



МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра

7

$$0,(17) = \frac{17}{99}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

0,1234567891011...

УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

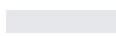
Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников,
А. В. Шевкин

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 430 от 14.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 117 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 107-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Условные обозначения:

-  — задания, предназначенные для устной работы
-  — задания повышенной трудности
-  — начало необязательного материала внутри пункта
-  — конец необязательного материала внутри пункта

Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразоват. организаций :
А45 издание в pdf-формате / [С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 10-е изд., стер. — Москва :
Просвещение, 2022. — 287 с. : ил. — (МГУ — школе).

ISBN 978-5-09-101257-6 (электр. изд.). — Текст : электрон-
ный.

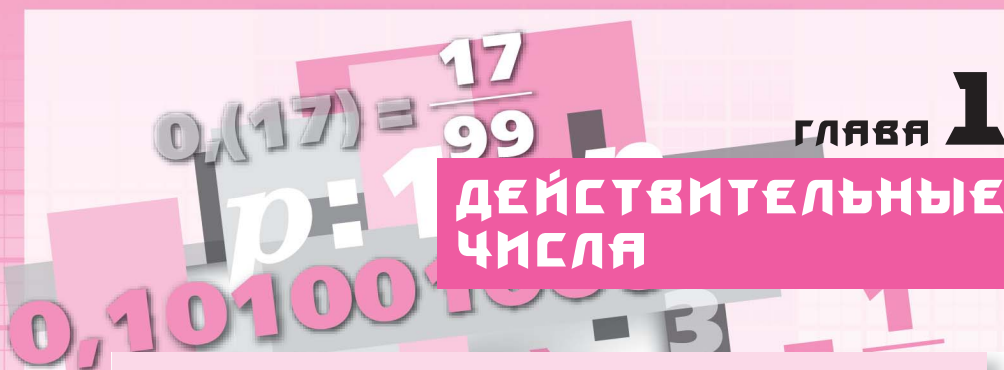
ISBN 978-5-09-087628-5 (печ. изд.).

Данный учебник является первой частью трёхлетнего курса алгебры для
общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и перерабо-
тано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых ре-
зультатов обучения, предусмотренных ФГОС, и дать учащимся хорошую
подготовку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной про-
граммы или программы для классов с углублённым изучением математики.

УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101257-6 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-087628-5 (печ. изд.)

© Издательство «Просвещение», 2013, 2017
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2013, 2019
Все права защищены

The background of the page features a collage of mathematical symbols and numbers in various sizes and colors (pink, grey, white). Visible elements include the expression $0, (17) = \frac{17}{99}$, the letter 'p', the number '1', and the decimal '0,10100'.
$$0, (17) = \frac{17}{99}$$

глава 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

При изучении главы 1 вам предстоит привести в систему всё, что вы знаете о числах — натуральных, рациональных, действительных, изучить свойства арифметических действий над ними, научиться применять их для упрощения вычислений. Все эти знания помогут вам лучше освоить преобразования буквенных выражений, которые будут изучаться в следующей главе.

§ 1. Натуральные числа

1.1. Натуральные числа и действия с ними

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... называют **натуральными** или **целыми положительными** числами. Нуль не считают натуральным числом.

Сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами. Например, $3 + 5 = 8$, $3 \cdot 5 = 15$.

Разность натуральных чисел является натуральным числом только в том случае, если уменьшаемое больше вычитаемого.

Например, $8 - 5 = 3$.

Если уменьшаемое меньше вычитаемого или равно ему, то разность натуральных чисел не является натуральным числом.

Частное двух натуральных чисел также не всегда является натуральным числом. Если при делении одного натурального числа на другое в частном получается натуральное число, то говорят, что **первое число делится на второе нацело**, при этом второе число называют **делителем** первого.

Например, 6 делится на 3 нацело. Говорят также, что 3 — делитель числа 6. Число 7 не делится на 3 нацело. Слово «нацело» в этих предложениях обычно опускают, говорят: 6 делится на 3, а 7 не делится на 3.

Справедливо свойство делимости натуральных чисел:

Если m , n и k — натуральные числа и m делится на n , а n делится на k , то m делится на k .

Например, 510 делится на 51, а 51 делится на 17, следовательно, 510 делится на 17.

Натуральные числа принято обозначать малыми латинскими буквами: a , b , c , ..., p , q , ...

