



АЛГЕБРА

ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

7
класс



УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Авторы: заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета А. Г. Мордкович; доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ П. В. Семенов; отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории Л. А. Александрова; кандидат педагогических наук, доцент, Е. Л. Мардахаева.

Издание выходит в pdf-формате.

Алгебра : 7-й класс : учебник : издание в pdf-формате /
А45 А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова,
Е. Л. Мардахаева. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение,
2022. — 368 с. : ил.

ISBN 978-5-09-101268-2 (электр. изд.) — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-094519-6 (печ. изд.).

Учебник входит в завершённую линию учебников для 7–9-х классов; поддерживает разные модели изучения алгебры: базовую и углублённую. Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101268-2 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-094519-6 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2020
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2020
Все права защищены

Глава 1

Математический язык. Математические модели

§ 1. Числовые и алгебраические выражения

Из курса математики 5—6-х классов вам известно, что *числовым выражением* называют всякую запись, составленную из чисел и знаков арифметических действий (составленную, разумеется, со смыслом: например, $2 - 8 \cdot 1,57$ — числовое выражение, тогда как $(3 + : 27)$ — не числовое выражение, а бессмысленный набор символов). Часто вместо конкретных чисел используют буквы (преимущественно латинского алфавита), тогда получается *алгебраическое выражение*. Приведём примеры алгебраических выражений:

$$\begin{aligned} &a + b + c, \\ &49m^2 - 81t^2, \\ &\frac{x^2 - y^3 + 5y}{2x - y}, \\ &(mn - pq)(mn + pq). \end{aligned}$$

Если выражение достаточно сложное, то его упрощают, используя представленные в курсе алгебры различные свойства, законы, формулы. С некоторыми из них вы уже знакомы из курса математики 5—6-го классов, в чём вы сейчас убедитесь.

Пример 1 Выполнить действия:

$$\frac{(1,56 + 15,73 + 4,44 - 13,73) \cdot \left(\frac{1}{18} - \frac{5}{12} \right)}{250 \cdot 13 \cdot 0,04}.$$

Решение. Обозначим числитель данного числового выражения буквой A , а знаменатель — буквой B :

$$A = (1,56 + 15,73 + 4,44 - 13,73) \cdot \left(\frac{1}{18} - \frac{5}{12} \right); \quad B = 250 \cdot 13 \cdot 0,04.$$

В выражении A обозначим первый множитель буквой C , а второй — буквой D . Схематически заданное числовое выражение выглядит так: $\frac{C \cdot D}{B}$. Тогда план наших действий будет таков:

- 1) найдём значение c выражения C ;
- 2) найдём значение d выражения D ;
- 3) умножив c на d , найдём значение a выражения A ;
- 4) найдём значение b выражения B ;
- 5) разделив a на b , найдём значение заданного числового выражения.

Приступим к реализации этого плана.

1) $C = 1,56 + 15,73 + 4,44 - 13,73$.

Конечно, можно считать подряд: $1,56 + 15,73$, затем к этому числу прибавить $4,44$, затем вычесть $13,73$. Но человек, владеющий алгебраическими методами, так действовать не будет. Он применит *переместительное и сочетательное свойства сложения*:

$$\begin{aligned} & 1,56 + 15,73 + 4,44 - 13,73 = \\ & = (1,56 + 4,44) + (15,73 - 13,73) = 6 + 2 = 8. \end{aligned}$$

Переместительное свойство сложения ($a + b + c = a + c + b$) позволило нам поменять местами $15,73$ и $4,44$, а сочетательное свойство сложения позволило объединить $1,56$ и $4,44$ в одну группу, а $15,73$ и $13,73$ — в другую. Итак, $c = 8$.

2) $D = \frac{1}{18} - \frac{5}{12}$.

Здесь нам придётся вспомнить, как действовать с обыкновенными дробями. Сначала надо привести дроби к наименьшему общему знаменателю. Наименьшим общим кратным чисел 18 и 12 является число 36 , оно и будет наименьшим общим знаменателем. Для первой дроби придётся использовать дополнительный множитель 2 (поскольку $36 : 18 = 2$), а для второй дроби — дополнительный множитель 3 (поскольку $36 : 12 = 3$). Имеем:

$$\frac{1}{18} - \frac{5}{12} = \frac{1 \cdot 2}{18 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{2}{36} - \frac{15}{36} = \frac{2 - 15}{36} = -\frac{13}{36}.$$

Итак, $d = -\frac{13}{36}$.

