраны воедино и образуют некоторое множество. Если множество состоит из небольшого числа элементов, то перечисление элементов — самый прямой и ясный способ задания множества.

Вот ещё несколько примеров. Если для домашней работы заданы упражнения 1.2, 1.3 и 1.7, то $\{1.2, 1.3, 1.7\}$ — множество номеров домашних упражнений; для его обозначения можно выбрать любую букву¹. Если S — это множество, состоящее из первых трёх нот октавы, то $S = \{\text{до, ре, ми}\}$. Если Y — это множество названий месяцев года, то $Y = \{\text{январь, февраль, ..., декабрь}\}$. В последнем примере пе-

¹ Как правило, выбирают заглавную букву латинского алфавита: $A, B, C, D, \dots, X, Y, Z$.

речисление элементов немного сокращено. Многоточие «...» заменяет слова «и так далее» и подразумевает, что все всё правильно понимают и никто не будет настаивать на том, что после февраля идёт не «март», а, скажем, «каша».

Множества бывают конечные и бесконечные. Рассмотренные выше примеры — примеры конечных множеств. А вот множество всех натуральных чисел — бесконечное множество, его обозначают буквой N ; $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Пример 1 Составить множество корней уравнения:

- а) $x - 1 = 1$; в) $x^2 - 1 = 0$; д) $x^2 + 1 = 0$;
б) $2x - 5 = 7$; г) $x(x^2 - 1) = 0$; е) $2(x - 5) = (x - 3) + (x - 7)$.

Решение. а) $x - 1 = 1$; $x = 2$. Множество корней состоит из одного числа. Записывается оно так: $\{2\}$.

б) $2x - 5 = 7$; $2x = 12$; $x = 6$. Получаем ответ: $\{6\}$.

в) Применим формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 0; \\(x - 1) \cdot (x + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Значит, либо $x - 1 = 0$ и тогда $x = 1$, либо $x + 1 = 0$ и тогда $x = -1$. Множество корней состоит из двух чисел. Записываем множество корней: $\{-1; 1\}$.

г) Сравним с пунктом «в». Видим, что добавится ещё один корень $x = 0$. Ответ: $\{-1; 0; 1\}$.

д) В сумме $x^2 + 1$ первое слагаемое всегда неотрицательно, а второе положительно. Поэтому сумма положительна, т. е. не равна нулю. Уравнение не имеет корней, в множестве корней нет ни одного элемента. Для такого множества есть специальное название — *пустое множество*. Есть и специальное обозначение: $\emptyset$ ¹.

е) Раскроем скобки: $2x - 10 = x - 3 + x - 7$; $2x - 10 = 2x - 10$. Любое число является корнем такого уравнения. Множество корней — это множество всех чисел. Перечислить их поэлементно невозможно. Множество всех чисел записывают так: $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: а) $\{2\}$; б) $\{6\}$; в) $\{-1; 1\}$; г) $\{-1; 0; 1\}$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; +\infty)$.

Запись множества перечислением элементов — это математическая модель словесного описания множества. Математическая модель может быть одинаковой для ситуаций, которые на словах описываются по-разному.

¹ Не следует писать $\{\emptyset\}$: это множество, состоящее из элемента $\emptyset$, а в пустом множестве элементов нет.

Пример 2 Привести несколько словесных описаний множества $A = \{1; 3; 5; 6; 8\}$.

Решение. Приведём варианты ответа. Это множество, состоящее:

- из чисел один, три, пять, шесть, восемь;
- из корней уравнения $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 8) = 0$;
- из однозначных натуральных чисел, отличных от 2, 4, 7 и 9;
- из нечётных чисел полуинтервала $(-0,5; 6]$ и чётных чисел интервала $(5; 10)$;

— из номеров месяцев январь, март, май, июнь, август;

— из цифр числа пятьдесят шесть тысяч триста восемнадцать.

Придумайте ещё пару-тройку вариантов ответа.

Вместо длинного словесного оборота «элемент x принадлежит множеству X » («элемент x входит в состав множества X ») в математике используют краткую запись: $x \in X$. $\in$ — *знак принадлежности*; он образован от первой буквы слова *element* — элемент. А если хотят кратко записать, что «элемент x не принадлежит множеству X », то поступают так: $x \notin X$.