Каждое натуральное число p делится на 1 и само на себя:

$$p : 1 = p, \quad p : p = 1.$$

1. Какие числа называют натуральными? Является ли 0 натуральным числом?
2. Каким числом является сумма натуральных чисел?
3. В каком случае разность натуральных чисел есть натуральное число?
4. Каким числом является произведение натуральных чисел?
5. Всегда ли выполнимо деление натуральных чисел нацело?
6. На какие натуральные числа делится нацело любое натуральное число?
7. Делятся ли нацело на 7 числа: 12, 27, 42, 126?
8. Сформулируйте признак делимости на:
а) 10; б) 5; в) 2; г) 3; д) 9.
9. Делятся ли нацело на 15 числа: 30, 105, 215, 360?
10. Делятся ли нацело на 18 числа: 189, 252, 456, 1998, 1999?
11. Какие из чисел 3124, 3582, 3528, 31 212 делятся на 4?
12. Делятся ли нацело на 45 числа: 234, 900, 954, 5553, 3555?
13. Какие из чисел 5425, 3530, 3550, 31 275 делятся на 25?

Вычислите (14—15):

14. а) $7326 + 359$; б) $5321 - 985$; в) $424 \cdot 27$;
г) $15\,795 : 39$; д) $732 \cdot 254 - 8145 : 45 + 314\,253$.
15. а) $329 \cdot 759 + 329 \cdot 41$; б) $724 \cdot 928 - 724 \cdot 128$;
в) $398 \cdot 801 - 398$; г) $854 \cdot 399 + 854$.
16. Объясните, не выполняя всех вычислений, почему:
а) $357 \cdot 828 + 357 \cdot 936$ делится на 357;
б) $425 \cdot 723 - 315 \cdot 723$ делится на 3; на 5; на 15.

17. Натуральное число n делится на натуральное число p ($p > 1$). Докажите, что число $n + 1$ не делится на p .
18. Выписали первые 99 натуральных чисел: 1, 2, ..., 99. Запятые стёрли и получили натуральное число.
- а) Сколько раз в записи этого числа встречается цифра: 0, 1, 2, 3, ..., 9?
- б) Делится ли это число на 9?
19. Произведение первых n ($n \geq 2$) натуральных чисел обозначают $n!$ и читают «эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.
Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
 На сколько нулей оканчивается:
 а) $10!$; б) $50!$; в) $100!$?

1.2. Степень числа

Для записи произведения числа самого на себя несколько раз применяют сокращённое обозначение.

Произведение четырёх множителей, каждый из которых равен числу 5, называют четвёртой степенью числа 5 и обозначают 5^4 , т. е.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4.$$

При этом число 5 называют основанием степени, а число 4 — показателем степени.

Вообще, **k -й степенью числа p** называют произведение k множителей, каждый из которых равен p , его обозначают p^k , т. е.

$$p^k = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ раз}} \quad (k > 1).$$

Число p называют **основанием степени**, а число k — **показателем степени**.

Число p в первой степени понимают как само число p , т. е.

$$p^1 = p,$$

например, $5^1 = 5$.

Легко видеть, что верны следующие равенства:

$$2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^2,$$

$$5^1 \cdot 6^1 = 5 \cdot 6 = (5 \cdot 6)^1.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

1. Произведение степеней с одним и тем же показателем равно степени с тем же показателем и основанием, равным произведению оснований:

$$p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n.$$

- 20.** Что называют k -й степенью числа p ? Назовите показатель и основание степени в записи p^k .
- 21.** Чему равна первая степень числа?
- 22.** Чему равно произведение степеней с одним и тем же показателем? Приведите примеры.
- 23.** Чему равно произведение степеней с одним и тем же основанием? Приведите примеры.
- 24.** Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень? Приведите примеры.
- 25.** Запишите произведение в виде степени, назовите основание и показатель степени:
а) $2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
в) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; г) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
д) $7 \cdot 7$; е) $8 \cdot 8 \cdot 8$.