3) Умножив c на d , найдём значение a выражения A :

$$8 \cdot \left(-\frac{13}{36}\right) = -\frac{8 \cdot 13}{36} = -\frac{4 \cdot 2 \cdot 13}{4 \cdot 9} = -\frac{26}{9}$$

(сократили дробь на общий множитель 4).

Итак, $a = -\frac{26}{9}$.

4) $B = 250 \cdot 13 \cdot 0,04$. Опять-таки можно, используя жаргон, проводить вычисления «в лоб», т. е. вычислить $250 \cdot 13$, затем то, что получится, умножить на 0,04. Но рациональнее воспользоваться *переместительным и сочетательным свойствами умножения*:

$$250 \cdot 13 \cdot 0,04 = (250 \cdot 0,04) \cdot 13 = 10 \cdot 13 = 130.$$

Итак, $b = 130$.

5) Осталось разделить числитель A на знаменатель B . Получим:

$$-\frac{26}{9} : 130 = -\frac{26}{9 \cdot 130} = -\frac{26}{9 \cdot 26 \cdot 5} = -\frac{1}{9 \cdot 5} = -\frac{1}{45}.$$

Ответ: $-\frac{1}{45}$.

Число, которое получается в результате упрощения числового выражения $\left(\text{в данном примере это было число } -\frac{1}{45}\right)$, называют *значением числового выражения*.

Проанализируем, какие сведения из математики нам пришлось вспомнить и использовать в процессе решения примера:

- порядок арифметических действий;
- переместительное свойство сложения:

$$a + b = b + a;$$

- переместительное свойство умножения:

$$ab = ba;$$

- сочетательное свойство сложения:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c);$$

- сочетательное свойство умножения:

$$abc = (ab)c = a(bc);$$

- понятия обыкновенной дроби, десятичной дроби, отрицательного числа;

- арифметические операции с десятичными дробями;
- арифметические операции с обыкновенными дробями;
- основное свойство обыкновенной дроби:

$$\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz};$$

— правила действий с положительными и отрицательными числами.

Всё это вам известно, с некоторыми алгебраическими фактами вы фактически знакомы с младших классов. Но этих фактов достаточно много, основная трудность состоит в том, что эти факты нужно не только знать, но и уметь правильно использовать. В этом мы убедились в рассмотренном примере.

Если дано алгебраическое выражение, то можно говорить о *значении алгебраического выражения*, но только при конкретных значениях входящих в него букв. Например, алгебраическое выражение $a + b$ при $a = 5$, $b = 7$ имеет значение 12 (поскольку $a + b = 5 + 7 = 12$); при $a = -16$, $b = -14$ оно имеет значение -30 (так как $a + b = -16 + (-14) = -16 - 14 = -30$). Поскольку буквам, входящим в состав алгебраического выражения, можно придавать различные числовые значения (т. е. можно менять значения букв), эти буквы называют *переменными*.

Пример 2 Найти значение алгебраического выражения

$$\frac{x^3 + 2xy^2 - y^3}{2x - 3y},$$

если:

а) $x = 1$, $y = 2$; б) $x = 6$, $y = 4$.

Решение. Введём обозначение $g(x; y) = \frac{x^3 + 2xy^2 - y^3}{2x - 3y}$ ($g(x; y)$ читается так: «же от икс, игрек»).

Это позволит фразу «вычислить $g(x; y)$ при $x = a$, $y = b$ » записать короче: «вычислить $g(a; b)$ ».

$$\text{а) } g(1; 2) = \frac{1^3 + 2 \cdot 1 \cdot 2^2 - 2^3}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2} = \frac{1 + 8 - 8}{2 - 6} = -\frac{1}{4}.$$

б) Обратите внимание: если $x = 6$, $y = 4$, то $2x - 3y = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$. А на нуль делить нельзя! Что это значит в данном случае (и в других аналогичных случаях)? Это значит, что при $x = 6$, $y = 4$ говорить о

нахождении значения заданного алгебраического выражения *не имеет смысла*, оно при указанных значениях переменных *не определено*.

