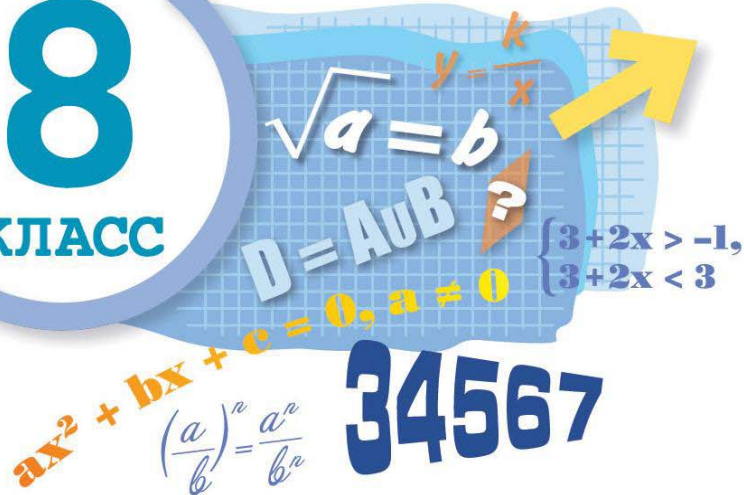


МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

8

КЛАСС



БАЗОВЫЙ
УРОВЕНЬ

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник (17-е издание, стереотипное соответствует 16-му, переработанному) допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Авторы:

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 8-й класс : базовый уровень : учебник : издание в pdf-формате / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — 17-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2024. — 319, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-09-116445-9 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-111166-8 (печ. изд.).

Данный учебник является частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС ООО, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-116445-9 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-111166-8 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение»,
2013, 2023

© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение»,
2013, 2019
Все права защищены

The background of the page features a blue-toned collage of mathematical concepts. At the top left, the equation $ax^2=0$ is displayed in a large, white, serif font. Below it, there are faint, stylized graphs of functions, including a parabola and a line, plotted on a grid. In the lower left, the equation $ax^2+bx+c=0$ is written vertically in a similar white serif font. The overall design is modern and educational, with various geometric shapes and lines in shades of blue and white.
$$ax^2=0$$

Дорогие восьмиклассники!

В этом году вы продолжите изучение алгебры. Ваши представления о выражениях, числах, функциях, уравнениях и неравенствах пополнятся и расширятся. Если в 7 классе вы занимались преобразованием целых выражений, то теперь познакомитесь с преобразованием дробей. Вы встретитесь с иррациональными числами, изучите свойства новых функций: обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ и функции $y = \sqrt{x}$ —

и научитесь строить их графики. Вы познакомитесь с некоторыми способами решения квадратных и дробных рациональных уравнений, неравенств с одной переменной и их систем.

Весь новый материал подробно разъясняется в объяснительных текстах учебника, приводятся решения различных задач. Правила и свойства, которые нужно запомнить, даны на цветном фоне, чтобы вы обратили на них внимание. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса алгебры 7 класса». Контрольные вопросы и задания помогут вам проверить, как вы усвоили изученный материал.

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что вы примете активное участие в выполнении упражнений под названием «задача-исследование», рассчитанных на коллективное обсуждение приёмов решения, а также в выполнении заданий, предназначенных для работы в парах. Выполняя такие задания, вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей и отстаивать свою позицию.

Если вы интересуетесь математикой, то ваше внимание, безусловно, привлечёт

материал под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», помещённый в конце каждой главы. Специально для учащихся, finding радость в решении непростых задач, в учебнике даны «Задачи повышенной трудности». Решение таких задач поможет не только расширить кругозор, но и подготовиться к участию в математических олимпиадах.

Конечно, многим из вас любопытно узнать, как и почему зарождался и затем развивался тот или иной раздел алгебры. Для ответов на эти вопросы в учебнике приведены «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении алгебры.

В учебнике используются следующие условные обозначения:



— текст, который нужно запомнить



— материал, который важно знать



— начало решения задачи



— окончание решения задачи



— начало обоснования утверждения или вывода формулы



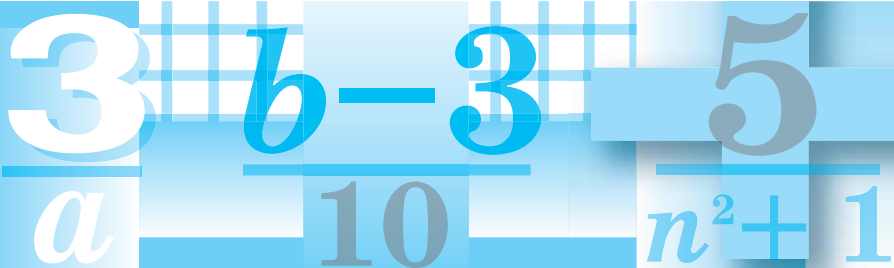
— окончание обоснования утверждения или вывода формулы

11. — задание обязательного уровня

19. — задание повышенной трудности



— упражнения для повторения



Глава I РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

В курсе алгебры 7 класса вы занимались преобразованиями целых выражений. Теперь будут рассматриваться преобразования дробных выражений — правила сложения, вычитания, умножения и деления рациональных дробей, а также правило возведения дроби в степень. Здесь вы познакомитесь с новой функцией, которая называется обратной пропорциональностью. Её свойства существенно отличаются от свойств изученных ранее функций.