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

$$p^n \cdot p^m = p^{n+m}.$$
[illegible]

3. Степень степени числа равна степени того же числа с показателем, равным произведению показателей этих степеней, т. е.

$$(p^m)^n = p^{m \cdot n}.$$

- 20.** Что называют k -й степенью числа p ? Назовите показатель и основание степени в записи p^k .
- 21.** Чему равна первая степень числа?
- 22.** Чему равно произведение степеней с одним и тем же показателем? Приведите примеры.
- 23.** Чему равно произведение степеней с одним и тем же основанием? Приведите примеры.
- 24.** Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень? Приведите примеры.
- 25.** Запишите произведение в виде степени, назовите основание и показатель степени:
 - а) $2 \cdot 2 \cdot 2$;
 - б) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
 - в) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$;
 - г) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
 - д) $7 \cdot 7$;
 - е) $8 \cdot 8 \cdot 8$.

- 26.** Вычислите:
а) 2^3 ; б) 5^2 ; в) 3^4 ;
г) 4^3 ; д) 2^4 ; е) 99^1 .
- 27.** Верно ли равенство:
а) $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$; б) $7^{10} \cdot 8^{10} = (7 \cdot 8)^{10}$;
в) $(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$; г) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7$?
- 28.** Запишите произведение в виде степени числа 10:
а) $2 \cdot 5$; б) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$;
в) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; г) $2^6 \cdot 5^6$.
- 29.** На какое наименьшее число надо умножить данное число, чтобы результат можно было записать в виде степени числа 10:
а) 2; б) 5; в) $2 \cdot 5^2$; г) $2^2 \cdot 5$;
д) $2^4 \cdot 5^2$; е) $2^3 \cdot 5^6$; ж) 20; з) 50;
и) 250; к) 80; л) 25; м) 16?
- 30.** Верно ли равенство:
а) $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$; б) $5^2 \cdot 5^3 = 5^5$;
в) $2^7 \cdot 2 = 2^8$; г) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3 = 3^{10}$?
- 31.** Запишите произведение в виде степени:
а) $2^4 \cdot 2^3$; б) $3^5 \cdot 3^2$; в) $4^2 \cdot 4^5$;
г) $5^7 \cdot 5$; д) $6 \cdot 6^3$; е) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2$;
ж) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$; з) $4 \cdot 4^5 \cdot 4$; и) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3$.
- 32.** Верно ли равенство:
а) $(2^3)^2 = 2^6$; б) $(3^5)^6 = 3^{30}$; в) $(3^3)^3 = 3^9$; г) $(5^4)^2 = 5^8$?
- 33.** Используя свойство 3 степеней, запишите в виде степени:
а) $(2^2)^3$; б) $(3^4)^2$; в) $(3^7)^2$; г) $(5^3)^4$; д) $(10^3)^5$; е) $(7^2)^4$.

1.3. Простые и составные числа

Простым числом называют натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и на себя.

Приведём первые 15 простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Непростые натуральные числа, большие 1, называют **составными**. Каждое составное число делится на 1, на себя и ещё хотя бы на одно натуральное число.

Приведём составные числа, меньшие 25:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24.

Единица не является ни простым, ни составным числом.

Таким образом, **множество всех натуральных чисел состоит из простых чисел, составных чисел и числа 1.**

Приведём некоторые свойства простых и составных чисел.

ТЕОРЕМА 1

Каждое отличное от единицы натуральное число имеет делитель — простое число.

Доказательство. Каждое натуральное число n ($n > 1$) имеет делители 1 и n .

Если n — простое число, то натуральное число n имеет делитель — простое число n .

Если n — составное число, а d — наименьший не равный 1 его делитель, то d — простое число. Покажем это. Предположим противное, т. е. что d — составное число. Тогда число d имеет делитель, меньший d и отличный от 1, который является также делителем числа n (см. п. 1.1), т. е. d не является наименьшим не равным 1 делителем числа n . Полученное противоречие означает, что d — простое число. Теорема 1 доказана. ●

Все простые числа выписать невозможно, так как их бесконечно много. Любой список простых чисел можно пополнить ещё одним простым числом, отличным от этих простых чисел. Следующую теорему доказал древнегреческий учёный Евклид (III в. до н. э.).

ТЕОРЕМА 2

Простых чисел бесконечно много.

Доказательство. Допустим, что существует наибольшее простое число p . Запишем все простые числа в порядке возрастания:

$$2, 3, 5, 7, \dots, p.$$

Составим число:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p + 1.$$

Так как $n > 1$, то по теореме 1 оно имеет делитель d — простое число. Следовательно, число n делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, 7, ..., p . Но очевидно, что при делении числа n на любое из чисел 2, 3, 5, 7, ..., p получается остаток 1, т. е. число n не делится ни на одно из этих чисел. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, т. е. не существует наибольшего простого числа. Теорема 2 доказана. ●

34. Какое число называют простым; составным?