Используется такая терминология: если при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение имеет числовое значение, то указанные значения переменных называют *допустимыми*; если же при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение не имеет смысла, то указанные значения переменных называют *недопустимыми*. Так, в рассмотренном примере 2 значения $x = 1$, $y = 2$ — допустимые, тогда как значения $x = 6$, $y = 4$ — недопустимые (более точно: первая пара значений — допустимая, а вторая пара значений — недопустимая). А для алгебраического выражения $\frac{a + 5}{a^2 - 9}$ недопустимыми являются значения $a = \pm 3$

(при этих значениях знаменатель обращается в нуль), а все остальные значения переменных a являются допустимыми.

Напомним, что такое *абсолютная величина числа a* , или, как чаще говорят в математике, *модуль числа a* . Обозначение: $|a|$. Если a — неотрицательное число, то $|a| = a$; если a — отрицательное число, то $|a| = -a$. Например, $|5| = 5$, $|-2,7| = 2,7$, $|0| = 0$.

Упражнения

Найдите значение числового выражения.

- 1.1.** а) $5 \cdot \left(\frac{2}{5} - 0,1\right)$; г) $5 \cdot \frac{2}{5} - 0,1$;
- б) $\frac{3}{4} - \frac{3}{8} : \frac{3}{8}$; д) $\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{8}$;
- в) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$; е) $\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$.
- 1.2.** а) $\left(2,4 - \frac{1}{2}\right) \cdot (4,45 + 1,1 - 3,05)$;
- б) $(5,63 - 2,48 + 2,05) : \left(3 \cdot \frac{2}{15} - 1,7\right)$;

$$\text{в)} (0,12 - 0,23 \cdot 3) : \left(0,28 - \frac{9}{25} \cdot \frac{7}{9}\right);$$

$$\text{г)} (5,28 - 3,12 + 0,34) : \left(2,7 \cdot \frac{4}{9} + 1,3\right);$$

$$\text{д)} \left(7 : \frac{14}{15} - 8,9\right) \cdot (4,29 + 2,31 - 1,6);$$

$$\text{е)} \left(\frac{7}{13} \cdot 2,6 + 5,4\right) : \left(2,36 + 1,24 - 6 \cdot \frac{3}{5}\right).$$

1.3.

$$\text{а)} |-3,5| + |2,4| + \left|\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right|;$$

$$\text{г)} |-4,9 - 2,7| + |2,1| - |-3,2|;$$

$$\text{б)} |3,2 - 6,7| - |-7,2| + |0,1|;$$

$$\text{д)} \left|\frac{2}{7} \cdot 2,8 - 2,4\right| - |5,8| + |1,9|;$$

$$\text{в)} \left|6,3 - 2,1 \cdot \frac{1}{3}\right| + |2,1 - 6,3|;$$

$$\text{е)} |5,3 + 1,25| + \left|3,2 + \frac{3}{14} : \frac{6}{7}\right|.$$

1.4. Не выполняя вычислений, укажите верные равенства. Объясните, какие свойства действий позволяют утверждать, что равенство верно:

$$\text{а)} 321 + 9084 = 9084 + 321;$$

$$\text{б)} 45 \frac{21}{83} + \left(23 \frac{12}{17} - 14 \frac{11}{15}\right) = \left(45 \frac{21}{83} + 23 \frac{12}{17}\right) - 14 \frac{11}{15};$$

$$\text{в)} 23,5 \cdot 61,2 = 61,2 \cdot 23,5;$$

$$\text{г)} 4532 - 2834 = 2834 - 4532;$$

$$\text{д)} 12 \cdot \left(7 \frac{1}{3} + 2 \frac{3}{4}\right) = 12 \cdot 7 \frac{1}{3} + 12 \cdot 2 \frac{3}{4};$$

$$\text{е)} 300 : 25 + 425 : 25 = 25 \cdot (12 : 1 + 17 : 1).$$

1.5. Вычислите, используя свойства арифметических действий:

$$\text{а)} 5,4 \cdot 3,81 + 5,4 \cdot 6,19;$$

$$\text{г)} 4,7 \cdot 6,37 + 4,7 \cdot 3,63;$$

$$\text{б)} 3 \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 1 \frac{3}{4} + 2 \frac{1}{3};$$

$$\text{д)} \frac{2}{5} + 5 \frac{1}{7} + 2 \frac{3}{5} + 1 \frac{6}{7};$$

$$\text{в)} \left(2 \frac{5}{12} - \frac{5}{6}\right) \cdot 12;$$

$$\text{е)} 16 \cdot \left(2 \frac{5}{8} - 1 \frac{3}{16}\right).$$

1.6. Запишите числовое выражение и найдите его значение:

а) произведение разности чисел $1\frac{3}{8}$ и $3\frac{5}{12}$ и числа 2,24;

б) сумма числа 2,3 и частного чисел $1\frac{2}{9}$ и $3\frac{1}{6}$;

в) сумма частного чисел $2\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{12}$ и числа $(-1,2)$;

г) разность числа $(-2,3)$ и произведения чисел 2,8 и 1,3.

1.7. Найдите значение числового выражения наиболее рациональным способом:

а) $2\frac{2}{9} + 2\frac{2}{7} \cdot 0,3 + 2\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} + 5\frac{7}{9} - 8\frac{3}{5}$;

б) $4 \cdot \left(1\frac{3}{4} - 2\frac{1}{12}\right) - 3\frac{7}{16} + \left(2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{16}\right)$;

в) $3\frac{5}{12} + 3\frac{1}{9} \cdot 1,5 - 3\frac{1}{9} \cdot \frac{6}{7} + 2\frac{1}{12} - 3\frac{5}{7}$;

г) $5\frac{6}{11} - \left(2\frac{7}{15} - 1\frac{3}{4}\right) \cdot 3 + \left(5\frac{5}{11} - 4,5\right) + 3\frac{9}{20}$.

1.8. Составьте числовое выражение, значение которого равно:

а) 5, используя при этом вычитание и умножение;

б) $-1,3$, используя при этом сложение и деление;

в) $\frac{3}{4}$, используя при этом деление и вычитание;

г) $-1\frac{2}{3}$, используя при этом умножение и сложение.

1.9. Заполните кружочки знаками, а пропуски числами так, чтобы равенства получились верными:

а) $2,81 + 4,25 \bigcirc \dots - 3,28 + \dots = 5,82$;

б) $3\frac{1}{4} + 5\frac{5}{8} - \dots + 2\frac{5}{6} \bigcirc \dots = -\frac{1}{3}$;

в) $\dots + 3,18 \bigcirc \dots - 2,86 + 3,11 = -2,25$;

г) $-2\frac{5}{12} + 5\frac{3}{4} + \dots - 1\frac{2}{3} \bigcirc \dots = \frac{1}{2}$.

1.10. Найдите значение выражения, предварительно составив план вычислений:

$$\text{а) } \frac{1\frac{5}{37} \cdot \left(\frac{11}{14} + 1\frac{1}{3} + \frac{27}{28}\right) + 1\frac{1}{32} \cdot \left(1\frac{3}{14} + \frac{2}{11} + \frac{9}{154}\right)}{\frac{19}{84} : \left(5\frac{13}{42} - 2\frac{13}{28} + \frac{5}{24}\right)};$$

$$\text{б) } \frac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right) : 2\frac{1}{12}}{\left(3\frac{1}{12} + 2\frac{7}{20} + 4\frac{11}{30}\right) : \left(3\frac{7}{24} + 2\frac{3}{20} - 7\frac{3}{40}\right)}.$$

1.11. Докажите, что выражение не определено:

$$\text{а) } \frac{2\frac{3}{7} + 5\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8} - 4\frac{2}{7} \cdot \left(2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{5}\right)}{1\frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{4}\right) - 5\frac{3}{4}};$$

$$\text{б) } \frac{-2,4 \cdot (2,15 + 4,35) + 2,28 + 3,1 \cdot (1,75 - 2,25)}{16,7 - 2,7 \cdot (3,55 + 2,65) + 4 : 100}.$$

1.12. Из пункта A в пункт B , находящийся от A в 348 км, выехал автомобиль со скоростью 54 км/ч. Одновременно навстречу ему из пункта B выехал второй автомобиль со скоростью 62 км/ч. Через сколько времени автомобили встретятся?

1.13. Маршрут прогулочного теплохода состоит из 44 км по озеру и 75 км по течению реки. Собственная скорость теплохода 22 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. Сколько времени затратит теплоход на весь маршрут?

