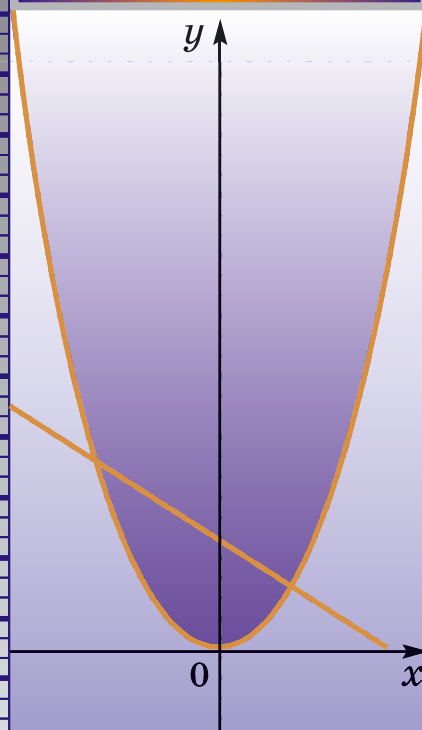




МГУ - ШКОЛЕ

Алгебра

8



УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников,
А. В. Шевкин

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 431 от 14.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 118 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 108-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Условные обозначения:

-  — задания, предназначенные для устной работы
-  — задания повышенной трудности
-  — начало необязательного материала внутри пункта
-  — конец необязательного материала внутри пункта

Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций :
А45 издание в pdf-формате / [С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 10-е изд., стер. — Мо-
сква : Просвещение, 2022. — 303 с. : ил. — (МГУ — школе).
ISBN 978-5-09-101258-3 (электр. изд.). — Текст : электрон-
ный.

ISBN 978-5-09-087630-8 (печ. изд.).

Данный учебник является частью трёхлетнего курса алгебры для обще-
образовательных школ. Новое издание учебника дополнено и переработано.
Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результа-
тов обучения, предусмотренных ФГОС, и дать учащимся хорошую подготов-
ку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной программы или
программы для классов с углублённым изучением математики.

УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101258-3 (электр. изд.) © АО «Издательство «Просвещение», 2014, 2017
ISBN 978-5-09-087630-8 (печ. изд.) © Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2014, 2019
Все права защищены

Оглавление

ГЛАВА 1. Простейшие функции. Квадратные корни

§ 1. Функции и графики	5
1.1. Числовые неравенства	—
1.2. Координатная ось. Модуль числа	11
1.3. Множества чисел	14
1.4. Декартова система координат на плоскости	19
1.5. Понятие функции	22
1.6. Понятие графика функции	26
§ 2. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$	30
2.1. Функция $y = x$ и её график	—
2.2. Функция $y = x^2$	33
2.3. График функции $y = x^2$	35
2.4. Функция $y = \frac{1}{x}$	39
2.5. График функции $y = \frac{1}{x}$	41
§ 3. Квадратные корни	45
3.1. Понятие квадратного корня	—
3.2. Арифметический квадратный корень	48
3.3. Свойства арифметических квадратных корней	51
3.4. Квадратный корень из натурального числа	58
3.5*. Приближённое вычисление квадратных корней	60
Дополнения к главе 1	62
1. Множества	—
2. Исторические сведения	66

ГЛАВА 2. Квадратные и рациональные уравнения

§ 4. Квадратные уравнения	69
4.1. Квадратный трёхчлен	—
4.2. Понятие квадратного уравнения	74
4.3. Неполное квадратное уравнение	76
4.4. Решение квадратного уравнения общего вида	80
4.5. Приведённое квадратное уравнение	85
4.6. Теорема Виета	87
4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач	91

§ 5. Рациональные уравнения	94
5.1. Понятие рационального уравнения	—
5.2. Биквадратное уравнение	96
5.3. Распадающееся уравнение	99
5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая — нуль	101
5.5. Решение рациональных уравнений	104
5.6. Решение задач при помощи рациональных уравнений	107
5.7*. Решение рациональных уравнений при помощи замены неизвестного	111
5.8*. Уравнение-следствие	114
Дополнения к главе 2	119
1. Разложение многочленов на множители и решение уравнений	—
2. Комплексные числа	126
3. Исторические сведения	129
 ГЛАВА 3. Линейная, квадратичная и дробно-линейная функции	
§ 6. Линейная функция	131
6.1. Прямая пропорциональность	—
6.2. График функции $y = kx$	133
6.3. Линейная функция и её график	138
6.4. Равномерное движение	143
6.5. Функция $y = x $ и её график	146
6.6*. Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$	149
§ 7. Квадратичная функция	150
7.1. Функция $y = ax^2$ ($a > 0$)	—
7.2. Функция $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	155
7.3. График функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$	157
7.4. Квадратичная функция и её график	163
§ 8. Дробно-линейная функция	167
8.1. Обратная пропорциональность	—
8.2. Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$)	169
8.3. Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)	173
8.4. Дробно-линейная функция и её график	175
Дополнения к главе 3	178
1. Построение графиков функций, содержащих модули	—
2. Уравнение прямой, уравнение окружности	184
3. Исторические сведения	188

ГЛАВА 4. Системы рациональных уравнений

§ 9. Системы рациональных уравнений	191
9.1. Понятие системы рациональных уравнений	—
9.2. Решение систем рациональных уравнений способом подстановки	195
9.3. Решение систем рациональных уравнений другими способами	201
9.4. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений	203
§ 10. Графический способ решения систем уравнений	209
10.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	210
10.2*. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	213
10.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом	218
10.4. Примеры решения уравнений графическим способом	222
Дополнения к главе 4	224
1. Решение уравнений в целых числах	—
2. Исторические сведения	228
Задания для повторения	232
Задания на исследование	283
Задания для самоконтроля	285
Список дополнительной литературы	288
Предметный указатель	290
Ответы	292

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

При изучении главы 1 вам предстоит познакомиться с новым понятием — функцией; установить свойства простейших функций $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$; освоить понятие арифметического корня и его свойства; научиться преобразовывать выражения, содержащие корни. Эти знания помогут вам изучать следующие главы учебника и другие школьные предметы.