§ 1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Рациональные выражения

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, а также деления на число, отличное от нуля, называют *целыми выражениями*. Так, целыми являются выражения

$$7a^2b, m^3 + n^3, (x - y)(x^2 + y^2), \\ x^4y + 2x^2y^2 + 8y, m^8 + n^6 + m^2n^2,$$

$$b^{10} - \frac{b(3b+c)}{7}, \frac{a+5}{8}, 2x : 9.$$

В отличие от них выражения

$$4a - \frac{b}{2a+1}, \frac{x+y}{x^2-3xy+y^2},$$

$$\frac{n}{3} - \frac{5}{n^2+1}, 2p : q,$$

помимо действий сложения, вычитания и умножения, содержат деление на выражение с переменными. Такие выражения называют *дробными выражениями*.

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями*.

Выражение вида $\frac{a}{b}$ называется, как известно, дробью.

Дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называют *рациональной (алгебраической) дробью*.

Примерами рациональных дробей служат дроби

$$\frac{5}{a}, \quad \frac{b-3}{10}, \quad \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}, \quad \frac{3}{m^2-n^2}.$$

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как для нахождения значения целого выражения нужно выполнить действия, которые всегда возможны.

Дробное выражение имеет смысл только при тех значениях переменных, при которых все знаменатели рациональных дробей, содержащихся в этом выражении, будут отличны от нуля. Например, выражение $10 + \frac{1}{a}$ имеет смысл при всех значениях a , кроме нуля, так как при $a = 0$ знаменатель дроби $\frac{1}{a}$ обращается в нуль, а делить на нуль, как известно, нельзя. Выражение $x + \frac{y}{x-y}$ имеет смысл при тех значениях x и y , при которых $x \neq y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*. В рациональной дроби допустимыми являются те значения переменных, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Пример 1. Найдём допустимые значения переменной в дроби

$$\frac{5}{a(a-9)}.$$



ИСААК НЬЮТОН (1643—1727) — английский физик, механик, математик и астроном. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, разработал, независимо от Лейбница, основы математического анализа.

- Допустимыми значениями переменной будут те значения a , при которых знаменатель дроби не обращается в нуль, то есть выполнено условие:

$$a(a - 9) \neq 0.$$

Произведение в данном случае не равно нулю тогда и только тогда, когда каждый множитель не равен нулю, то есть

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 9. \end{cases}$$

Следовательно, допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме 0 и 9. ◀

Пример 2. Найдём область определения функции $y = \frac{x+3}{x-7}$.

- Область определения данной функции составляют те значения x , при которых выполнено условие $x - 7 \neq 0$, откуда $x \neq 7$. Значит, область определения функции составляют все числа, кроме числа 7. ◀

Пример 3. При каком значении x значение дроби $\frac{(x-2)^2-25}{2x+6}$ равно нулю?

- Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.

Числитель дроби $\frac{(x-2)^2-25}{2x+6}$ равен нулю, если

$$(x - 2)^2 = 25,$$

т. е.

$$x - 2 = 5 \text{ или } x - 2 = -5.$$

Итак, числитель дроби равен нулю при $x = 7$ и $x = -3$. Знаменатель данной дроби не равен нулю, если $x \neq -3$. Значит, данная дробь равна нулю при $x = 7$. ◀

Упражнения

1. Какие из выражений

$$\frac{1}{3}a^2b, (x - y)^2 - 4xy, \frac{m+3}{m-3}, \frac{8}{x^2+y^2}, \frac{a^2-2ab}{12}, (c+3)^2 + \frac{2}{c}$$

являются целыми, какие — дробными?

2. Из рациональных выражений $7x^2 - 2xy$, $\frac{a}{9}$, $\frac{12}{b}$, $a(a - b) - \frac{b}{3a}$, $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{3}n^2$, $\frac{a}{a+3} - 8$ выпишите те, которые являются:

а) целыми выражениями; б) дробными выражениями.

3. Найдите значение дроби $\frac{y-1}{4}$ при $y = 3$; 1 ; -5 ; $\frac{1}{2}$; $-1,6$; 100 .

4. Найдите значение дроби:

а) $\frac{a-8}{2a+5}$ при $a = -2$; б) $\frac{b^2+6}{2b}$ при $b = 3$.

5. Чему равно значение дроби $\frac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$ при:

а) $a = -3$, $b = -1$; б) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 0,5$?

6. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

x	-13	-5	-0,2	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x+5}{x-3}$								

7. а) Из формулы $v = \frac{s}{t}$ выразите: переменную s через v и t ; переменную t через s и v .

б) Из формулы $\rho = \frac{m}{V}$ выразите переменную V через ρ и m .