1.14. Из пункта A в пункт B , находящийся от A на расстоянии 420 км, вышел товарный поезд со скоростью 56 км/ч. Через 1 ч после него из пункта A в том же направлении вышел пассажирский поезд со скоростью 72 км/ч. Какой поезд окажется ближе к пункту B через 3 ч после начала движения пассажирского поезда? Нет ли лишних данных в условии задачи для ответа на вопрос?

1.15. Расстояние между двумя машинами, едущими по шоссе, в настоящее время 300 км. Скорости машин: 60 км/ч и 80 км/ч. Какое расстояние будет между машинами через 2 ч? Достаточно ли данных в условии задачи для ответа на вопрос?

- 1.16.** Для приготовления смеси сухофруктов на компот берут сушёные яблоки и груши в равном соотношении. Свежие яблоки при сушке теряют 80 % своей массы, а груши — 75 %. Сколько нужно взять свежих фруктов, чтобы получить 1 кг смеси?
- 1.17.** На банковский счёт 1 февраля 2017 г. сроком на 3 года положили 100 000 р. под 10 % годовых. Ежегодно 31 января банк на счёт добавляет начисленные проценты. Какую сумму получит вкладчик по истечении срока 1 февраля 2020 г.?
- 1.18.** Вера может набрать лукошко ягод за 40 мин, а Таня — за 1 ч. За сколько минут девочки наберут такое лукошко, если будут собирать ягоды вместе?
- 1.19.** В городе М цена 1 м³ холодной воды составляет 30,87 р., а горячей — 120,82 р. Сколько рублей надо заплатить за воду в сентябре, если израсходовано 6 м³ холодной воды и 8 м³ горячей воды?
- 1.20.** Для населения с 1 июля 2017 г. установлены следующие цены на услуги горячего и холодного водоснабжения.

	Однотарифный режим		Двухтарифный режим	
	Холодная вода	Горячая вода	Холодная вода	Горячая вода
Цена за 1 м ³	33,03 р.	130,27 р.	День — 33,31 р. Ночь — 13,22 р.	День — 151,11 р. Ночь — 52,25 р.
Показания счётчика на начало месяца	299,319 м ³	201,471 м ³	День — 239,459 м ³ Ночь — 49,864 м ³	День — 161,176 м ³ Ночь — 40,295 м ³
Показания счётчика на конец месяца	306,829 м ³	203,771 м ³	День — 245,463 м ³ Ночь — 51,366 м ³	День — 163,016 м ³ Ночь — 40,755 м ³
Стоимость				

По данным, приведённым в таблице, определите, какой тариф окажется для семьи более выгодным. В ответе укажите стоимость воды (в рублях) по этому тарифу.

1.21. Для населения сельской местности с 1 июля по 31 декабря 2017 г. были установлены следующие цены на электроэнергию.

	Однотарифный режим	Двухтарифный режим	Многотарифный режим
Цена за 1 кВт	3,18 р.	День — 3,69 р. Ночь — 1,25 р.	Пиковая зона — 4,13 р. Полупиковая зона — 3,18 р. Ночь — 1,25 р.
Энергия, потребляемая за месяц	250 кВт · ч	День — 180 кВт · ч Ночь — 70 кВт · ч	Пиковая зона — 100 кВт · ч Полупиковая зона — 80 кВт · ч Ночь — 70 кВт · ч
Стоимость			

По данным, приведённым в таблице, определите, какой тариф окажется для семьи более выгодным. В ответе укажите стоимость электроэнергии (в рублях) по этому тарифу.

1.22. Найдите значение выражения:

- а) $3a + 4b$ при $a = 8$, $b = -2$;
- б) $-2m + 5n$ при $m = -4,5$, $n = 2,2$;
- в) $3q - 6p$ при $q = 3\frac{2}{3}$, $p = 1\frac{1}{3}$;
- г) $2g + 3d$ при $g = -3$, $d = 4$;
- д) $4x - 3y$ при $x = 1\frac{7}{8}$, $y = -2\frac{5}{6}$;
- е) $-3k + 2n$ при $k = -3,5$, $n = 2,4$.

1.23. Найдите значение выражения $\frac{2}{3}a + 1\frac{1}{5}b$, если:

- а) $a = 6$, $b = -10$;
- б) $a = -2\frac{2}{3}$, $b = 2\frac{1}{3}$;
- в) $a = 1,5$, $b = 5$;
- г) $a = -3$, $b = -5$.