§ 1. Функции и графики

1.1. Числовые неравенства

Действительные числа подчинены следующим правилам:

Правило 1. Для любых действительных чисел a и b имеет место только одно из соотношений

$$a = b, a > b, a < b.$$

Например, для чисел 6 и 10 верно неравенство $6 < 10$, но неверны равенство $6 = 10$ и неравенство $6 > 10$.

Заметим, что если $a > b$, то $b < a$.

Неравенства одного знака называют **одноимёнными**, например: неравенства $-2 < 5$ и $3 < 11$ одноимённые, неравенства $-5 > -10$ и $10 > -3$ также одноимённые.

Правило 2. Для любых действительных чисел a и b , таких, что $a < b$, найдётся такое действительное число c , что $a < c$ и $c < b$, или, что то же самое, $a < c < b$.

Например, для чисел 1,2 и 1,3 существует число 1,22, такое, что $1,2 < 1,22 < 1,3$.

Правило 3. Для любых действительных чисел a , b и c из неравенств $a < b$ и $b < c$ следует неравенство $a < c$ (свойство транзитивности неравенств).

Например, из неравенств $\frac{8}{9} < 1$ и $1 < \frac{4}{3}$ следует, что $\frac{8}{9} < \frac{4}{3}$.

Правило 4. Для любых действительных чисел a , b и c из неравенства $a < b$ следует неравенство $a + c < b + c$.

Это означает, что знак неравенства не изменится, если к правой и левой частям неравенства прибавить одно и то же число.

Например, прибавим к правой и левой частям верного неравенства $6 < 11$ по -4 , получим верное неравенство

$$6 - 4 < 11 - 4, \text{ или } 2 < 7.$$

Правило 5. Для любых действительных чисел a и b и любого положительного числа c из неравенства $a < b$ следует неравенство $ac < bc$.

Это означает, что знак неравенства не изменится, если правую и левую части неравенства умножить на одно и то же положительное число.

Например, умножим правую и левую части верного неравенства $-6 < 2$ на 3 , получим верное неравенство $-6 \cdot 3 < 2 \cdot 3$, или $-18 < 6$.

Из перечисленных выше пяти правил вытекают следующие свойства неравенств:

Свойство 1. Если числа a , b , c и d таковы, что $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

а)									
		a	$<$	b					
		c	$<$	d					
		$a + c < b + d$							
б)	$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$	$d > 0$					
		a	$<$	b					
		c	$<$	d					
		$a \cdot c < b \cdot d$							

Это означает, что верные одноимённые неравенства можно почленно складывать (рис. 1, а).

Действительно, из условия $a < b$ на основании правила 4 следует, что $a + c < b + c$, а из условия $c < d$ на основании того же правила 4 следует, что $b + c < b + d$. Теперь, применяя правило 3, получаем $a + c < b + d$.

Свойство 2. Если положительные числа a , b , c и d таковы, что $a < b$ и $c < d$, то $ac < bd$.

Это означает, что верные одноимённые неравенства, правые и левые части которых положительны, можно почленно перемножать (рис. 1, б).

Действительно, для положительных чисел a , b , c и d на основании правила 5 из условия $a < b$ получаем $ac < bc$, а из условия $c < d$ получаем $bc < bd$. Теперь на основании правила 3 получаем $ac < bd$.

Свойство 3. Если числа a и b таковы, что $a < b$, то $-a > -b$.

В самом деле, прибавив к левой и правой частям неравенства $a < b$ число $(-b - a)$, на основании правила 4 получим

$$a + (-b - a) < b + (-b - a),$$

откуда следует, что $-b < -a$, или $-a > -b$.

Свойство 4. Если c — отрицательное число и числа a и b таковы, что $a < b$, то $ac > bc$.

Это означает, что знак неравенства изменится на противоположный, если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число.

По свойству 3 из неравенства $a < b$ следует, что $-a > -b$.

Умножив это неравенство на положительное число $-c$, на основании правила 5 получим

$$(-a) \cdot (-c) > (-b) \cdot (-c),$$

откуда следует, что $ac > bc$.

Свойство 5. Если положительные числа a и b таковы, что $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

В самом деле, умножив неравенство $a < b$ на положительное число $\frac{1}{ab}$, получим на основании правила 5 после сокращений нужное неравенство

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \text{ или } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Свойство 6. Если положительные числа a и b таковы, что $a < b$, то $a^2 < b^2$.

Это свойство следует из свойства 2 при условии $c = a$ и $d = b$.

Свойство 7. Если a и b положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$.

Проведём доказательство от противного.

Предположим, что $a = b$, тогда $a^2 = b^2$, что противоречит условию $a^2 > b^2$, значит, предположение, что $a = b$, неверно.

Предположим, что $a < b$, тогда на основании свойства 6 получим, что $a^2 < b^2$, что противоречит условию $a^2 > b^2$, значит, предположение, что $a < b$, неверно.

Для двух чисел a и b по правилу 1 возможно только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Первые два противоречат условию $a^2 > b^2$, следовательно, $a > b$, что и требовалось доказать.

Выше употреблялись знаки равенства ($=$) и строгого неравенства ($<$ и $>$). Иногда возникает необходимость в нестрогих неравенствах.

Пример. В эту зиму температура в Москве не опускалась ниже -30°C . Если температуру обозначить буквой t , то в любой день зимы либо $t > -30^\circ\text{C}$, либо $t = -30^\circ\text{C}$, что записывают так: $t \geq -30^\circ\text{C}$.

Приведём определения нестрогих неравенств $a \leq b$ и $a \geq b$.

Числовое неравенство $a \leq b$ означает, что либо $a < b$, либо $a = b$. Неверно оно лишь в случае $a > b$.

Запись $a \leq b$ читают или « a не больше b », или « a меньше или равно b ».

Числовое неравенство $a \geq b$ означает, что либо $a > b$, либо $a = b$.

Запись $a \geq b$ читают « a не меньше b » или « a больше или равно b ».

Например, неравенства $5 \leq 6$ и $4 \geq 2^2$ оба верные, а неравенства $9 \leq 7$ и $3 \geq 4$ оба неверные.

Для нестрогих неравенств справедливы приведённые выше правила 3—5 и свойства 1—7, если в них знак строгого неравенства заменить на знак нестрогого неравенства. Сформулируем одно из таких свойств.