35. Является ли 1 простым числом; составным?

36. Какие из чисел являются простыми, какие — составными:

а) 9, 12, 14, 17, 28, 37, 47, 69, 517;

б) 41, 57, 1121, 793?

37. Являются ли простыми числа 1 000 011; 20 012 345; 111 111 111?

38. Выпишите первые 25 простых чисел в порядке возрастания.
39. Выпишите все составные числа, не превышающие 50, в порядке возрастания.
40. **Доказываем.** Докажите, что 2 — единственное чётное простое число.
41. Запишите числа 48 и 96 в виде разности квадратов двух простых чисел.

Исследуем (42—43).

42. Можно ли простое число записать в виде суммы:
а) двух чётных чисел; б) двух нечётных чисел;
в) чётного и нечётного чисел?
43. Леонард Эйлер предложил такую формулу простых чисел: $p = n^2 - n + 41$. Сколько простых чисел даёт эта формула при подстановке в неё последовательных натуральных чисел, начиная с 1? Выполните вычисления до получения первого составного числа.

Доказываем (44—45).

44. Докажите, что найдётся такое натуральное число n , для которого $n^2 - n + 41$ является составным числом.
45. а) Докажите, что одно из трёх соседних нечётных чисел делится на 3.
б) Известно, что p , $p + 2$, $p + 4$ — простые числа. Найдите p . Докажите, что других p не существует.

1.4. Разложение натуральных чисел на множители

Из п. 1.3 следует, что простое число p имеет только два делителя 1 и p , составное число n , кроме делителей 1 и n , имеет ещё по крайней мере один делитель.

Так, делителями числа 13 являются числа 1 и 13, делителями числа 4 являются числа 1, 2, 4, делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Если делитель — простое число, то его называют **простым делителем**. Так, число 13 имеет один простой делитель 13, число 4 — один простой делитель 2, а число 12 — два простых делителя 2 и 3.

Каждое натуральное составное число можно представить как произведение степеней различных его простых делителей, записанных в порядке возрастания этих делителей. Например:

$$28 = 2^2 \cdot 7, \quad 22 = 2 \cdot 11, \quad 81 = 3^4, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Правые части этих равенств называют **разложениями на простые множители** чисел, записанных в левых частях.

Таким образом, **разложить данное натуральное число на простые множители** — это значит представить его в виде произведения различных простых чисел, взятых в соответствующих степенях и записанных в порядке возрастания этих простых чисел.

Справедливо следующее утверждение, называемое **основной теоремой арифметики**:

Каждое отличное от 1 натуральное число можно разложить на простые множители, и такое разложение единственно.

Покажем на примере, как разложить на простые множители натуральное составное число.

Пример. Разложим число 90 на простые множители.

90 делится на простое число 2, поэтому

$$90 = 2 \cdot 45.$$

45 не делится на 2, но делится на простое число 3, поэтому

$$45 = 3 \cdot 15.$$

15 делится на 3, поэтому

$$15 = 3 \cdot 5.$$

Так как 5 — простое число, то процесс отыскания простых делителей закончен.

Этот процесс удобно записать так:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, получаем равенство $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Правая часть этого равенства есть разложение на простые множители числа 90.

Каждое простое число уже разложено на множители, так как, например,

$$7 = 7^1, 19 = 19^1.$$

В дальнейшем нас будут интересовать натуральные числа, которые не имеют других простых делителей, кроме 2 и 5.

Разъясним, что понимается под словами «данное натуральное число m не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5».

Во-первых, m может быть степенью числа 2, т. е. равняться одному из чисел:

$$2; 2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16; 2^5 = 32; \dots$$

Во-вторых, m может быть степенью числа 5, т. е. равняться одному из чисел:

$$5; 5^2 = 25; 5^3 = 125; 5^4 = 625; \dots$$

В-третьих, m может быть произведением некоторой степени числа 2 и некоторой степени числа 5. Примерами таких чисел являются числа:

$$2^2 \cdot 5^2 = 100; 2^3 \cdot 5^2 = 200; 2^4 \cdot 5 = 80.$$

Наконец, m может быть единицей ($m = 1$). Ведь единица не имеет простых делителей.