Упростите выражение.

1.24. а) $2x + 4y - x - 7y - 1 + 3y$;
 б) $1,2c + d - 1,02c + 2,5d + 0,18c$;
 в) $1\frac{2}{3}q - 2\frac{3}{7}p + 4\frac{1}{3}q + 3\frac{9}{14}p + p$;
 г) $a + b - 6a - 5b + 4b + 3$;
 д) $3,6x + 4,2y - 2,55x + 0,48y - 0,05y$;
 е) $-1\frac{2}{5}x - 2\frac{4}{9}y + x - 3\frac{3}{5}x + 7\frac{1}{3}y$.

1.25. а) $3a + 2b - 2 \cdot (a - 3b)$;
 б) $1,5 \cdot (0,2x - 4) - 2,8 \cdot (2,5 - 2x)$;
 в) $\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{7}{9}a + 21b\right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}a - 9b\right)$;
 г) $4x - 3y + 3 \cdot (2x - 8y)$;
 д) $0,4 \cdot (1,2y + 3,2) - 2,5 \cdot (5y + 1,6)$;
 е) $\frac{5}{12} \cdot \left(2\frac{2}{5}x - 4y\right) + \frac{7}{15} \cdot \left(5x + 2\frac{1}{7}y\right)$.

1.26. Известно, что $x + 2y = 5$ и $z - y = -1$. Найдите:

а) $x + y + z$; в) $\frac{x + y + z}{2}$;
б) $0,5x + z$; г) $x + 2z$.

1.27. Найдите, если это возможно, значение выражения $\frac{2x + y}{3x - 2y}$ при заданных значениях переменных:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x = 2, y = 2; & \text{r) } x = -3, y = -3; \\ \text{б) } x = 2\frac{2}{3}, y = 1\frac{1}{3}; & \text{д) } x = 2\frac{5}{7}, y = 4\frac{1}{14}; \\ \text{в) } x = 4, y = 6; & \text{е) } x = 2\frac{3}{5}, y = -1\frac{1}{5}. \end{array}$$

1.28. При каких значениях переменной определено выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{2a-b}{3a}; & \text{г)} \frac{9n-m}{8m}; \\ \text{б)} \frac{2x-1}{1-2x}; & \text{д)} \frac{3q+7p}{2q+6}; \\ \text{в)} \frac{1\frac{2}{3}a-3\frac{1}{7}}{2\frac{1}{7}a+1\frac{2}{7}}; & \text{е)} \frac{2\frac{1}{5}k-1\frac{5}{7}n}{1\frac{4}{5}k+4,5} \end{array}$$

1.29. Заполните таблицу.

a	2	-4	2		$-1\frac{5}{6}$	0	
b	-5	-2		$2\frac{1}{3}$	-1,5		0
$3a - 2,5b$			-2,25				$-1\frac{1}{7}$
$2\frac{4}{7}a + 3\frac{1}{3}b$				3		$2\frac{7}{9}$	

1.30. Докажите, что значение выражения равно нулю:

$$\text{а) } \frac{\frac{4}{9} \cdot (4,2 : 4 - 1,5) + 0,2}{0,027 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^3};$$

$$\text{б) } \frac{0,75 + 1\frac{7}{18} \cdot (0,36 : 6 - 0,6)}{1,2^2 : 0,72}.$$

1.31. Докажите, что значение выражения равно нулю при любых допустимых значениях переменных:

$$\text{а) } \frac{2 \cdot (3x + y) - (3x - y) - 3 \cdot (x + y)}{2x - 5y};$$

$$\text{б) } \frac{q - 2 \cdot (q + 3p) + 2 \cdot (q + p) - (q - 4p)}{q + 2p}.$$

§ 2. Понятие о математическом языке

Если математик услышит фразу «От перемены мест множителей произведение не меняется», он запишет: $ab = ba$. Если он услышит фразу «Двадцать три процента от проданных 300 кг яблок», он запи-

шет: $\frac{23}{100} \cdot 300$ (и тут же получит ответ: 69 кг). В обоих случаях математик переводит обычную речь на математический язык, и более краткий, и более удобный для приложений. Есть и специальные термины, присущие именно математическому языку: теорема, слагаемое, уравнение, абсцисса и т. д.