Свойство 6*. Если положительные числа a и b таковы, что $a \leq b$, то $a^2 \leq b^2$.

Мы уже отмечали, что если $a < b$ и $b < c$, то пишут $a < b < c$.

Подобным образом если $a \leq b$ и $b < c$, то пишут $a \leq b < c$; если $a < b$ и $b \leq c$, то пишут $a < b \leq c$; если $a \leq b$ и $b \leq c$, то пишут $a \leq b \leq c$.

Неравенства $a < b < c$, $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$ называют **двойными неравенствами**.

1. Какие неравенства можно:
а) складывать; б) перемножать?
2. В каком случае неравенство $a \geq b$:
а) верно; б) неверно?
3. Сравните:
а) 5 и 9; б) -5 и -9; в) $2,5 \cdot 4$ и 10;
г) 1,2 и 1,(2); д) -6,7 и 1; е) -5,(4) и -5,4.
4. Укажите число, большее одного из данных чисел и меньшее другого. Ответ запишите в виде двойного неравенства:
а) 3 и 5; б) -25 и -29;
в) 2,5 и 2,6; г) 2,4 и 2,(4);
д) -3,71 и -3,72; е) 0,(5) и 0,(6).
5. Сделайте вывод на основании двух верных неравенств.
Например, $3 < 15$ и $15 < 20$, значит, $3 < 20$.
а) $-5 < 0$ и $0 < 2$; б) $-2 < 0$ и $0 < 2$;
в) $2 > 1$ и $1 > 0$; г) $2,(1) > 2$ и $2 > 1,(6)$;
д) $-3,(7) > -4$ и $-4 > -7$; е) $0,(5) < 0,(6)$ и $0,(6) < 0,(67)$;
ж) $\frac{5}{6} < 1$ и $1 < \frac{9}{8}$; з) $\frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \frac{8}{15}$.
6. Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, прибавив к обеим частям неравенства одно и то же число:
а) $15 < 20$; б) $5 > 4$; в) $2,5 < 3$;
г) $1,1 < 1,2$; д) $1,3 \geq 1,2$; е) $5 \leq 6$.
7. Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, умножив обе части неравенства на одно и то же положительное число:
а) $15 < 20$; б) $5 > 4$; в) $-2,5 < 3$;
г) $1,1 < 1,2$; д) $1,3 \geq 1,2$; е) $-5 \leq 6$.
8. Сложите верные числовые неравенства:
а) $14 > 11$ и $10 > 9$; б) $-2 > -3$ и $3 > 2$;
в) $-6 < -5$ и $2 < 3$; г) $-8 \leq 0$ и $8 \leq 9$.
9. Перемножьте верные числовые неравенства:
а) $14 > 10$ и $2 > 1$; б) $5 > 3$ и $6 > 5$;
в) $6 < 7$ и $2 < 3$; г) $8 < 9$ и $1 < 2$.
10. Из данного верного неравенства получите верное неравенство, в котором каждое число заменено на противоположное.
Например, так как $19 > 13$, то $-19 < -13$.
а) $3 > 0$; б) $5 > -1$; в) $-9 < -1$;
г) $-5 \leq -1$; д) $9 \geq -2$; е) $0 \leq 3$.

- 11.** Умножьте обе части верного неравенства на отрицательное число, применив свойство 4:

а) $1 < 2$; б) $5 > 4,5$; в) $6,5 \leq 6,9$;
 г) $1,1 < 1,2$; д) $1,3 \geq 1,2$; е) $5 \leq 6$.

- 12.** Запишите неравенство, которое получится, если числа в левой и правой частях неравенства заменить на обратные им числа.

Например, так как $5 < 6$, то $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$.

а) $6 > 3$; б) $7 \leq 10$; в) $2 < 4$;
 г) $11 < 12$; д) $13 \geq 12$; е) $15 \leq 26$.

- 13.** Сравните:

а) 2^2 и 9^2 ; б) 5^2 и 6^2 ; в) 4^2 и 10^2 ;
 г) $1,3^2$ и $1,5^2$; д) $7,28^2$ и $8,37^2$; е) $5,4^2$ и $4,5^2$;
 ж) $(-2)^2$ и $(-3)^2$; з) 4^2 и $(-4)^2$; и) $(-4)^2$ и 1^2 ;
 к) $(-1)^2$ и $(-1,4)^2$; л) $(-4,9)^2$ и $(-7)^2$; м) 4^2 и $(-5)^2$.

Доказываем (14—16).

- 14.** Докажите, что:

а) если $a > b$ и $c > d$, то $a - d > b - c$;
 б) если $a < b$ и $c < d$, то $a - d < b - c$;
 в) если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

- 15.** Докажите для положительных чисел a , b , c и d , что:

а) если $a > b$ и $c > d$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$; б) если $a < b$ и $c < d$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

- 16.** Докажите, что:

а) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$; б) если $a < b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

- 17.** Верно ли неравенство:

а) $6,7272 \leq 6,(72) < 6,7273$; б) $-0,3132 < -0,(3) \leq -0,3131$?

- 18.** Солдат построили не по росту, но с чётким разделением на ряды и шеренги. В каждом ряду выбрали самого высокого, а из всех высоких — самого низкого. В каждой шеренге выбрали самого низкого, а из всех низких — самого высокого. Кто же выше ростом: самый низкий из высоких или самый высокий из низких?
Указание. Рассмотрите случаи, когда два выбранных солдата стоят: 1) в одном ряду; 2) в одной шеренге; 3) в разных рядах и шеренгах.

- 19. Исследуем.** Даны две дроби $\frac{95}{111}$ и $\frac{99}{112}$. Найдите:

а) все несократимые дроби со знаменателем 50, заключённые между данными дробями;
 б) все несократимые дроби с числителем 50, заключённые между данными дробями;
 в) все несократимые дроби с наименьшим натуральным знаменателем, заключённые между данными дробями.

1.2. Координатная ось. Модуль числа

Напомним, что прямую, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют **координатной осью**.

Каждой точке координатной оси ставится в соответствие действительное число x по следующему правилу: начальной точке O — число ноль; точке A , находящейся на положительном луче, — число x , равное длине отрезка OA ; точке B , находящейся на отрицательном луче, — число x , равное длине отрезка OB , взятой со знаком «-».