8. Из городов A и B , расстояние между которыми s км, вышли в одно и то же время навстречу друг другу два поезда. Первый шёл со скоростью v_1 км/ч, а второй — со скоростью v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Выразите переменную t через s , v_1 и v_2 . Найдите значение t , если известно, что:

а) $s = 250$, $v_1 = 60$, $v_2 = 40$; б) $s = 310$, $v_1 = 75$, $v_2 = 80$.

9. а) Составьте дробь, числитель которой — произведение переменных x и y , а знаменатель — их сумма.

б) Составьте дробь, числитель которой — разность переменных a и b , а знаменатель — их произведение.

в) Составьте дробь, числитель которой — сумма переменных c и d , а знаменатель — их разность.

10. При каких значениях переменной имеет смысл рациональное выражение:

а) $\frac{x}{x-2}$; б) $\frac{b+4}{b^2+7}$; в) $\frac{y^2-1}{y} + \frac{y}{y-3}$; г) $\frac{a+10}{a(a-1)} - 1$?

11. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

- а) $x^2 - 8x + 9$; в) $\frac{3x-6}{7}$; д) $\frac{x-5}{x^2+25} - 3x$;
б) $\frac{1}{6x-3}$; г) $\frac{x^2-8}{4x(x+1)}$; е) $\frac{x}{x+8} + \frac{x-8}{x}$.

12. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

- а) $\frac{5y-8}{11}$; в) $\frac{y^2+1}{y^2-2y}$; д) $\frac{y}{y-6} + \frac{15}{y+6}$;
б) $\frac{25}{y-9}$; г) $\frac{y-10}{y^2+3}$; е) $\frac{32}{y} - \frac{y+1}{y+7}$.

13. Найдите область определения функции:

- а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{2x+3}{x(x+1)}$; в) $y = x + \frac{1}{x+5}$.

14. При каком значении переменной значение дроби $\frac{x-3}{5}$ равно:
а) 1; б) 0; в) -1; г) 3?

15. При каких значениях переменной равно нулю значение дроби:

- а) $\frac{y-5}{8}$; б) $\frac{2y+3}{10}$; в) $\frac{x(x-1)}{x+4}$; г) $\frac{x(x+3)}{2x+6}$?

16. Найдите значения переменной, при которых равно нулю значение дроби:

- а) $\frac{m+4}{6}$; б) $\frac{7-5n}{11}$; в) $\frac{b^2-b}{b+2}$; г) $\frac{y^2-25}{3y-15}$.

17. Определите знак дроби $\frac{a}{b}$, если известно, что:

- а) $a > 0$ и $b > 0$;
б) $a > 0$ и $b < 0$;
в) $a < 0$ и $b > 0$;
г) $a < 0$ и $b < 0$.

18. Докажите, что при любом значении переменной значение дроби:

- а) $\frac{3}{x^2+1}$ положительно; в) $\frac{(a-1)^2}{a^2+10}$ неотрицательно;
б) $\frac{-5}{y^2+4}$ отрицательно; г) $\frac{(b-3)^2}{-b^2-1}$ неположительно.

19. При каком значении a принимает наибольшее значение дробь:

- а) $\frac{4}{a^2+5}$; б) $\frac{10}{(a-3)^2+1}$?

20. При каком значении b принимает наименьшее значение дробь:

а) $\frac{b^2+7}{21}$; б) $\frac{(b-2)^2+16}{8}$?

21. Верно ли утверждение:

а) наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 1;

б) наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 2;

в) наименьшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 2?



22. Преобразуйте в многочлен:

а) $(2a+3)(2a-3)$; г) $(b+0,5)^2$;

б) $(y-5b)(y+5b)$; д) $(a-2x)^2$;

в) $(0,8x+y)(y-0,8x)$; е) $(ab-1)^2$.

23. Разложите на множители:

а) x^2-25 ; в) a^2-6a+9 ; д) a^3-8 ;

б) $16-c^2$; г) $x^2+8x+16$; е) b^3+27 .

24. Анне Александровне в подарок необходимо купить пять одинаковых коробок конфет. В магазине «Сладость» одна коробка конфет стоит 350 р., но сейчас там проходит акция: три коробки по цене двух. В магазине «Джем» каждая коробка стоит 390 р., но при покупке больше четырёх коробок действует скидка 30% на всю покупку. В каком магазине покупка будет более выгодной? Сколько рублей при этом сможет сэкономить Анна Александровна?

2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Мы знаем, что для обыкновенных дробей выполняется следующее свойство: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится. Иначе говоря, при любых натуральных значениях a , b и c верно

$$\text{равенство } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Докажем, что это равенство верно не только при натуральных, но и при любых других значениях a , b и c , при которых знаменатели отличны от нуля, т. е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

- Пусть $\frac{a}{b} = m$. Тогда по определению частного $a = bm$. Умножим обе части этого равенства на c :

$$ac = (bm)c.$$

На основании сочетательного и переместительного свойств умножения имеем

$$ac = (bc)m.$$

Так как $bc \neq 0$, то по определению частного

$$\frac{ac}{bc} = m.$$

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \quad \bigcirc$$

Мы показали, что для любых числовых значений переменных a , b и c , где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \quad (1)$$

Равенство (1) сохраняет силу и в том случае, когда под буквами a , b и c понимают многочлены, причём b и c — *ненулевые многочлены*, т. е. многочлены, не равные тождественно нулю.