Пример 3 Пусть $B = \{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}$, C — множество всех двузначных чисел, N — множество всех натуральных чисел. Прочитать данное утверждение и объяснить, верно оно или неверно:

а) $8 \in B$; б) $8 \in C$; в) $8 \in N$; г) $777 \notin B$; д) $777 \notin C$; е) $777 \notin N$.

Решение. а) «Число 8 является элементом множества B ». Верно, так как элемент 8 указан в задании множества B .

б) «Число 8 является элементом множества C ». Неверно, так как C состоит из двузначных чисел, а число 8 — не двузначное.

в) «Число 8 принадлежит множеству N ». Разумеется, верно, ведь 8 — это натуральное число.

г) «Число 777 не является элементом множества B ». Верно, так как в B нет трёхзначных чисел.

д) «Число 777 не принадлежит множеству C ». Верно: в C нет трёхзначных чисел.

е) «Число 777 не принадлежит множеству N ». Неверно, ведь 777 — это натуральное число.

Всякое множество состоит из элементов. Из этих элементов можно составлять иные множества, произвольно выбирая два каких-то элемента, три элемента и т. д. Будут получаться различные новые множества, их называют *подмножествами* заданного множества.

Пример 4 В футбольной команде есть три нападающих: Иванов, Петров и Сидоров. Перед игрой тренер может сделать произвольный выбор от «включить в состав команды всех троих» до «не включить никого». Перечислить все варианты выбора тренера.

Решение. Сократим фамилии до их первых букв. Есть единственный вариант $\{И, П, С\}$, когда играть в нападении будут все трое. Вот варианты, когда в нападении будут двое: $\{И, П\}$, $\{И, С\}$, $\{П, С\}$. Их три. Столько же вариантов с одним нападающим: $\{И\}$, $\{П\}$, $\{С\}$. Наконец, есть «оборонительный» вариант $\emptyset$, вообще без нападающих. Итак, всего получается восемь подмножеств заданного множества нападающих.

Ответ: $\emptyset, \{И\}, \{П\}, \{С\}, \{И, П\}, \{И, С\}, \{П, С\}, \{И, П, С\}$.

Математической моделью примера 4 является утверждение: «У множества $\{x, y, z\}$ всего восемь подмножеств: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}$ ». Дадим общее определение подмножества данного множества.

Определение 1. Если каждый элемент множества B является элементом множества A , то множество B называют **подмножеством** множества A и используют запись $B \subset A$; знак $\subset$ называют **знаком включения**.

Если $B \subset A$, то используют и такую терминологию: множество B *содержится* в множестве A (множество A *содержит* множество B).

Например, $\{1; 3; 4\} \subset \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Действительно, каждое число, перечисленное в левой части включения, перечислено и в его правой части. Другой пример: множество согласных букв русского языка есть подмножество множества всех букв русского алфавита просто потому, что каждая согласная буква является буквой. Вот ещё пример: $[2; 5] \subset [1; 6]$. Действительно, если $x \in [2; 5]$, то $2 \leq x \leq 5$, любое такое значение x удовлетворяет и неравенству $1 < x < 6$, т. е. $x \in (1; 6)$ (рис. 1).



Рис. 1

Отметим, что всегда верны такие включения: $A \subset A$, $\emptyset \subset A$.

Проиллюстрировать понятие *подмножества* удобно рисунком, на котором множества A и B — некоторые плоские фигуры. На рисунке 2, а множество B является подмножеством A , а на рисунке 2, б —

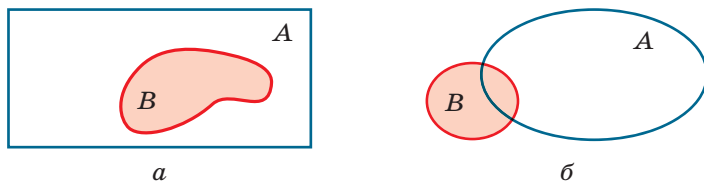


Рис. 2

не является, так как в множестве B есть точки, которые не принадлежат A .