- 46.** Что называют делителем натурального числа? Назовите делители числа 12.
- 47.** Что называют простым делителем натурального числа? Назовите простые делители числа 12.
- 48.** Назовите все делители числа:
а) 17; б) 45; в) 113; г) 476; д) 32.
- 49.** Найдите все простые делители числа:
а) 19; б) 54; в) 112; г) 232.
- 50.** Напишите пять натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 2 и 5, и пять натуральных чисел, не обладающих этим свойством.
- 51.** Приведите примеры натуральных чисел, имеющих делители 3 и 4. Какие делители, кроме указанных, имеют выбранные натуральные числа?
- 52.** Приведите примеры натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 3 и 5.
- 53.** Найдите все делители чисел: 2, 6, 12, 28, 48, 100.
- 54.** Найдите все простые делители чисел:
а) 4, 9, 15, 10, 24; б) 46, 50, 58, 99, 128;
в) 196, 254, 400, 625, 10 000; г) 7, 77, 777, 7777, 77 777.
- 55.** Разложите на простые множители числа, т. е. запишите число в виде произведения степеней простых чисел:
а) 16, 18, 26; б) 35, 48, 72;
в) 144, 210, 800; г) 216, 343, 384;
д) 1024, 1728, 1575; е) 9225, 1001, 1739.
- 56.** Сколько чисел от 1 до 100:
а) делится на 2; б) делится на 5;
в) делится на 2 и на 5; г) не делится на 2 и на 5?
- 57.** Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3?

§ 2. Рациональные числа

2.1. Обыкновенные дроби. Конечные десятичные дроби

Положительным рациональным числом называют число, которое может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа.

Положительное рациональное число называют также **обыкновенной положительной дробью** или просто **дробью**. Число p называют **числителем** дроби, а число q — её **знаменателем**.

Примеры дробей: $\frac{2}{3}, \frac{6}{8}, \frac{123}{150}, \frac{8}{4}, \frac{7}{1}, \frac{7}{5}$.

Любое натуральное число p можно записать в виде дроби $\frac{p}{1}$, при этом пишут равенство $p = \frac{p}{1}$.

До п. 2.5 мы будем рассматривать положительные дроби (положительные рациональные числа), но для краткости прилагательное «положительный» будем опускать, подразумевая его.

Для любого натурального числа n справедливо равенство, называемое **основным свойством дроби**:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}. \quad (1)$$

Например, $\frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{35}{15}$, $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{10}{5}$, $\frac{17}{2} = \frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{85}{10}$.

Можно сказать, что левая и правая части равенства (1) являются разными записями одного и того же положительного рационального числа.

Если числа p и q не имеют общих простых делителей, то дробь $\frac{p}{q}$ называют **несократимой**. Например, $\frac{2}{3}$ — несократимая дробь, а $\frac{6}{8}$ — сократимая дробь.

Если $p < q$, то дробь называют **правильной**. Если $p \geq q$, то дробь называют **неправильной**. Например, $\frac{4}{8}$ — правильная дробь, а $\frac{9}{8}$ и $\frac{8}{8}$ — неправильные дроби.

Если знаменатель q дроби $\frac{p}{q}$ равен 10, или 100, или 1000, или 10 000, ..., т. е. если q есть некоторая степень числа 10, то обыкновенную дробь $\frac{p}{q}$ можно записать в виде **конечной десятичной дроби**.

Например, обыкновенные дроби

$$\frac{3}{10}; \quad \frac{7}{100}; \quad \frac{12\,437}{1000}; \quad \frac{234}{100\,000}$$

записываются соответственно в виде следующих конечных десятичных дробей:

$$0,3; \quad 0,07; \quad 12,437; \quad 0,00234.$$

Каждую из этих конечных десятичных дробей называют **десятичным разложением** соответствующей обыкновенной дроби.

При этом пишут равенства

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} &= 0,3; & \frac{7}{100} &= 0,07; \\ \frac{12\,437}{1000} &= 12,437; & \frac{234}{100\,000} &= 0,00234 \end{aligned}$$

и говорят, что данные обыкновенные дроби разложены в конечные десятичные дроби.

Надо иметь в виду, что, например, $\frac{7}{100}$ и 0,07 есть разные обозначения одного и того же числа. Первое — в виде обыкновенной дроби, а второе — в виде конечной десятичной дроби.