Равенство (1) выражает *основное свойство рациональной дроби*:

если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей дробь.

Например,

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x+y)}{(x-3)(x+y)}.$$

Это равенство верно при всех допустимых значениях переменных.

Такие равенства будем называть *тождествами*. Ранее тождествами мы называли равенства, верные при всех значениях переменных. Теперь мы расширяем понятие тождества.

О п р е д е л е н и е. Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Основное свойство рациональной дроби позволяет выполнять приведение дроби к новому знаменателю и сокращение дробей.

Приведём примеры.

Пример 1. Приведём дробь $\frac{2x}{7y}$ к знаменателю $35y^3$.

► Так как

$$35y^3 = 7y \cdot 5y^2,$$

то, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2x}{7y}$ на $5y^2$, получим

$$\frac{2x}{7y} = \frac{2x \cdot 5y^2}{7y \cdot 5y^2} = \frac{10xy^2}{35y^3}. \quad \triangleleft$$

Множитель $5y^2$ называют дополнительным множителем к числителю и знаменателю дроби $\frac{2x}{7y}$.

Пример 2. Приведём дробь $\frac{5}{2y-x}$ к знаменателю $x-2y$.

► Для этого числитель и знаменатель данной дроби умножим на -1 :

$$\frac{5}{2y-x} = \frac{5 \cdot (-1)}{(2y-x) \cdot (-1)} = \frac{-5}{x-2y}.$$

Дробь $\frac{-5}{x-2y}$ можно заменить тождественно равным выражением

$-\frac{5}{x-2y}$, поставив знак «минус» перед дробью и изменив знак в числителе:

$$\frac{-5}{x-2y} = -\frac{5}{x-2y}. \quad \triangleleft$$

Вообще

если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному.

Пример 3. Сократим дробь $\frac{a^2-9}{ab+3b}$.

► Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{a^2-9}{ab+3b} = \frac{(a+3)(a-3)}{b(a+3)}.$$

Сократим полученную дробь на общий множитель $a+3$:

$$\frac{(a+3)(a-3)}{b(a+3)} = \frac{a-3}{b}.$$

Итак,

$$\frac{a^2 - 9}{ab + 3b} = \frac{a - 3}{b}.$$

Это равенство верно при всех a и b , при которых обе его части имеют смысл. ◀

Пример 4. Сократим дробь $\frac{x-1}{x(1-x)}$.

► Вынесем в числителе множитель -1 за скобки:

$$\frac{-(1-x)}{x(1-x)}.$$

При этом говорят, что мы вынесли минус за скобки. Сократим полученную дробь на общий множитель $1-x$:

$$\frac{-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{-1}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Таким образом, $\frac{x-1}{x(1-x)} = -\frac{1}{x}$ при всех значениях x , при которых обе его части имеют смысл. ◀

Пример 5. Построим график функции $y = \frac{x^2 - 16}{2x - 8}$.

► Область определения функции

$y = \frac{x^2 - 16}{2x - 8}$ — множество всех

чисел, кроме числа 4. Сокра-

тим дробь $\frac{x^2 - 16}{2x - 8}$:

$$\frac{x^2 - 16}{2x - 8} = \frac{(x-4)(x+4)}{2(x-4)} = \frac{x+4}{2}.$$

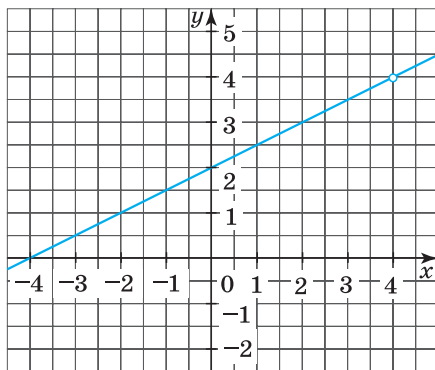


Рис. 1

Графиком функции $y = \frac{x+4}{2}$ является прямая, а графиком функ-

кции $y = \frac{x^2 - 16}{2x - 8}$ — та же прямая, но с «выколотой» точкой

(4; 4) (рис. 1). ◀

Упражнения

25. Укажите общий множитель числителя и знаменателя и сократите дробь:

а) $\frac{2x}{3x}$; б) $\frac{15x}{25y}$; в) $\frac{6a}{24a}$; г) $\frac{7ab}{21bc}$; д) $\frac{-2xy}{5x^2y}$; е) $\frac{8x^2y^2}{24xy}$.

26. Сократите дробь:

а) $\frac{10xz}{15yz}$; б) $\frac{6ab^2}{9bc^2}$; в) $\frac{2ay^3}{-4a^2b}$; г) $\frac{-6p^2q}{-2q^3}$; д) $\frac{24a^2c^2}{36ac}$; е) $\frac{63x^2y^3}{42x^6y^4}$.