Часто в качестве плоских фигур для таких картинок используют круги, которые называют *кругами Эйлера*. Сами картинки называют *диаграммами Эйлера*.

С каждым подмножеством B множества A связано другое подмножество, которое «дополняет» B до всего A . Кратко говоря, надо из всего множества A «вырезать» подмножество B , то, что останется, и будет «дополнять» B до A .

Определение 2. Дополнением подмножества B до множества A называют множество, которое состоит из элементов множества A , не являющихся элементами подмножества B .

Дополнение B до A обозначают $A \setminus B$, что можно читать и так: « A минус B ».

Пример 5 Для следующих множеств A и B выяснить, верно ли включение $B \subset A$, и если верно, то составить дополнение $A \setminus B$.

а) A — множество однозначных натуральных чисел, $B = \{1; 2; 7; 9\}$;

б) A — множество целых чисел из отрезка $[-8, 3; 98, 3]$, B — множество двузначных натуральных чисел;

в) $A = [3; 13]$, $B = (3; 13)$;

г) $A = (-5; 25)$, $B = (5; 25]$.

Решение. а) Включение $B \subset A$ верно, так как каждое из чисел 1, 2, 7, 9 натуральное и однозначное. Так как $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, то дополнение $A \setminus B$ — это множество $\{3; 4; 5; 6; 8\}$.

б) Включение $B \subset A$ неверно, так как имеется элемент из B , который не является элементом множества A , такой элемент — число 99.

в) Включение $B \subset A$ верно: если верно неравенство $3 < x < 13$, то верно и неравенство $3 \leq x \leq 13$. Дополнение $A \setminus B$ состоит из двух концов отрезка, т. е. $A \setminus B = \{3; 13\}$.

г) Включение $B \subset A$ неверно: число 25 — элемент из B , который не является элементом множества A .

При перечислении элементов множества внутри фигурных скобок не важен порядок элементов. Например, $\{a, b, c, 33\}$ и $\{c, 33, b, a\}$ — это одно и то же множество из четырёх элементов, записанных в разном порядке. Но для числовых множеств перечисление их элементов, как правило, проводят слева направо в порядке возрастания.

Обратите внимание, что при перечислении элементов числовых множеств используется не запятая «,», а точка с запятой «;». Это важно, чтобы не было путаницы между, например, множеством $\{1; 2; 3\}$ из трёх чисел и множеством $\{1, 2; 3\}$ из двух чисел 1, 2 и 3.

Не путайте знаки « $\in$ » и « $\subset$ ». Запись $(3; 13) \subset [3; 13]$ имеет смысл, т. е., как говорят, она *корректна*: и в левой, и в правой части стоят множества. Напротив, запись $(3; 13) \in [3; 13]$ непонятна, ведь интервал $(3; 13)$ не является (одним) элементом отрезка $[3; 13]$. Запись $4 \in [3; 13]$ корректна: в левой части — число, в правой — числовое множество. В то же время запись $4 \subset [3; 13]$ не имеет смысла, так как в левой части стоит не множество. Впрочем, эту запись можно подправить до корректной: $\{4\} \subset [3; 13]$ — получится верное утверждение о том, что множество, состоящее из одного числа 4, является подмножеством отрезка $[3; 13]$.

Упражнения

- 1.1.** По словесному описанию множества задайте это множество перечислением его элементов:
- а) целые числа, которые больше -3 , но меньше 3 ;
 - б) натуральные числа, которые не меньше $7,9$ и не больше $12,1$;
 - в) чётные числа интервала $(10; 20)$;
 - г) российские города-миллионники, т. е. города с населением более миллиона человек (используйте поиск в Сети).
- 1.2.** Числовое множество указано перечислением своих элементов в порядке возрастания. Найдите число, стоящее на пятом месте от начала, и число, стоящее на шестом месте от конца:
- а) $A = \{1; 2; \dots; 9; 10\}$;
 - б) $B = \{12; 13; \dots; 19; 20\}$;
 - в) $C = \{104; 105; \dots; 119; 120\}$;
 - г) $G = \{2; 4; \dots; 14; 16\}$;
 - д) $D = \{-10; -7; \dots; 17; 20\}$;
 - е) $E = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots; \frac{98}{99}; \frac{99}{100}\right\}$.
- 1.3.** Придумайте несколько разных словесных описаний множества $A = \{1; 2; 3\}$.