Одна из особенностей математического языка состоит в стремлении к краткости записей. Например, вместо длинной записи

$$a + a + a + a + a$$

используется короткая запись $5a$; вместо длинной записи

$$x + x + x + \dots + x,$$

в которой n слагаемых, используется запись nx ; вместо произведения девяти одинаковых множителей

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

используется специально придуманное обозначение 3^9 .

Если возникает необходимость в новом обозначении, в новом термине, то формулируется новое определение. *Определение* — это предложение, разъясняющее суть нового термина, нового обозначения. Напомним определение степени с натуральным показателем.

Определение. Под a^n , где $n = 2, 3, 4, 5, \dots$, понимают произведение n множителей, каждым из которых является число a . Выражение a^n называют **степенью**, число a — **основанием степени**, число n — **показателем степени**. Под a^1 понимают само число a . Операцию отыскания степени a^n называют **возведением в степень**.

Запись a^n читают так: « a в n -й степени». Исключение составляют запись a^2 , которую читают: « a в квадрате» (хотя можно читать и « a во второй степени»), и запись a^3 , которую читают: « a в кубе» (хотя можно читать и « a в третьей степени»).

Пример 1 Вычислить $5^1 \cdot (-3)^2 \cdot (-2)^3 \cdot 1^4 \cdot (-1)^5$.

Решение.

$$\begin{aligned} 5^1 &= 5; \\ (-3)^2 &= (-3) \cdot (-3) = 9; \\ (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8; \\ 1^4 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; \\ (-1)^5 &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

Значит,

$$5^1 \cdot (-3)^2 \cdot (-2)^3 \cdot 1^4 \cdot (-1)^5 = 5 \cdot 9 \cdot (-8) \cdot 1 \cdot (-1) = 360.$$

В рассмотренном примере мы несколько раз возводили в степень отрицательные числа. Обратите внимание: если отрицательное число возводится в *чётную* степень, то получается *положительное* число, если же отрицательное число возводится в *нечётную* степень, то получается *отрицательное* число. Попробуйте объяснить, почему это так.

Для облегчения вычислений вам пригодится таблица степеней однозначных чисел (в пределах тысячи).

$a \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729			
4	16	64	256					
5	25	125	625					
6	36	216						
7	49	343						
8	64	512						
9	81	729						

Имеются ещё три числа, для которых легко составить таблицу степеней. Это числа 1, 0, -1 , а таблица степеней с натуральным показателем n для этих оснований выглядит следующим образом: $0^n = 0$; $1^n = 1$; $(-1)^n = 1$, если n — чётное число ($n = 2k$); $(-1)^n = -1$, если n — нечётное число ($n = 2k - 1$).

А теперь выберем в качестве основания степени число 10. Смотрите: $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$. Обратите внимание: каков показатель степени, столько нулей надо записать после цифры 1. Вообще

$$10^n = 1000\dots 0 \text{ (здесь подразумевается наличие } n \text{ нулей)}.$$

Пример 2 Представить число 236 105 в виде суммы разрядных слагаемых.

Решение.

$$\begin{aligned} 236\,105 &= 200\,000 + 30\,000 + 6000 + 100 + 5 = \\ &= 2 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 5 = \\ &= 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5. \end{aligned}$$

Упражнения

Прочитайте алгебраическое выражение, используя термины математического языка.

- 2.1.** а) $a + bc$; в) $c^2 - d^2$; д) $(p + q)^3$;
б) $xy - z$; г) $m^3 + n^3$; е) $(x - a)^2$.
- 2.2.** а) $(k - n)(k + n)$; в) $|a + b|$; д) $k^3 - |n|^3$;
б) $\frac{c + d}{c - d}$; г) $|x| - |y|$; е) $3 \cdot |u + v|^3$.
- 2.3.** а) $4 \cdot (x - y)^2$; в) $(q^3 - p^3) : (3q)$; д) $\frac{q^2 - p^2}{qp}$;
б) $3 \cdot (u + w + v)^3$; г) $2 : (c^3 + d^3)$; е) $\frac{p + q}{(p - q)^2}$.

Запишите выражение на математическом языке.