Число x , соответствующее произвольной точке оси x согласно указанному правилу, называют **координатой** этой точки.

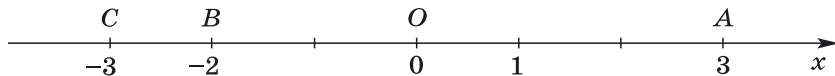
Определённую таким образом координатную ось называют координатной осью x или коротко — осью x . Пишут также: ось Ox .

Каждой точке оси x соответствует действительное число — координата этой точки; две различные точки A и B оси x имеют различные координаты x_1 и x_2 ; каждое действительное число есть координата некоторой точки оси x . Иначе говоря, установлено взаимно-однозначное соответствие между точками оси Ox и действительными числами.

Модуль, или абсолютную величину, действительного числа a обозначают $|a|$; по определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

На координатной оси $|a|$ есть расстояние от точки a до начала координат. Например, $|0| = 0$, $|3| = OA = 3$, $|-3| = OC = 3$, $|-2| = OB = 2$ (рис. 2).



■ Рис. 2

Из определения модуля числа следуют свойства:

- 1) $|-a| = |a|$;
- 2) $a \leq |a|$;
- 3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- 4) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;
- 5) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 6) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Обратим внимание на то, что если $|a| \neq 0$, то существуют ровно два числа (две точки координатной оси), имеющие такой модуль. Например, если $|a| = 3$, то $a_1 = -3$ и $a_2 = 3$ (рис. 2).

Это замечание помогает решать некоторые уравнения с модулями.

Пример 1. Решим уравнение

$$|x| = 7. \quad (1)$$

По определению модуль числа равен 7 только в двух случаях: когда число равно -7 или 7 . Следовательно, уравнение (1) имеет два корня: $x_1 = -7$ и $x_2 = 7$.

Пример 2. Решим уравнение

$$|2x - 3| = 9. \quad (2)$$

По определению модуль числа равен 9 только в двух случаях: когда число равно -9 или 9 . Поэтому корнями уравнения (2) являются только корни двух уравнений:

$$2x - 3 = -9 \text{ и } 2x - 3 = 9.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = -3$, второе уравнение также имеет единственный корень $x_2 = 6$.

Следовательно, уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = 6$.

Пример 3. Решим уравнение

$$|2x - 1| = |3x - 4|. \quad (3)$$

По определению модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа либо равны, либо противоположны. Поэтому корнями уравнения (3) являются только корни двух уравнений:

$$2x - 1 = 3x - 4 \text{ и } 2x - 1 = -(3x - 4).$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 3$, второе уравнение также имеет единственный корень $x_2 = 1$.

Следовательно, уравнение (3) имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Пример 4. Решим уравнение

$$||x| - 3| = 1. \quad (4)$$

По определению модуль числа равен 1 только в двух случаях: когда число равно -1 или 1 . Поэтому корнями уравнения (4) являются только корни двух уравнений:

$$|x| - 3 = -1 \text{ и } |x| - 3 = 1.$$

Перепишем эти уравнения в виде

$$|x| = 2 \text{ и } |x| = 4.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, второе также имеет два корня: $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$.

Следовательно, уравнение (4) имеет четыре корня: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$. ●

20. Укажите на координатной оси числа:

а) -5 и $0,31$; б) $15,57$ и $5,176$;

в) $-\pi$ и π^2 ; г) $-5\frac{1}{3}$ и $4,01$.

21. Укажите хотя бы три числа, находящиеся на координатной оси между числами:

а) $3,11$ и $3,12$; б) $2,082$ и $2,081$;

в) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$; г) $3,5$ и $3\frac{4}{9}$.

22. а) Каждой ли точке координатной оси поставлено в соответствие число?

б) Каждому ли числу поставлена в соответствие точка координатной оси?

23. Решите уравнение:

а) $|x| = 5$; б) $|2x - 3| = 7$;

в) $||x| - 2| = 4$; г) $||x| - 4| = 2$;

д) $||2x - 5| - 1| = 7$; е) $||2x - 1| - 5| = 7$;

ж) $||2x - 7| - 5| = 1$; з) $|x - 1| = |2x - 4|$;

и) $|3x + 2| = |5x + 6|$; к) $|3x - 1| = |x - 5|$.

24. Исследуем. Найдите значение a , при котором уравнение:

а) $|2x - 4| = |x - a|$; б) $|3x - 2| = |x - a|$

имеет единственный корень.

Доказываем (25—28).

25. Докажите свойства 1—6 модуля числа.

26. Докажите, что для любого числа x :

а) $|15x - 16| = |16 - 15x|$; б) $|x^2 - 7| = |7 - x^2|$;

в) $12x - 1 \leq |1 - 12x|$; г) $x^2 - 2011 \leq |2011 - x^2|$;

д) $|x^2 - 49| = |x - 7| \cdot |x + 7|$; е) $|x^2 - 3| = \frac{|x^4 - 9|}{x^2 + 3}$;

ж) $|8 + 5x| \leq |1 + 2x| + |7 + 3x|$;

з) $|1 + 6x| \leq |5x - 11| + |12 + x|$;

и) $|2 + 4x| \leq |6 + 7x| + |4 + 3x|$;

к) $|x - 23| \leq |12x - 11| + |12 + 11x|$.

27. а) Докажите, что расстояние между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ вычисляется по формуле $AB = |x_1 - x_2|$.

б) Докажите, что координата точки $C(x)$ — середины отрезка AB , где $A(x_1)$ и $B(x_2)$, — вычисляется по формуле $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

- 28.** Докажите, что если точка $C(x)$ принадлежит отрезку AB , где $A(x_1)$ и $B(x_2)$, и делит этот отрезок в отношении $AC : CB = m : n$, то координата точки C вычисляется по формуле

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}.$$

- 29.** Даны точки $A(3)$ и $B(11)$. Определите координату точки C , если:
- а) C — середина отрезка AB ;
 - б) A — середина отрезка BC ;
 - в) $AC : CB = 1 : 3$;
 - г) $AC : CB = 3 : 5$.