Какие из следующих утверждений верны, а какие неверны?

- 1.4.** а) $2 \in [1; 3]$; в) $3 \in [1; 2]$; д) $3 \in [1; 3]$;
б) $3 \notin [1; 3]$; г) $0 \notin [1; 2]$; е) $3 \in [1; 3]$.
- 1.5.** а) $2,34 \in [1; 3]$; г) $0 \notin [0,1; 0,2]$;
б) $3,1 \notin [1; 3,2]$; д) $3,654 \in [1; 3,456]$;
в) $3,01 \in [1; 2,9]$; е) $3,33 \in [1,11; 3,33]$.
- 1.6.** а) $\frac{22}{3} \in [7; 8]$; в) $\frac{22}{13} \in (2; 3)$; д) $\frac{22}{3} \notin (6; 7,4)$;
б) $\frac{22}{13} \notin (1; 1,9)$; г) $-\frac{13}{3} \in (-5; -4]$; е) $-\frac{3}{13} \in (-0,3; 0)$.

1.7. Перечислите все подмножества множества $A = \{x, y, z\}$:

- а) содержащие элемент x ;
- б) содержащие элемент z ;
- в) содержащие элемент y , но не содержащие элемент x ;
- г) состоящие из одного элемента;
- д) состоящие из двух элементов;
- е) состоящие из трёх элементов.

В упражнениях **1.8—1.10** множество $X = \{a, б, в, г, д, е\}$.

1.8. Перечислите подмножества множества X , состоящие из двух элементов и которые:

- а) содержат букву «а»;
- б) содержат букву «б»;
- в) содержат букву «а», но не содержат букву «б»;
- г) содержат букву «б», но не содержат букву «а»;
- д) содержат и букву «а», и букву «б»;
- е) содержат или букву «а», или букву «б».

1.9. Перечислите подмножества множества X , состоящие из трёх элементов и которые:

- а) содержат две гласные буквы;
- б) содержат буквы «а» и «д»;
- в) содержат буквы «б» и «е»;
- г) не содержат ни букву «а», ни букву «д»;
- д) не содержат ни букву «б», ни букву «е»;
- е) содержат только согласные буквы.

1.10. Найдите дополнение $X \setminus Y$, если:

- а) $Y = \{a, б, в\}$; в) $Y = \{г, д, е\}$; д) $Y = \{a, б, в, г\}$;
- б) $Y = \{a, е\}$; г) $Y = \{a, б, д\}$; е) $Y = \{е\}$.

1.11. На координатной прямой отметьте разными штриховками множества X , Y и $X \setminus Y$:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| а) $X = [1; 5]$, $Y = [1; 4]$; | г) $X = [0; +\infty]$, $Y = [1; 10]$; |
| б) $X = [2; 7]$, $Y = [2; 3]$; | д) $X = (-\infty; 5]$, $Y = (-\infty; -5]$; |
| в) $X = (3; 7)$, $Y = (3; 4, 7]$; | е) $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = (-\infty; 6]$. |

Какие из следующих утверждений верны, а какие неверны?

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1.12. а) $(2; 3) \subset [1; 3]$; | г) $[2; 3] \subset (2; 3]$; |
| б) $(2; 3] \subset [1; 3]$; | д) $\{4\} \subset (1; 3]$; |
| в) $(2; 3] \subset [1; 3)$; | е) $\{1; 2; 3\} \subset [1; 3]$. |

- 1.13.** а) Множество натуральных чисел — подмножество множества положительных чисел.
б) Множество положительных чисел — подмножество множества натуральных чисел.
в) Множество натуральных чисел — подмножество множества целых чисел.
г) Множество целых чисел — подмножество множества натуральных чисел.
д) Множество двузначных чисел — подмножество множества целых чисел.
е) Множество целых чисел — подмножество множества чисел, которые или положительны, или отрицательны.