Очевидно также, что всякая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где p — натуральное число, а q — некоторая степень числа 10. Например:

$$\begin{aligned} 1,05 &= \frac{105}{10^2}; & 8,234 &= \frac{8234}{10^3}; \\ 3,0122 &= \frac{30\,122}{10^4}; & 0,00012 &= \frac{12}{10^5}. \end{aligned}$$

Итак, **любая обыкновенная дробь, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10, может быть записана в виде конечной десятичной дроби.**

Верно и обратное утверждение: **любая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной дроби, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10.**

Отметим, что любое натуральное число можно записать в виде конечной десятичной дроби, например:

$$3 = 3,0 = 3,00 = 3,000 = \dots$$

На практике такими записями пользуются широко. Если, например, в результате измерений, которые производились с точностью до сантиметра, получилось 3 м, то пишут 3,00 м, подчёркивая этим, что полученный результат вычислен с точностью до 1 сантиметра (0,01 м).

- 58.** Что называют положительным рациональным числом (дробью)?
- 59.** Как называют числа p и q в записи дроби $\frac{p}{q}$?
- 60.** Какую дробь называют несократимой?
- 61.** Можно ли натуральное число записать в виде обыкновенной дроби или конечной десятичной дроби? Приведите примеры.
- 62.** В чём заключается основное свойство дроби?
- 63.** Можно ли записать конечную десятичную дробь в виде $\frac{p}{q}$? Приведите примеры.
- 64.** Какую дробь называют правильной; неправильной? Приведите примеры.
- 65.** Разложите числитель и знаменатель дроби на простые множители и сократите дробь, если возможно:
- а) $\frac{12}{35}$; б) $\frac{48}{100}$; в) $\frac{105}{125}$; г) $\frac{24}{36}$;
 д) $\frac{56}{100}$; е) $\frac{225}{300}$; ж) $\frac{123}{321}$; з) $\frac{111}{132}$.

Сократите дробь (**66—67**):

- 66.** а) $\frac{16}{24}$; б) $\frac{240}{1000}$; в) $\frac{1240}{10\,000}$; г) $\frac{1024}{3456}$;
 д) $\frac{315}{420}$; е) $\frac{630}{1470}$; ж) $\frac{660}{616}$; з) $\frac{770}{1320}$;
 и) $\frac{143}{260}$; к) $\frac{112}{672}$; л) $\frac{450}{540}$; м) $\frac{777}{2121}$.
- 67.** а) $\frac{88}{99}$; б) $\frac{777}{888}$; в) $\frac{123}{205}$; г) $\frac{945}{459}$; д) $\frac{1212}{2727}$; е) $\frac{123\,123}{327\,327}$.
- 68.** Проверьте, является ли дробь несократимой:
- а) $\frac{13}{21}$; б) $\frac{62}{81}$; в) $\frac{94}{98}$; г) $\frac{125}{250}$;
 д) $\frac{17}{10}$; е) $\frac{63}{91}$; ж) $\frac{126}{129}$; з) $\frac{217}{279}$;
 и) $\frac{765}{1071}$; к) $\frac{396}{591}$; л) $\frac{199}{200}$; м) $\frac{1999}{2000}$.
- 69.** Запишите данные дроби в виде конечных десятичных дробей и прочитайте полученные десятичные дроби:
- а) $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{23}{10}$; б) $\frac{53}{1000}$, $\frac{178}{10}$, $\frac{37\,481}{10\,000}$;
 в) $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{73}{1\,000\,000}$, $\frac{1276}{10\,000}$; г) $\frac{453}{100}$, $\frac{7269}{100}$, $\frac{5676}{10}$.

70. Запишите данные конечные десятичные дроби в виде обыкновенных дробей:

- а) 0,1; 0,21; 1,5; б) 12,3; 0,007; 123,05;
 в) 0,4; 0,12; 0,125; г) 1,25; 3,75; 4,625;
 д) 0,037; 2,503; 0,710; е) 0,22; 0,055; 2,125; 4,0404.

2.2. Разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь

Конечные десятичные дроби всегда можно записать в виде обыкновенных несократимых дробей. Например:

$$\begin{aligned} 0,375 &= \frac{375}{1000} = \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}; \\ 6,72 &= \frac{672}{100} = \frac{168}{25} = \frac{168}{5^2}; \\ 0,065 &= \frac{65}{1000} = \frac{13 \cdot 5}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{13}{5^2 \cdot 2^3}; \\ 0,034 &= \frac{34}{1000} = \frac{17 \cdot 2}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{17}{5^3 \cdot 2^2}; \\ 17,0 &= \frac{17}{1}. \end{aligned}$$

Заметим, что после сокращения дробей получились знаменатели, которые не имеют других простых делителей, кроме 2 и 5.