1.3. Множества чисел

Пусть даны координатная ось x и два действительных числа a и b , удовлетворяющие неравенству $a < b$. Числа a и b можно рассматривать как координаты двух различных точек оси x , которые условились также называть точками a и b (рис. 3).



■ Рис. 3

Множество точек оси x , состоящее из точек a и b и всех точек, находящихся между ними (см. рис. 3), называют отрезком от a до b и обозначают $[a; b]$.

Таким образом, отрезок $[a; b]$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству

$$a \leq x \leq b.$$

Точки a и b называют концами отрезка $[a; b]$. Концы отрезка $[a; b]$ принадлежат этому отрезку.

Если из отрезка $[a; b]$ исключить оба его конца, то получим множество точек, которое обозначают $(a; b)$ и называют интервалом от a до b .

Таким образом, интервал $(a; b)$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству

$$a < x < b.$$

Если из отрезка $[a; b]$ исключить точку b , то получим множество точек, которое обозначают $[a; b)$ и называют полуинтервалом от a до b , включая a .

Таким образом, полуинтервал $[a; b)$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству

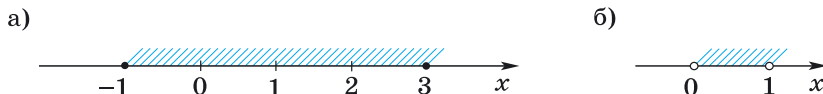
$$a \leq x < b.$$

Если из отрезка $[a; b]$ исключить точку a , то получим множество точек, которое обозначают $(a; b]$ и называют полуинтервалом от a до b , включая b .

Полуинтервал $(a; b]$ есть множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству

$$a < x \leq b.$$

Пример 1. Отрезок $[-1; 3]$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству $-1 \leq x \leq 3$ (рис. 4, а).

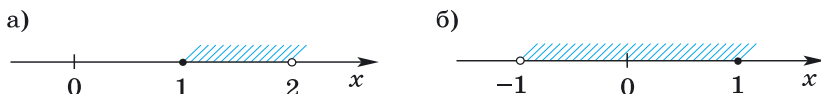


■ Рис. 4

Пример 2. Интервал $(0; 1)$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству $0 < x < 1$ (рис. 4, б).

Замечание. Концы промежутков, входящие в рассматриваемое множество, отмечают закрашенными кружками, а не входящие — незакрашенными кружками.

Пример 3. Полуинтервал $[1; 2)$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству $1 \leq x < 2$ (рис. 5, а).



■ Рис. 5

Пример 4. Полуинтервал $(-1; 1]$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству $-1 < x \leq 1$ (рис. 5, б).

Если точка x движется по координатной оси x в положительном направлении и при этом её координата может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта *точка стремится к плюс бесконечности*, и пишут: $x \rightarrow +\infty$.

Аналогично если точка x движется по координатной оси в отрицательном направлении и при этом её координата x такова, что $|x|$ может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта *точка стремится к минус бесконечности*, и пишут: $x \rightarrow -\infty$.

Выше считалось, что a и b — числа (или точки оси x), но термин «интервал» понимают также в более широком смысле, заменяя a на $-\infty$ или b на $+\infty$.

Интервал $(a; +\infty)$, где a — данное число, — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $x > a$, или множество всех точек оси x , имеющих координаты $x > a$.

Интервал $(-\infty; b)$, где b — данное число, — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $x < b$, или множество всех точек оси x , имеющих координаты $x < b$.

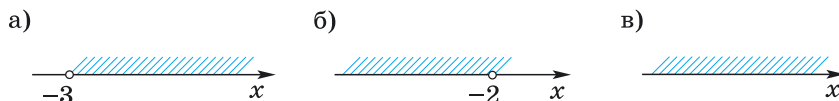


Рис. 6

Наконец, интервал $(-\infty; +\infty)$ — это множество всех действительных чисел или множество всех точек оси x .

Например, на рисунке 6, a изображён интервал $(-3; +\infty)$, на рисунке 6, b — интервал $(-\infty; -2)$, на рисунке 6, c — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Таким образом, интервал $(a; b)$ может быть конечным, если a и b — данные числа (или точки оси x), но может быть и бесконечным, если a или b соответственно $-\infty$ или $+\infty$.

Отрезок $[a; b]$ всегда конечный. Отрезок определяется данными числами a и b (или точками оси x).

Полуинтервалы $[a; b)$ и $(a; b]$ также могут быть бесконечными.

Полуинтервал $[a; +\infty)$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $x \geq a$, или множество всех точек оси x , имеющих координаты $x \geq a$.

Полуинтервал $(-\infty; b]$ — это множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $x \leq b$, или множество всех точек оси x , имеющих координаты $x \leq b$.

Например, на рисунке 7, a изображён полуинтервал $[5; +\infty)$, на рисунке 7, b — полуинтервал $(-\infty; -3]$.

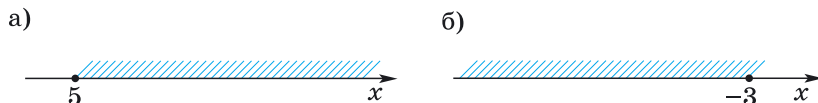


Рис. 7

Иногда для отрезков, интервалов, полуинтервалов используют общее название — **промежутки**.

Кроме отрезков, интервалов и полуинтервалов, рассматривают и другие множества чисел, их часто обозначают буквами $A, B, C, \dots$. Некоторые множества имеют специальные обозначения. Например, N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество действительных чисел, R_+ — множество действительных положительных чисел.

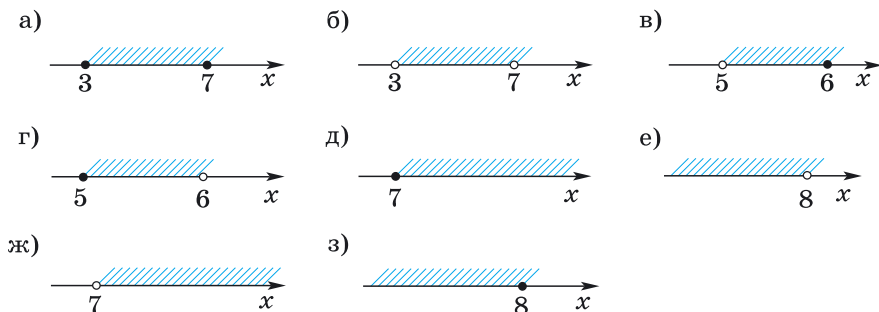
Тот факт, что число принадлежит или не принадлежит множеству чисел, записывают с помощью специальных знаков: $\in$ (принадлежит) и $\notin$ (не принадлежит).