- 1.14.** а) $\{a, б, в\}$ — подмножество множества букв русского алфавита.
б) $\{a, с, е, о\}$ — подмножество множества букв английского алфавита.
в) $\{a, с, е, о, я\}$ — подмножество множества букв английского алфавита.
г) $\{\text{Москва, Улан-Удэ, Элиста}\}$ — подмножество множества названий российских городов.
д) $\{\text{Москва, Рим, Милан}\}$ — подмножество множества названий европейских столиц.
е) $\{\text{Лондон, Париж, Рио-де-Жанейро}\}$ — подмножество множества названий столиц.

Упражнения для повторения

1.15. Постройте график функции $y = x - 3$. С помощью графика найдите:

- а) значения y , если x принимает значения $-5, 0, 7$;
б) значения x , при которых y принимает значения $-6, 0, 8$;

- в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-2; 1]$;
 г) значения x , при которых $y < 0$.

1.16. Разложите на множители:

- а) $2x^2 - 6x$; г) $10a^4b^4 + 12a^3b^5$;
 б) $-3x^2 + 12x$; д) $3a(a - b) + 2b(a - b)$;
 в) $-8a^3b^2 - 12a^3b^2$; е) $5x(x + y) - y(x + y)$.

1.17. Автомобиль проехал 2 ч со скоростью 84 км/ч и 3 ч со скоростью 72 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всём пути.

§ 2. Операции над множествами

Продолжим изучение элементов теории множеств, познакомимся с операциями пересечения и объединения множеств.

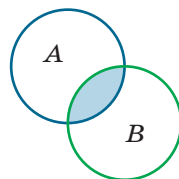
Определение 1. Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех общих элементов множеств A и B , т. е. из всех элементов, которые принадлежат и множеству A , и множеству B . Обозначение: $A \cap B$. Символ $\cap$ — *знак пересечения*.

Таким образом, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Запись « $x \mid$ » читают так: «из элементов x таких, что...».

Для наглядного объяснения операций над множествами удобно использовать изображение множеств в виде кругов Эйлера. На рисунке 3 с помощью кругов Эйлера дана иллюстрация операции пересечения двух множеств.

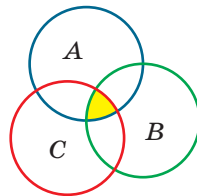
Можно рассматривать пересечения не только двух, но и трёх, четырёх и т. д. множеств. Например, пересечением множеств A , B и C называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат и множеству A , и множеству B , и множеству C (рис. 4). Пересечение множеств A , B и C обозначают так: $A \cap B \cap C$.

Использование операции пересечения множеств в математике соответствует использованию союза «и» в русском языке. Родственный ему союз «или» связан с другой операцией над множествами — *операцией объединения*.



$A \cap B$

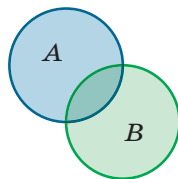
Рис. 3



$A \cap B \cap C$

Рис. 4

Определение 2. Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат *хотя бы одному* из этих множеств: множеству A или множеству B (рис. 5). Обозначение: $A \cup B$. Символ $\cup$ — *знак объединения*.



$A \cup B$

Рис. 5

Таким образом, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пример Найти пересечение и объединение множеств A и B , если:
а) A — множество делителей числа 105, B — множество делителей числа 55; б) $A = [1; 6]$, $B = (2; 8)$.

Решение. а) Разложим на простые множители числа 105 и 55. Так как $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, а $55 = 5 \cdot 11$, то $A = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$, а $B = \{1, 5, 11, 55\}$.

Общих элементов у этих множеств только два: 1 и 5. Значит, $A \cap B = \{1; 5\}$.

Возьмём все элементы множества A , а затем те элементы множества B , которые не встречались в A , т. е. добавим 11 и 55. Значит, $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 21, 35, 55, 105\}$.



Рис. 6

б) Тут удобнее работать с числовой прямой. Изобразим числовые промежутки A и B на числовой прямой, используя для каждого из этих множеств свой способ штриховки (рис. 6).

Пересечение $A \cap B$ — это множество, где штриховки совпали: $A \cap B = (2; 6]$.

Объединение $A \cup B$ — это множество, где есть хотя бы одна штриховка. В данном случае $A \cup B = [1; 8)$.