27. Представьте частное в виде дроби и сократите её:

а) $4a^2b^3 : (2a^4b^2)$; г) $36m^2n : (18mn)$;
б) $3xy^2 : (6x^3y^3)$; д) $-32b^5c : (12b^4c^2)$;
в) $24p^4q^4 : (48p^2q^2)$; е) $-6ax : (-18ax)$.

28. Сократите дробь:

а) $\frac{4a^2}{6ac}$; б) $\frac{7x^2y}{21xy^2}$; в) $\frac{56m^2n^5}{35mn^5}$; г) $\frac{25p^4q}{100p^5q}$.

29. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; б) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$.

30. Сократите дробь:

а) $\frac{a(b-2)}{5(b-2)}$; б) $\frac{3(x+4)}{c(x+4)}$; в) $\frac{ab(y+3)}{a^2b(y+3)}$; г) $\frac{15a(a-b)}{20b(a-b)}$.

31. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её:

а) $\frac{3a+12b}{6ab}$; в) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$; д) $\frac{a-3b}{a^2-3ab}$;
б) $\frac{15b-20c}{10b}$; г) $\frac{5x(y+2)}{6y+12}$; е) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$.

32. Сократите дробь:

а) $\frac{y^2-16}{3y+12}$; в) $\frac{(c+2)^2}{7c^2+14c}$; д) $\frac{a^2+10a+25}{a^2-25}$;
б) $\frac{5x-15y}{x^2-9y^2}$; г) $\frac{6cd-18c}{(d-3)^2}$; е) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$.

33. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$; в) $\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}$; г) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

34. Найдите значение дроби:

а) $\frac{15a^2 - 10ab}{3ab - 2b^2}$ при $a = -2$, $b = -0,1$;

б) $\frac{9c^2 - 4d^2}{18c^2d - 12cd^2}$ при $c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{6x^2 + 12xy}{5xy + 10y^2}$ при $x = \frac{2}{3}$, $y = -0,4$;

г) $\frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{4x^2 + 12xy}$ при $x = -0,2$, $y = -0,6$.

35. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$; в) $\frac{a^2 + a + 1}{a^3 - 1}$;

б) $\frac{3y^2 + 24y}{y^2 + 16y + 64}$; г) $\frac{b + 2}{b^3 + 8}$.

36. Представьте частное в виде дроби и сократите её:

а) $(9x^2 - y^2) : (3x + y)$; в) $(x^2 + 2x + 4) : (x^3 - 8)$;

б) $(2ab - a) : (4b^2 - 4b + 1)$; г) $(1 + a^3) : (1 + a)$.

37. Сократите дробь:

а) $\frac{2x + bx - 2y - by}{7x - 7y}$; в) $\frac{xy - x + y - y^2}{x^2 - y^2}$;

б) $\frac{8a + 4b}{2ab + b^2 - 2ad - bd}$; г) $\frac{a^2 + 2ac + c^2}{a^2 + ac - ax - cx}$.

38. (Для работы в парах.) Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 25}{2x + 10}$; б) $y = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 9}$.

1) Обсудите, что общего у дробей, задающих функцию в заданиях а) и б). Как надо учитывать эту особенность при построении графиков?

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание. Исправьте замеченные ошибки.

39. Из выражений $\frac{-x}{-y}$, $\frac{-x}{y}$, $\frac{x}{-y}$, $-\frac{-x}{y}$ выпишите те, которые:

а) тождественно равны дроби $\frac{x}{y}$;

б) противоположны дроби $\frac{x}{y}$.

40. Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{b-a}$; г) $\frac{a-b}{(b-a)^2}$; ж) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$;

б) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$; д) $\frac{-a-b}{a+b}$; з) $\frac{a-b-c}{b+c-a}$.

в) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$; е) $\frac{(a+b)^2}{(-a-b)^2}$;

41. Какой из графиков, изображённых на рисунке 2, является графиком функции $y = \frac{(1-x)^2}{x-1}$?

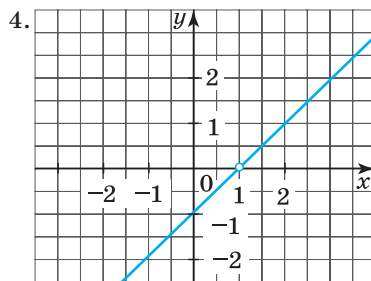
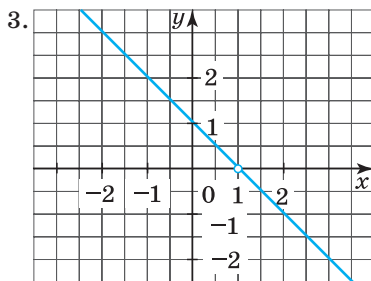
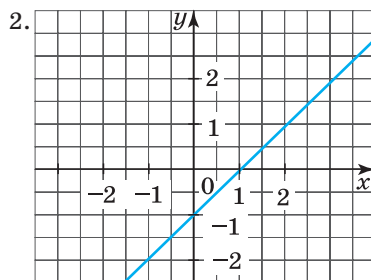
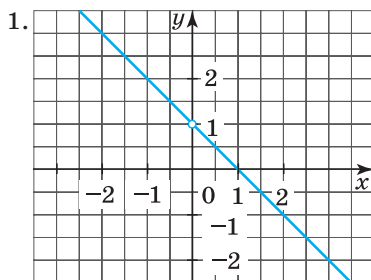