Например, $-5 \in Z$ (число -5 принадлежит множеству целых чисел), $-5 \notin N$ (число -5 не принадлежит множеству натуральных чисел).

30. а) Какое множество чисел называют отрезком, интервалом, полуинтервалом?

б) Что означает запись: $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$?

- 31.** Назовите все целые числа, принадлежащие множеству чисел:
 а) $[-3; 1]$; б) $(-3; 1)$; в) $[-3; 1)$; г) $(-3; 1]$;
 д) $[-2; 3]$; е) $(-2; 3)$; ж) $[-2; 3)$; з) $(-2; 3]$.
- 32.** Назовите три целых числа, принадлежащие множеству чисел:
 а) $[0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$; г) $(-\infty; 1]$.
- 33.** Прочитайте название числового промежутка и изобразите его на координатной оси:
 а) $[3; 5]$; б) $(3; 5)$; в) $[3; 5)$; г) $(3; 5]$;
 д) $[-2; +\infty)$; е) $(-2; +\infty)$; ж) $(-\infty; -2)$; з) $(-\infty; -2]$.
- 34.** Запишите обозначение:
 а) отрезка от 2 до 4;
 б) интервала от 2 до 4;
 в) полуинтервала от 2 до 4, включая 4;
 г) полуинтервала от 2 до 4, включая 2;
 д) интервала от 5 до $+\infty$;
 е) полуинтервала от 5 до $+\infty$;
 ж) интервала от $-\infty$ до 0;
 з) полуинтервала от $-\infty$ до 0.
- Изобразите указанное множество чисел на координатной оси.
- 35.** Принадлежит ли число -2 множеству чисел (сделайте запись с помощью знаков $\in$ и $\notin$):
 а) $[-3; 0]$; б) $(-2; 3)$; в) $(-\infty; -2]$; г) $(-2; +\infty)$;
 д) $\mathbb{N}$; е) $\mathbb{Z}$; ж) $\mathbb{Q}$; з) $\mathbb{R}$?
- 36.** Принадлежит ли число $\frac{2}{3}$ множеству чисел (сделайте запись с помощью знаков $\in$ и $\notin$):
 а) $(0; 1]$; б) $[1; 2]$; в) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; г) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$;
 д) $\mathbb{N}$; е) $\mathbb{Z}$; ж) $\mathbb{Q}$; з) $\mathbb{R}$?
- 37.** Запишите обозначение числового промежутка, изображённого на рисунке 8.

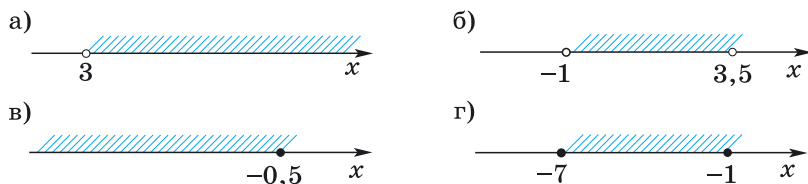


■ Рис. 8

38. Какому из числовых промежутков, изображённых на рисунке 8, соответствует множество чисел x , удовлетворяющих неравенству:

- а) $x \geq 7$; б) $x > 7$; в) $x \leq 8$;
 г) $x < 8$; д) $3 < x < 7$; е) $3 \leq x \leq 7$;
 ж) $5 \leq x < 6$; з) $5 < x \leq 6$?

39. Запишите изображённый на рисунке 9 числовой промежуток с помощью знаков неравенств.



■ Рис. 9

40. Изобразите на координатной оси все числа:

- а) меньшие 3;
 б) большие -5;
 в) не большие 2;
 г) не меньшие 0;
 д) большие 7, но меньшие 10;
 е) большие -5, но меньшие -1;
 ж) не меньшие 3 и не большие 9;
 з) не меньшие $-\frac{1}{2}$, но меньшие 4.

Обозначьте полученное множество чисел.

41. Изобразите на координатной оси:

- а) отрезок $[2; 5]$; б) интервал $(-2; 0)$.
 Запишите его с помощью двойного неравенства.

42. Изобразите на координатной оси числовые промежутки:

- а) $[-2; 3]$ и $[0; 2]$; б) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ и $[-2; 0,3]$;
 в) $(-4; 0,29)$ и $\left(\frac{2}{7}; 5\right)$; г) $\left(-0,44; \frac{13}{40}\right)$ и $\left(-\frac{3}{7}; -\frac{1}{4}\right)$;
 д) $\left[-3\frac{2}{3}; 1\right]$ и $[1; +\infty)$; е) $(-\infty; 2)$ и $[2; 3]$.

Имеют ли они общие точки?

Если да, то запишите общую часть (пересечение) этих множеств.

1.4. Декартова система координат на плоскости

Зададим на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось Ox и ось Oy — с точкой пересечения O , являющейся начальной точкой каждой из этих осей, и равными единичными отрезками.

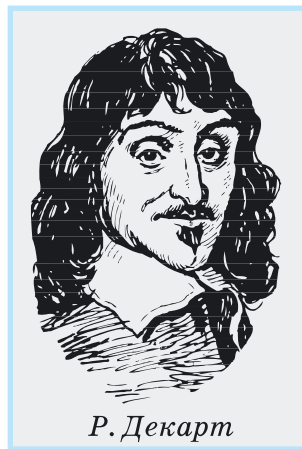
Говорят, что этим на плоскости определена **прямоугольная система координат xOy** . Её называют ещё **декартовой системой координат** по имени французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650), который ввёл в математику это важное понятие.

Ось Ox называют **осью абсцисс**, а ось Oy — **осью ординат**. Точку O пересечения осей координат называют **началом системы координат**. Плоскость, на которой задана декартова система координат, называют **координатной плоскостью**.