Упражнения

2.1. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$, если:

а) $A = \left\{-5; -2\frac{1}{3}; -1,12; 0; 2,7; 4\frac{3}{11}\right\}$, $B = \left\{-4; -2\frac{1}{3}; 0; 1\frac{2}{7}; 2,7\right\}$;

б) $A = \left\{-5\frac{1}{3}; -2\frac{1}{7}; 2; 3,6; 4,16\right\}$, $B = \left\{-2\frac{2}{7}; -2; 2; 3,6; 4\frac{1}{6}\right\}$.

2.2. Задайте множество C перечислением его элементов и найдите $A \cup C$, если:

а) $A = \left[-4; 5\frac{1}{3}\right]$, C — множество целых чисел из отрезка $\left[-4; 5\frac{1}{3}\right]$;

б) $A = \left[-6\frac{3}{7}; 3\frac{4}{7}\right]$, C — множество целых чисел из отрезка $\left[-4\frac{1}{3}; 6\right]$.

2.3. Найдите пересечение множеств A и B :

а) A — множество всех натуральных чисел, кратных 5, B — множество натуральных чисел, меньших 45;

б) A — множество всех нечётных целых чисел,
 $B = \{0; 7; 14; 21; 28; 35; \dots; 77\}$;

в) A — множество всех рациональных чисел, модуль которых меньше 10, B — множество целых чисел;

г) A — множество всех чётных целых чисел, B — множество натуральных чисел, не превышающих 24;

д) $A = \{-15; -14; -13; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 12\}$; B — множество целых чисел, кратных 5;

е) A — множество всех натуральных чисел, больших 21, B — множество всех рациональных чисел.

2.4. Даны множества $A = \{-3; -1; 0; 1; 3; 5; 7; 9; 11\}$; $D = \{-1; 11\}$; $B = \{-1; 1; 5; 9; 11\}$; $C = \{-3; -1; 0; 3; 7; 11\}$.

а) Можно ли выделить среди них три таких множества, что пересечение двух из них равно третьему? Запишите равенство с помощью соответствующих математических символов.

б) Можно ли выделить среди них три таких множества, что объединение двух из них равно третьему? Запишите равенство с помощью соответствующих математических символов.

2.5. а) Дано множество A делителей числа 36 и множество B делителей числа 48. Найдите пересечение множеств A и B .

б) Дано множество A делителей числа 40 и множество B делителей числа 60. Найдите пересечение множеств A и B .

2.6. а) Дано множество A двузначных чисел, кратных 2, и множество B двузначных чисел, кратных 7. Найдите пересечение множеств A и B .

б) Дано множество A двузначных чисел, кратных 3, и множество B двузначных чисел, кратных 8. Найдите пересечение множеств A и B .

2.7. Для заданных множеств A и B изобразите на координатной прямой множество $A \cup B$. Сделайте соответствующие записи.

- а) $A = (-4; 3)$ и $B = [0; 5]$; г) $A = [-5; 2]$ и $B = (-1; 4)$;
б) $A = (-\infty; 3]$ и $B = [-1; +\infty)$; д) $A = (-\infty; 1)$ и $B = [-4; +\infty)$;
в) $A = (-\infty; 2,8)$ и $B = \left[2\frac{8}{11}; 5\right)$; е) $A = (-1; 3)$ и $B = [-2; 6)$.

2.8. Для заданных множеств A и B изобразите на координатной прямой множество $A \cap B$. Запишите полученный числовой промежуток.

- а) $A = [-7; 3]$ и $B = [-2; 5]$;
б) $A = (-\infty; 1]$ и $B = [-4; +\infty)$;
в) $A = \left(-4; 1\frac{7}{11}\right)$ и $B = [1,6; 5,8]$;
г) $A = [-6; 2]$ и $B = [-2; 7]$;
д) $A = (-\infty; 5)$ и $B = [-2; +\infty)$;
е) $A = \left(-3\frac{2}{9}; 3,2\right)$ и $B = \left[-3,2; 3\frac{3}{11}\right)$.

Даны множества $A = (1; 2)$, $B = [0; 1,7]$, $C = (-1; 1,5]$ и $D = [-1,1; 1,2)$. Найдите указанное множество.