Рис. 2

42. Сократите дробь:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}; & \text{г) } \frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}; & \text{ж) } \frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}; \\ \text{б) } \frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}; & \text{д) } \frac{25-a^2}{3a-15}; & \text{з) } \frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}. \\ \text{в) } \frac{3a-36}{12b-ab}; & \text{е) } \frac{3-3x}{x^2-2x+1}; & \end{array}$$

43. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}; \quad \text{б) } \frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}.$$

44. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}; \quad \text{б) } \frac{y^6-y^8}{y^4-y^2}; \quad \text{в) } \frac{b^7-b^{10}}{b^5-b^2}; \quad \text{г) } \frac{c^6-c^4}{c^3-c^2}.$$

45. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \frac{a^8+a^5}{a^5+a^2} \text{ при } a = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \frac{b^{10}-b^8}{b^8-b^6} \text{ при } b = -0,1.$$

46. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{(2a-2b)^2}{a-b}; \quad \text{б) } \frac{(3c+9d)^2}{c+3d}; \quad \text{в) } \frac{(3x+6y)^2}{5x+10y}; \quad \text{г) } \frac{4x^2-y^2}{(10x+5y)^2}.$$

47. (Задача-исследование.) Верно ли, что при всех значениях a , отличных от -2 и 2 , значение дроби $\frac{a^2-4}{12+a^2-a^4}$ является отрицательным числом?

- 1) Выберите произвольное значение a , отличное от -2 и 2 , и сравните с нулём соответствующее значение дроби.
- 2) Обсудите, какое преобразование дроби поможет найти ответ на вопрос задачи.
- 3) Выполните это преобразование и сделайте вывод.

48. Докажите, что значение дроби не зависит от n , где n — натуральное число:

$$\text{а) } \frac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+2}+3^{n+1}+3^n}; \quad \text{б) } \frac{16^{n+1}-2^{n+4}}{4 \cdot 2^n(2^{3n}-1)}.$$

49. Приведите к знаменателю $24a^3b^2$ следующие дроби:

$$\frac{5b}{8a^3}, \quad \frac{7a}{3b^2}, \quad \frac{1}{2ab}, \quad \frac{2}{a^2b^2}.$$

50. Представьте выражение $2a + b$ в виде дроби со знаменателем, равным:

- а) b ; б) 5 ; в) $3a$; г) $2a - b$.

51. Приведите дробь:

а) $\frac{x}{a-b}$ к знаменателю $(a-b)^2$;

б) $\frac{y}{x-a}$ к знаменателю $x^2 - a^2$;

в) $\frac{a}{a-10}$ к знаменателю $10 - a$;

г) $\frac{p}{p-2}$ к знаменателю $4 - p^2$;

д) $\frac{mn}{n-m}$ к знаменателю $m^2 - n^2$.



52. Решите уравнение:

а) $-5x = 16$; в) $\frac{1}{3}x = 4$; д) $0,6x = 3$;

б) $2x = \frac{1}{5}$; г) $4x = -2$; е) $-0,7x = 5$.

53. Разложите на множители:

а) $5bc - 5c$; г) $5y - 5x + y^2 - xy$; ж) $y^2 - 2y + 1$;

б) $10n + 15n^2$; д) $a^2 - 9$; з) $a^3 + 64$;

в) $8ab + 12bc$; е) $x^2 + 10x + 25$; и) $b^3 - 1$.

54. Расположите выражения:

а) $\frac{5}{16} : 6$, $\frac{5}{16} \cdot 0,1$, $\frac{5}{16} \cdot (-7)$ в порядке возрастания их значений;

б) $0,8 \cdot (-0,4)$, $0,8 : (-0,4)$, $0,8 - (-0,4)$, $0,8 + (-0,4)$ в порядке убывания их значений.

Контрольные вопросы и задания

- 1 Приведите примеры целых выражений; дробных выражений.
- 2 Какую дробь называют рациональной? Приведите пример.
- 3 Дайте определение тождества. Приведите пример.
- 4 Сформулируйте и докажите основное свойство дроби.
- 5 Сформулируйте правило об изменении знака перед дробью.

3. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

При сложении обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складывают их числители, а знаменатель оставляют прежним. Например:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}.$$

Таким же образом складывают любые рациональные дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

где a , b и c — многочлены, причём c — ненулевой многочлен.