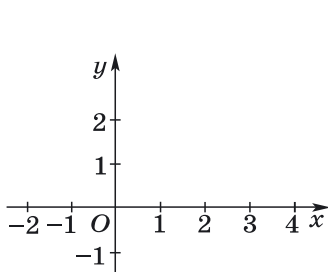
Обычно ось абсцисс изображают в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат — в виде вертикальной прямой, направленной вверх (рис. 10).

Пусть A — произвольная точка координатной плоскости. Проведём через точку A прямые, параллельные осям координат (рис. 11). Прямая, параллельная оси Oy , пересечёт ось Ox в точке A_1 , а прямая, параллельная оси Ox , пересечёт ось Oy в точке A_2 . **Абсциссой точки A** называют координату x точки A_1 на оси Ox . **Ординатой точки A** называют координату y точки A_2 на оси Oy . Абсциссу x и ординату y точки A называют **координатами точки A** .

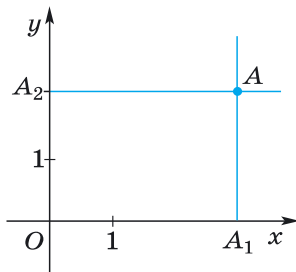
Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A(x; y)$, причём на первом месте пишут абсциссу, а на втором — ординату. Например, точка A , изображённая на рисунке 12, имеет абсциссу $x = 4$ и ординату $y = 3$, поэтому пи-



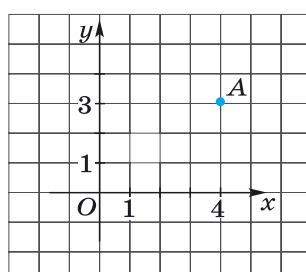
Р. Декарт



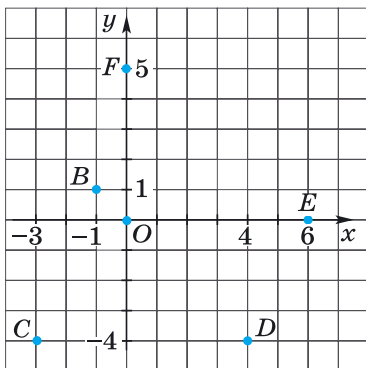
■ Рис. 10



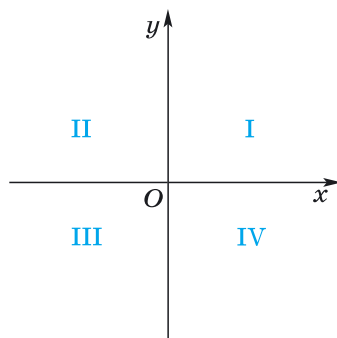
■ Рис. 11



■ Рис. 12



■ Рис. 13



■ Рис. 14

шут $A(4; 3)$. На рисунке 13 изображена прямоугольная система координат xOy и точки $O(0; 0)$, $B(-1; 1)$, $C(-3; -4)$, $D(4; -4)$, $E(6; 0)$, $F(0; 5)$.

Важно отметить, что если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждой точке A плоскости приводится в соответствие пара чисел $(x; y)$ — пара координат точки A , и в то же время произвольную пару чисел $(x; y)$ можно рассматривать как пару координат некоторой точки A плоскости.

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, поменяв эти числа местами, получим другую пару, определяющую другую точку плоскости. Поэтому часто пару координат $(x; y)$ точки A называют упорядоченной парой чисел.

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy , то:

- 1) каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (пара координат точки);
- 2) разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;
- 3) каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой точке плоскости.

Прямоугольная система координат xOy разделяет плоскость на четыре части, называемые **координатными углами**, или **координатными четвертями**, или просто **четвертями**. Обозначим их римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 14). Если исключить точки, лежащие на осях координат, то можно сказать, что:

точки I четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x > 0$, $y > 0$;

точки II четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x < 0$, $y > 0$;

точки III четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x < 0, y < 0$;

точки IV четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x > 0, y < 0$.

Например, точка $B(-2; 5)$ на рисунке 15 принадлежит II четверти, точка $D(4; -2)$ принадлежит IV четверти.

Если точка лежит на оси Oy , то её абсцисса равна нулю;

если абсцисса точки равна нулю, то точка лежит на оси Oy .

Если точка лежит на оси Ox , то её ордината равна нулю;

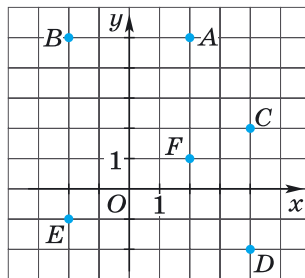
если ордината точки равна нулю, то точка лежит на оси Ox .

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ симметричны относительно оси ординат (оси Oy), если их координаты удовлетворяют равенствам $x_1 = -x_2$ и $y_1 = y_2$.

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ симметричны относительно оси абсцисс (оси Ox), если их координаты удовлетворяют равенствам $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$.

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ симметричны относительно начала координат (точки O), если их координаты удовлетворяют равенствам $x_1 = -x_2$ и $y_1 = -y_2$.

Например, на рисунке 15 точки A и B симметричны относительно оси ординат, точки C и D симметричны относительно оси абсцисс, точки E и F симметричны относительно начала координат.



■ Рис. 15

43. Для каких точек координатной плоскости:

- а) абсцисса равна нулю; б) ордината равна нулю;
в) абсцисса положительна; г) ордината положительна?

44. Какими свойствами обладают:

- а) координаты точек I, II, III, IV четвертей;
б) координаты точек, симметричных относительно оси Ox , оси Oy , начала координат?

45. Назовите абсциссу и ординату точки:

- а) $A(-2; 3)$; б) $B(3; -2)$; в) $C(6; 5)$; г) $D(-2; -6)$.

Какой координатной четверти принадлежит эта точка?

46. Определите по координатам точки, в какой четверти координатной плоскости она расположена:

- а) $(12; 5)$; б) $(-3; -4)$; в) $(7; -3)$; г) $(-8; 13)$.

47. Постройте точку, симметричную точке:

- а) $A(1; 3)$ относительно оси Oy ;
б) $B(-2; -1)$ относительно оси Ox ;
в) $C(3; -2)$ относительно точки $O(0; 0)$.