- 2.9.** а) $A \cup C$; в) $(A \cup B) \cap D$;
б) $A \cap B$; г) $(A \cap B) \cap D$.

- 2.10.** а) $A \cup B \cup C$; в) $(C \cup D) \cap B$;
б) $A \cap B \cap C$; г) $(C \cap D) \cup B$.

2.11. Даны множества $A = (7,7; 11)$, $B = \left[7\frac{5}{7}; 12\frac{3}{7}\right]$, $C = \left[12\frac{4}{9}; 13\right]$ и $D = \left[8,6; 13\frac{2}{3}\right)$. Найдите множество:

- а) $A \cup B \cup C$; в) $(A \cup B) \cap D$; д) $(C \cup D) \cap B$;
б) $A \cap B \cap C$; г) $(A \cap B) \cap D$; е) $(C \cap D) \cup B$.

Решите задачу, используя круги (диаграммы) Эйлера.

2.12. Множество A состоит из 75 элементов, множество B — из 112, а множество $A \cap B$ — из 42 элементов. Сколько элементов:

- а) принадлежит множеству A , но не принадлежит множеству B ;
б) принадлежит множеству B , но не принадлежит множеству A ;
в) принадлежит множеству B и множеству A ?

- 2.13.** Множество A состоит из 90 элементов, множество B — из 125, а множество $A \cup B$ — из 175 элементов. Сколько элементов:
а) принадлежит множеству A , но не принадлежит множеству B ;
б) принадлежит множеству B , но не принадлежит множеству A ;
в) принадлежит и множеству B , и множеству A ?
- 2.14.** На школьной спартакиаде каждый из 30 учеников 8-го класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 9 учеников, а 13 учеников выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили норматив:
а) по бегу;
б) по прыжкам в высоту;
в) по прыжкам в высоту, но не выполнили норматив по бегу?
- 2.15.** На школьном интеллектуальном марафоне каждый из 20 участников сделал или задание по географии, или задание по биологии. Задания и по географии, и по биологии смогли выполнить 5 учеников, а 9 учеников выполнили задание по биологии, но не выполнили задание по географии. Сколько учеников выполнили задание:
а) по биологии;
б) по географии;
в) по географии, но не выполнили задание по биологии?
- 2.16.** В средней школе каждый учащийся изучает английский или французский язык со 2-го класса. В 5-м классе учащиеся по желанию могут начать изучать второй язык. Таким образом, среди учащихся 2—9-х классов 675 учащихся изучают английский язык, 428 — французский, 185 — оба языка. Сколько учащихся 2—9-х классов изучают иностранные языки?
- 2.17.** Множество состоит из нескольких натуральных чисел, каждое из которых кратно или трём, или четырём, или двенадцати. Чисел, кратных трём, 23, кратных четырём — 42, а кратных двенадцати — 11. Из скольких чисел состоит множество?
- 2.18.** Учащимся 8-го класса, в котором учится 40 человек, на каникулы было дано задание прочитать книги A , B и C . После каникул оказалось, что книгу A прочитали 25 учеников, книгу B — 22 ученика, книгу C — 22 ученика; одну из книг A или B прочитали 33 ученика, одну из книг A или C — 32 ученика, одну

из книг B или C — 31 ученик. Полностью задание выполнили только 10 учеников класса. Сколько учеников:

- а) прочитали только по одной книге;
- б) прочитали две книги;
- в) не прочитали ни одной из указанных книг?

2.19. Каждый старшеклассник может посещать один из трёх факультативов: по математике, по физике или по химии. При этом по желанию каждый может посещать одновременно два или три факультатива одновременно. Таким образом, факультатив по математике посещают 235 учащихся, по физике — 186, по химии — 160. Кроме того, факультатив по математике и по физике одновременно посещают 90 учащихся, по физике и по химии — 75, по математике и по химии — 112, три факультатива сразу посещают 28 учащихся. Сколько всего учащихся в старших классах?