Из этих примеров видно, что если конечную десятичную дробь записать в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то её знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Это утверждение доказывается и в общем случае.

Верно и обратное утверждение: если знаменатель q несократимой дроби $\frac{p}{q}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эта дробь разлагается в конечную десятичную дробь.

Например, $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0,8$.

В этом примере числитель и знаменатель дроби мы умножили на 2, чтобы получить в знаменателе 10.

Аналогично поступаем и в следующих примерах:

$$\begin{aligned} \frac{501}{500} &= \frac{501 \cdot 2}{500 \cdot 2} = \frac{1002}{1000} = 1,002; & \frac{3}{40} &= \frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0,075; \\ 17 &= \frac{17}{1} = \frac{170}{10} = 17,0. \end{aligned}$$

Для разложения в конечную десятичную дробь обыкновенной несократимой дроби, знаменатель которой не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, существует два способа.

Один из них был рассмотрен выше, он сводится к умножению числителя и знаменателя дроби $\frac{p}{q}$ на соответствующую степень или числа 2, или числа 5, или числа 10, чтобы в знаменателе получилась степень числа 10.

Вторым способом является известный способ деления числителя на знаменатель уголком. Например, обратим этим способом дробь $\frac{3}{40}$ в десятичную дробь:

$$\begin{array}{r} 3 \quad | 40 \\ \underline{30} \quad 0,075 \\ 300 \\ \underline{280} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

Следовательно, $\frac{3}{40} = 0,075$.

Отметим, что любой из этих способов разложения приводит к одной и той же конечной десятичной дроби.

До сих пор рассматривались десятичные дроби, называемые **конечными десятичными дробями**. Их так называют потому, что в записи после запятой стоит конечное число цифр.

В дальнейшем придётся рассматривать и бесконечные десятичные дроби. В их записи после запятой бесконечно много цифр.

71. Какие делители должен иметь знаменатель обыкновенной несократимой дроби, чтобы она разлагалась в конечную десятичную дробь? Приведите примеры.

72. Какими способами можно разложить обыкновенную дробь в десятичную? Приведите примеры.

73. Какие простые делители содержит знаменатель дроби:

- а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$;
 д) $\frac{1}{128}$; е) $\frac{1}{78}$; ж) $\frac{1}{256}$; з) $\frac{1}{625}$?

74. Найдите несократимые дроби, равные данным:

- а) $\frac{24}{60}$; $\frac{15}{20}$; $\frac{21}{30}$; б) $\frac{65}{100}$; $\frac{94}{100}$; $\frac{8}{1000}$;
 в) $\frac{16}{100}$; $\frac{72}{450}$; $\frac{144}{3600}$; г) $\frac{18}{900}$; $\frac{120}{50}$; $\frac{404}{5050}$.

- 75.** Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной несократимой дроби:
а) 0,4; б) 0,12; в) 0,125; г) 1,2; д) 0,45; е) 0,0018.
- 76.** Запишите дробь в виде дроби, у которой знаменатель является степенью числа 10:
а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{25}$; д) $\frac{11}{20}$; е) $\frac{9}{8}$; ж) 3; з) $\frac{7}{400}$.
- 77.** Разложите данные обыкновенные дроби в десятичные двумя способами: $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{24}{15}$.
- 78.** Разложите данные дроби в десятичные с помощью деления уголком:
а) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{48}{15}$; б) $\frac{3}{2000}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{28}{140}$;
в) $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{56}$, $\frac{6}{24}$; г) $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{5}$;
д) $\frac{3}{25}$, $\frac{12}{75}$, $\frac{17}{200}$; е) $\frac{123}{20}$, $\frac{783}{540}$, $\frac{324}{25}$;
ж) $\frac{625}{125}$, $\frac{860}{400}$, $\frac{33}{60}$; з) $\frac{1024}{256}$, $\frac{804}{400}$, $\frac{624}{120}$.
- 79.** Возможно ли разложение данной дроби в конечную десятичную дробь:
а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{6}{48}$; в) $\frac{7}{352}$; г) $\frac{12}{56}$; д) $\frac{120}{38}$; е) $\frac{12}{96}$?