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Вычитание рациональных дробей выполняется аналогично сложению:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Чтобы выполнить вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{3a-7b}{15ab}$ и $\frac{2a+2b}{15ab}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{3a-7b}{15ab} + \frac{2a+2b}{15ab} &= \frac{3a-7b+2a+2b}{15ab} = \\ &= \frac{5a-5b}{15ab} = \frac{5(a-b)}{15ab} = \frac{a-b}{3ab}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 2. Вычтем из дроби $\frac{a^2+9}{5a-15}$ дробь $\frac{6a}{5a-15}$.

$$\blacktriangleright \frac{a^2+9}{5a-15} - \frac{6a}{5a-15} = \frac{a^2+9-6a}{5a-15} = \frac{(a-3)^2}{5(a-3)} = \frac{a-3}{5}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2+2x}.$$

$\blacktriangleright$ Здесь удобно сложение и вычитание дробей выполнять не последовательно, а совместно:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2+2x} &= \frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x} = \\ &= \frac{x^2-1-2x+1}{x^2+2x} = \frac{x^2-2x}{x^2+2x} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 4. Сложим дроби $\frac{3a}{2x-a}$ и $\frac{6x}{a-2x}$.

$\blacktriangleright$ Знаменатели дробей являются противоположными выражениями. Изменим знаки в знаменателе второй дроби и перед этой дробью. Получим

$$\frac{6x}{a-2x} = -\frac{6x}{2x-a}.$$

Теперь можно применить правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{3a}{2x-a} + \frac{6x}{a-2x} = \frac{3a}{2x-a} - \frac{6x}{2x-a} = \frac{3a-6x}{2x-a} = \frac{-3(2x-a)}{2x-a} = -3. \quad \blacktriangleleft$$

Упражнения

55. Выполните действие:

$$\text{а) } \frac{x}{3} + \frac{y}{3}; \quad \text{б) } \frac{5b^2}{a} - \frac{13b^2}{a}; \quad \text{в) } \frac{x+y}{9} - \frac{x}{9}; \quad \text{г) } \frac{2c-x}{b} + \frac{x}{b}.$$

56. Представьте в виде дроби:

$$\text{а) } \frac{m}{2p} - \frac{m-p}{2p}; \quad \text{в) } \frac{7y-13}{10y} - \frac{2y+3}{10y};$$

$$\text{б) } \frac{a+b}{6} - \frac{a-2b}{6}; \quad \text{г) } \frac{8c+25}{6c} + \frac{5-2c}{6c}.$$

57. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{2x-3y}{4xy} + \frac{11y-2x}{4xy}$;

в) $\frac{a-2}{8a} + \frac{2a+5}{8a} - \frac{3-a}{8a}$;

б) $\frac{5a+b^5}{8b} - \frac{5a-7b^5}{8b}$;

г) $\frac{11a-2b}{4a} + \frac{2a-3b}{4a} - \frac{a-b}{4a}$.

58. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{17-12x}{x} - \frac{10-x}{x}$;

г) $\frac{3p-q}{5p} - \frac{2p+6q}{5p} + \frac{p-4q}{5p}$;

б) $\frac{12p-1}{3p^2} - \frac{1-3p}{3p^2}$;

д) $\frac{5c-2d}{4c} - \frac{3d}{4c} + \frac{d-5c}{4c}$;

в) $\frac{6y-3}{5y} - \frac{y+2}{5y}$;

е) $\frac{2a}{b} - \frac{1-6a}{b} + \frac{13-8a}{b}$.

59. Выполните действие:

а) $\frac{16}{x-4} - \frac{x^2}{x-4}$;

в) $\frac{3a-1}{a^2-b^2} - \frac{3b-1}{a^2-b^2}$;

д) $\frac{2a+b}{(a-b)^2} - \frac{2b-5a}{(a-b)^2}$;

б) $\frac{25}{a+5} - \frac{a^2}{a+5}$;

г) $\frac{x-3}{x^2-64} + \frac{11}{x^2-64}$;

е) $\frac{13x+6y}{(x+y)^2} - \frac{11x+4y}{(x+y)^2}$.

60. Докажите, что:

а) выражение $\frac{(a+b)^2}{ab} - \frac{(a-b)^2}{ab}$ тождественно равно 4;

б) выражение $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ тождественно равно 2.

61. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^2-43}{a-6} + \frac{7}{a-6}$ при $a = 10,25$; б) $\frac{9b-1}{b^2-9} - \frac{6b-10}{b^2-9}$ при $b = 3,5$.

62. Найдите значение выражения $\frac{a^2-12b}{a^2-3ab} - \frac{3ab-4a}{a^2-3ab}$ при $a = -0,8$, $b = -1,75$. Нет ли в задаче лишних данных?

63. Выполните действие:

а) $\frac{x}{y-1} + \frac{5}{1-y}$;

в) $\frac{2m}{m-n} + \frac{2n}{n-m}$;

д) $\frac{a^2+16}{a-4} + \frac{8a}{4-a}$;

б) $\frac{a}{c-3} - \frac{6}{3-c}$;

г) $\frac{5p}{2q-p} + \frac{10q}{p-2q}$;

е) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y} + \frac{6xy}{3y-x}$.