2.20. Одному из учащихся было поручено написать заметку в стенгазету об успеваемости класса за первое полугодие. Он взял журнал и выписал следующие сведения: из 40 учащихся класса не имеют троек по русскому языку 25 человек, по математике — 28, по физике — 31, по математике и по физике — 22, по математике и по русскому языку — 16, по физике и по русскому языку — 16, 12 человек учатся без троек по всем предметам. Редактор заподозрил, что в заметке приведены неверные данные. Составьте схему Эйлера и объясните, почему редактор прав.

Упражнения для повторения

2.21. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 3x + 8y = -1; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{1}{4}x - y = -5, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = 3. \end{cases} \end{array}$$

2.22. При каком значении параметра p прямая $y = px - 3$ проходит через точку $A(-2; 9)$?

2.23. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - 3, & \text{если } x < -3; \\ x + 2, & \text{если } -3 \leq x \leq 5. \end{cases}$

Постройте график функции $y = f(x)$.

Оглавление

Глава 1. Множество действительных чисел	5
§ 1. Множества, их элементы и подмножества	5
§ 2. Операции над множествами	13
§ 3. Рациональные числа	19
§ 4. Познакомимся с квадратными корнями	25
§ 5. Иррациональные числа	34
§ 6. Действительные числа и числовая прямая	37
§ 7. Свойства числовых неравенств	42
§ 8. Линейные неравенства	48
§ 9. Модуль действительного числа. Функция $y = x $	57
§ 10. Приближённые значения действительных чисел	66
Итак, в главе 1	72
Вопросы	73
Тест	74
Дополнительные задачи	75
Из истории математики	78
Глава 2. Алгебраические дроби	83
§ 11. Определение алгебраической дроби	83
§ 12. Основное свойство алгебраической дроби	87
§ 13. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями	95
§ 14. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями	98
§ 15. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень	104
§ 16. Преобразование рациональных выражений	108
§ 17. Понятие степени с любым целочисленным показателем	114
§ 18. Стандартный вид положительного числа	121

Итак, в главе 2	125
Вопросы	125
Тест	126
Дополнительные задачи	127
Из истории математики	132
Глава 3. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратных корней	135
§ 19. Функция $y = \sqrt{x}$, её график и свойства	135
§ 20. Свойства квадратных корней	145
§ 21. Тождество $\sqrt{x^2} = x $	150
§ 22. Вынесение множителя из-под знака квадратного корня. Внесение множителя под знак квадратного корня	154
§ 23. Преобразование иррациональных выражений	159
Итак, в главе 3	165
Вопросы	165
Тест	166
Дополнительные задачи	167
Из истории математики	170
Глава 4. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$	173
§ 24. Функция $y = kx^2$, $k > 0$	173
§ 25. Функция $y = kx^2$, $k < 0$	184
§ 26. Как построить график функции $y = f(x + l)$, если известен график функции $y = f(x)$	190
§ 27. Как построить график функции $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$	198
§ 28. Как построить график функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$	205
§ 29. Функция $y = ax^2 + bx + c$	214
§ 30. Функция $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$	224
§ 31. Функция $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$	234
Итак, в главе 4	242
Вопросы	242
Тест	243
Дополнительные задачи	245
Из истории математики	250

Глава 5. Квадратные уравнения	255
§ 32. Основные понятия, связанные с квадратными уравнениями	255
§ 33. Формула корней квадратных уравнений	259
§ 34. Частный случай формулы корней квадратных уравнений	270
§ 35*. Квадратные уравнения с параметром	273
§ 36. Рациональные уравнения	278
§ 37. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций	288
§ 38. Теорема Виета	297
§ 39. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители	303
Итак, в главе 5	308
Вопросы	309
Тест	309
Дополнительные задачи	310
Из истории математики	313
Глава 6. Вероятности случайных событий	317
§ 40. Испытания с равновероятными исходами	318
§ 41. Случайные события. Вероятность противоположного события	326
§ 42. Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий	334
§ 43. Испытания с конечным числом исходов. Последовательные независимые испытания и повторения испытаний	345
Итак, в главе 6	359
Вопросы	359
Тест	360
Дополнительные задачи	362
Из истории математики	365
Ответы	368
Список дополнительной литературы	380
Приложение. Таблица квадратов двузначных чисел	381