- 2.4.** а) Сумма числа x и утроенного произведения x и y ;
б) произведение числа x и суммы x и y ;
в) квадрат разности частного чисел a и b и числа c ;
г) произведение квадрата суммы чисел x и y и числа x ;
д) частное числа p и полуразности чисел a и b ;
е) сумма квадратов числа q и удвоенной разности чисел q и p .
- 2.5.** а) Модуль разности чисел a и b ;
б) произведение разности чисел x и y и модуля числа z ;
в) модуль суммы числа a и квадрата разности чисел b и c ;
г) разность модулей чисел a и b ;
д) разность произведения чисел x и y и модуля числа z ;
е) сумма модуля числа a и квадрата разности чисел b и c .

Запишите данное утверждение и ответы на поставленные вопросы на математическом языке.

- 2.6.** Периметр P прямоугольника равен удвоенной сумме его сторон a и b .
а) Чему равен полупериметр p этого прямоугольника?
б) Как найти сторону прямоугольника, если известны полупериметр и его другая сторона?
в) Чему равна площадь S прямоугольника, периметр которого в 2 раза больше данного?

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Математический язык. Математические модели	5
§ 1. Числовые и алгебраические выражения	5
§ 2. Понятие о математическом языке	16
§ 3. Свойства степеней с натуральными показателями	23
§ 4. Понятие о математических моделях	32
§ 5. Линейные уравнения с одной переменной	39
§ 6. Координатная прямая	47
§ 7. Числовые промежутки на координатной прямой	51
Итак, в главе 1	58
Вопросы	58
Тест	59
Дополнительные задачи	60
Из истории математики	64
Глава 2. Линейная функция	67
§ 8. Координатная плоскость. Координаты точки на плоскости . . .	67
§ 9. Координатная плоскость. Построение точки на плоскости по заданным координатам	77
§ 10. Линейные уравнения с двумя переменными	83
§ 11. График линейного уравнения с двумя переменными	86
§ 12. Что такое линейная функция	93
§ 13. Линейная функция $y = kx$	101
§ 14. Наименьшее и наибольшее значения линейной функции на заданном промежутке	108
§ 15. Взаимное расположение графиков линейных функций	114
Итак, в главе 2	120
Вопросы	120
Тест	121
Дополнительные задачи	123
Из истории математики	128

Глава 3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными	131
§ 16. Что такое система уравнений. Графический метод решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными	131
§ 17. Решение систем линейных уравнений методом подстановки	138
§ 18. Решение систем линейных уравнений методом алгебраического сложения	145
§ 19. Системы линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций	151
Итак, в главе 3	160
Вопросы	160
Тест	160
Дополнительные задачи	163
Из истории математики	166
Глава 4. Функция $y = x^2$	169
§ 20. Парабола	169
§ 21. Графическое решение уравнений	180
§ 22. Что означает в математике запись $y = f(x)$	183
§ 23. Познакомимся с кусочными функциями	187
Итак, в главе 4	199
Вопросы	199
Тест	199
Дополнительные задачи	202
Из истории математики	204
Глава 5. Одночлены и многочлены	207
§ 24. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена	207
§ 25. Сложение и вычитание одночленов	211
§ 26. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень	215
§ 27. Деление одночлена на одночлен	219
§ 28. Понятие многочлена. Стандартный вид многочлена. Алгебраическая сумма многочленов	223
§ 29. Умножение многочленов	229
§ 30. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности	234

§ 31. Формулы сокращённого умножения: разность квадратов	239
§ 32*. Формулы сокращённого умножения: разность кубов и сумма кубов	243
§ 33. Деление многочлена на одночлен	246
Итак, в главе 5	250
Вопросы	250
Тест	251
Дополнительные задачи	252
Из истории математики	256
Глава 6. Разложение многочленов на множители	259
§ 34. Разложение многочлена на множители методом вынесения общего множителя за скобки	259
§ 35. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения	265
§ 36. Разложение многочленов на множители методом группировки	273
§ 37. Сокращение алгебраических дробей	280
§ 38. Тождества и тождественные преобразования	285
Итак, в главе 6	290
Вопросы	290
Тест	291
Дополнительные задачи	292
Глава 7. Описательная статистика	295
§ 39. Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы	296
§ 40. Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот . . .	306
§ 41. Диаграммы распределения данных	317
§ 42. Числовые характеристики рядов данных	330
Итак, в главе 7	344
Вопросы	344
Тест	345
Дополнительные задачи	347
Из истории математики	352
Ответы	353
Список дополнительной литературы	364