- 48.** Постройте данную точку и точки, симметричные ей относительно оси Ox , оси Oy , начала координат:
- а) $A(3; 5)$; б) $B(-4; 2)$;
 в) $C(-4; -3)$; г) $D(3; -5)$.
- Определите координаты построенных точек.
- 49.** Симметричны ли относительно оси Ox , оси Oy , начала координат точки:
- а) $A(3; 2)$ и $B(-3; 2)$; б) $C(2; 5)$ и $D(2; -5)$;
 в) $M(-4; 3)$ и $N(4; -3)$; г) $E(-3; 1)$ и $F(-3; -1)$;
 д) $P(4; 5)$ и $Q(-4; -5)$; е) $X(-6; 7)$ и $Y(6; 7)$?
- 50.** а) Постройте прямоугольник $ABCD$ по координатам его вершин: $A(0; 0)$, $B(0; 8)$, $C(5; 8)$, $D(5; 0)$. Найдите периметр и площадь прямоугольника $ABCD$.
 б) Постройте квадрат $ABCD$ по координатам трёх его вершин: $A(-2; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(1; 2)$. Найдите координаты вершины D , периметр и площадь квадрата $ABCD$.
- 51.** Даны точки $A(3; 5)$ и $B(10; -9)$. Определите координаты точки C , если:
- а) C — середина отрезка AB ; б) A — середина отрезка BC ;
 в) $AC : CB = 2 : 5$; г) $AC : CB = 4 : 3$.
- 52. Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Р. Декарте, его жизни и вкладе в науку.

1.5. Понятие функции

Пример 1. Из геометрии известно, что объём куба равен кубу длины его ребра. Это утверждение носит общий характер, оно относится к любому кубу. Запишем его в виде равенства в общем виде. Пусть a — длина ребра куба, V — его объём. Тогда геометрическое свойство можно записать следующим образом:

$$V = a^3 \quad (a > 0). \quad (1)$$

Неравенство, записанное в скобках, означает, что равенство (1) рассматривается только для положительных значений a , потому что длина ребра куба есть положительное число.

Равенством (1) пользуются как формулой, при помощи которой вычисляется объём любого конкретного куба. Мы видим, что каждому значению длины ребра a в силу закона, выражаемого формулой (1), соответствует определённое значение объёма V . В таком случае говорят, что V есть **функция от a** , определённая для положительных значений a . Говорят ещё, что V есть функция от a , определённая на множестве положительных чисел a .

Пример 2. Из физики известно, что при прямолинейном движении тела с постоянной скоростью, например 80 км/ч, путь s км, пройденный этим телом за время t ч, вычисляется по формуле

$$s = 80t \quad (t \geq 0). \quad (2)$$

Здесь каждому неотрицательному значению t в силу закона, выражаемого формулой (2), соответствует определённое значение s . Поэтому и в этом случае говорят, что s есть **функция от t** , определённая для неотрицательных значений t или определённая на множестве неотрицательных чисел t .

Приведём общее определение функции.

Пусть M есть некоторое множество чисел и пусть каждому числу x из M в силу некоторого (вполне определённого) закона приведено в соответствие единственное число y , тогда говорят, что y есть **функция от x** , определённая на множестве M ;

при этом x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а y — **зависимой переменной** или **функцией** от x , множество M — **областью определения функции**.

Это определение функции предложено великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и немецким математиком П. Дирихле (1805—1859).

Примером функции может служить **зависимость**

$$y = 3x.$$

В этом примере закон зависимости переменной y от переменной x заключается в том, что каждому числу x приводится в соответствие число y , равное $3x$. Говорят ещё, что функция, выражающая эту зависимость, **задана формулой**

$$y = 3x.$$

Вот ещё примеры функций, заданных формулами:

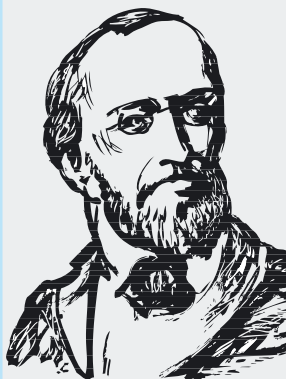
$$y = -2x, \quad y = 3x - 4, \quad y = x^2.$$

Указанные функции заданы (определены) для любых значений x , т. е. для любых действительных чисел x , или, как говорят, на множестве всех действительных чисел.

Функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x^2}$, определена на множестве всех действительных чисел, кроме числа нуль; функция, за-



Н. И. Лобачевский



П. Дирихле

данная формулой $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2}$, определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел 1 и 2.

При рассмотрении функций буквы x и y нередко заменяют другими буквами.

Например, площадь S квадрата есть функция

$$S = a^2 \quad (a > 0)$$

от длины его стороны a , определённая на множестве положительных чисел.

Чтобы указать, что y есть функция от x , определённая на множестве M , пишут:

$$y = f(x) \quad (x \in M),$$

где под буквой f подразумевают то правило, по которому получают значения y , соответствующие данным x из множества M .

Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что y зависит от x , вместо y пишут $y(x)$.

Число, соответствующее числу x_0 для данной функции $y(x)$, называют **значением этой функции в точке x_0** и обозначают $y(x_0)$. Если функция записана в виде $y = f(x)$, то это число обозначают $f(x_0)$.

Например, для функции $y = 2x$ пишут:

$$y(1) = 2, \quad y(2) = 4, \quad y(-3) = -6,$$

или

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(-3) = -6.$$

При этом говорят, например, что значение данной функции в точке 1 равно 2, или «игрек от 1 равен 2», или «эф от 1 равно 2» и т. д.

Если для каждого x из области определения функции найти её значение, то все такие значения функции составят множество, которое называют **областью значений функции**.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ (правило, закон), с помощью которого для каждого значения аргумента x можно найти соответствующее значение функции y .

Функция может быть задана формулой. Выше рассмотрены такие примеры.

Функция может быть задана таблицей. Например, если измерять температуру воздуха через каждый час, то каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \dots, 24$ будет соответствовать определённое число T . Это соответствие можно записать в виде таблицы.

t	0	1	2	3	...	14	...	24
T	16	16	15	15		25		17

Таким образом, T есть функция от t , определённая на множестве целых чисел от 0 до 24 и заданная таблицей. Закон, в силу кото-