64. Выполните действие:

а) $\frac{10p}{p-q} + \frac{3p}{q-p}$; в) $\frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{1-x}$; д) $\frac{a}{a^2-9} + \frac{3}{9-a^2}$;

б) $\frac{5a}{a-b} + \frac{5b}{b-a}$; г) $\frac{a}{2a-b} + \frac{3a-b}{b-2a}$; е) $\frac{y^2}{y-1} + \frac{1}{1-y}$.

65. Докажите, что при всех допустимых значениях x значение выражения не зависит от x :

а) $\frac{3x+5}{2x-1} + \frac{7x+3}{1-2x}$; б) $\frac{5x+1}{5x-20} + \frac{x+17}{20-5x}$.

66. Выполните действие:

а) $\frac{x^2}{(x-5)^2} - \frac{25}{(5-x)^2}$; б) $\frac{x^2+25}{(x-5)^3} + \frac{10x}{(5-x)^3}$.

67. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{x^2}{x^2-16} - \frac{8(x-2)}{x^2-16}$; б) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2} + \frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$.

68. Пользуясь тождеством $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\frac{a+b}{x}$; б) $\frac{2a^2+a}{y}$; в) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$; г) $\frac{12a+y^2}{6ay}$.

69. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\frac{x^2+y^2}{x^4}$; б) $\frac{2x-y}{b}$; в) $\frac{a^2+1}{2a}$; г) $\frac{a^2-3ab}{a^3}$.

70. Представьте дробь $\frac{5n^2+3n+6}{n}$ в виде суммы двучлена и дроби. Выясните, при каких натуральных n данная дробь принимает натуральные значения.

71. При каких целых значениях m дробь $\frac{(m-1)(m+1)-10}{m}$ принимает целые значения?

72. Решите уравнение:

а) $3(5x-4) - 8x = 4x + 9$;
б) $19x - 8(x-3) = 66 - 3x$;
в) $0,2(0,7x-5) + 0,02 = 1,4(x-1,6)$;
г) $2,7(0,1x+3,2) + 0,6(1,3-x) = 16,02$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА	5
1. Рациональные выражения	—
2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей	10
§ 2. СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ	19
3. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями	—
4. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями	23
§ 3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ	30
5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень	—
6. Деление дробей	35
7. Преобразование рациональных выражений	38
8. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график	45
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
9. Представление дроби в виде суммы дробей	52
Дополнительные упражнения к главе I	56

ГЛАВА II. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 4. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ	64
10. Действительные числа	—
11. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень	70
12. Уравнение $x^2 = a$	74
13. Нахождение приближённых значений квадратного корня	78
14. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график	81
§ 5. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ	86
15. Квадратный корень из произведения и дроби	—
16. Квадратный корень из степени	91
§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ	94
17. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня	—

18. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	98
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
19. Преобразование двойных радикалов	103
Дополнительные упражнения к главе II	107
ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ	
§ 7. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ	115
20. Неполные квадратные уравнения	—
21. Формула корней квадратного уравнения	120
22. Решение задач	128
23. Теорема Виета	132
§ 8. КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН	137
24. Квадратный трёхчлен и его корни	—
25. Разложение квадратного трёхчлена на множители	141
§ 9. ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	145
26. Решение дробных рациональных уравнений	—
27. Решение задач	151
§ 10. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ	155
28. Уравнение с двумя переменными и его график	—
29. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными	160
30. Графический способ решения систем уравнений	163
31. Алгебраический способ решения систем уравнений	165
32. Решение задач	169
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
33. Уравнения с параметром	172
Дополнительные упражнения к главе III	174
ГЛАВА IV. НЕРАВЕНСТВА	
§ 11. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА	185
34. Числовые неравенства	—
35. Свойства числовых неравенств	190
36. Сложение и умножение числовых неравенств	195
§ 12. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ	200
37. Пересечение и объединение множеств	—
38. Числовые промежутки	203

39. Решение неравенств с одной переменной	207
40. Решение систем неравенств с одной переменной	215
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
41. Доказательство неравенств	223
Дополнительные упражнения к главе IV	227
ГЛАВА V. ФУНКЦИИ	
§ 13. ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА	234
42. Функция. Область определения и множество значений функции	—
43. Свойства функции	243
§ 14. СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ	249
44. Свойства линейной функции	—
45. Свойства функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$	252
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
46. Целая и дробная части числа	255
Дополнительные упражнения к главе V	257
ГЛАВА VI. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ	
§ 15. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА	261
47. Определение степени с целым отрицательным показателем	—
48. Свойства степени с целым показателем	265
§ 16. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА	270
49. Понятие стандартного вида числа	—
50. Решение задач с большими и малыми числами	272
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
51. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства	275
Дополнительные упражнения к главе VI	279
Задачи повышенной трудности	282
Исторические сведения	289
Сведения из курса алгебры 7 класса	295
Список дополнительной литературы	302
Предметный указатель	303
Ответы	304