2.3. Периодические десятичные дроби

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что всякая несократимая дробь $\frac{p}{q}$ разлагается в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда её знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Поэтому если знаменатель несократимой дроби $\frac{p}{q}$ имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не разлагается в конечную десятичную дробь и, применив к ней способ деления уголком, нельзя получить конечную десятичную дробь.

Пример 1. Пусть дано число $\frac{7}{9}$. Это несократимая дробь, и её знаменатель имеет простой делитель 3, т. е. делитель, отличный от 2 и 5. Поэтому число $\frac{7}{9}$ заведомо не разлагается в конечную десятичную дробь.

Оглавление

ГЛАВА 1. Действительные числа

§ 1. Натуральные числа	5
1.1. Натуральные числа и действия с ними	—
1.2. Степень числа	7
1.3. Простые и составные числа	9
1.4. Разложение натуральных чисел на множители	11
§ 2. Рациональные числа	14
2.1. Обыкновенные дроби. Конечные десятичные дроби	—
2.2. Разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь	17
2.3. Периодические десятичные дроби	19
2.4*. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби	22
2.5. Десятичное разложение рациональных чисел	26
§ 3. Действительные числа	29
3.1. Иррациональные числа	—
3.2. Понятие действительного числа	30
3.3. Сравнение действительных чисел	32
3.4. Основные свойства действительных чисел	34
3.5. Приближения чисел	38
3.6. Длина отрезка	42
3.7. Координатная ось	45
Дополнения к главе 1	47
1. Делимость чисел	—
2. Исторические сведения	54

ГЛАВА 2. Алгебраические выражения

§ 4. Одночлены	59
4.1. Числовые выражения	—
4.2. Буквенные выражения	63
4.3. Понятие одночлена	66
4.4. Произведение одночленов	68
4.5. Стандартный вид одночлена	72
4.6. Подобные одночлены	74
§ 5. Многочлены	76
5.1. Понятие многочлена	—
5.2. Свойства многочленов	78
5.3. Многочлены стандартного вида	79
5.4. Сумма и разность многочленов	82
5.5. Произведение одночлена и многочлена	85
5.6. Произведение многочленов	87

5.7. Целые выражения	92
5.8. Числовое значение целого выражения	94
5.9. Тождественное равенство целых выражений	97
§ 6. Формулы сокращённого умножения	100
6.1. Квадрат суммы	—
6.2. Квадрат разности	102
6.3. Выделение полного квадрата	104
6.4. Разность квадратов	107
6.5. Сумма кубов	109
6.6. Разность кубов	111
6.7*. Куб суммы	113
6.8*. Куб разности	114
6.9. Применение формул сокращённого умножения	115
6.10. Разложение многочлена на множители	118
§ 7. Алгебраические дроби	124
7.1. Алгебраические дроби и их свойства	—
7.2. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю	128
7.3. Арифметические действия с алгебраическими дробями	130
7.4. Рациональные выражения	136
7.5. Числовое значение рационального выражения	139
7.6. Тождественное равенство рациональных выражений	144
§ 8. Степень с целым показателем	148
8.1. Понятие степени с целым показателем	—
8.2. Свойства степени с целым показателем	152
8.3. Стандартный вид числа	155
8.4. Преобразование рациональных выражений	157
Дополнения к главе 2	161
1. Делимость многочленов	—
2. Исторические сведения	168

ГЛАВА 3. Линейные уравнения

§ 9. Линейные уравнения с одним неизвестным	171
9.1. Уравнения первой степени с одним неизвестным	—
9.2. Линейные уравнения с одним неизвестным	174
9.3. Решение линейных уравнений с одним неизвестным	177
9.4. Решение задач с помощью линейных уравнений	180
§ 10. Системы линейных уравнений	182
10.1. Уравнения первой степени с двумя неизвестными	—
10.2. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	186
10.3. Способ подстановки	189
10.4. Способ уравнивания коэффициентов	192
10.5. Равносильность уравнений и систем уравнений	195

10.6. Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными	200
10.7*. О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	203
10.8*. Системы уравнений первой степени с тремя неизвестными	206
10.9. Решение задач при помощи систем уравнений первой степени	208
Дополнения к главе 3	216
1. Линейные диофантовы уравнения	—
2. Метод Гаусса	220
3. Исторические сведения	223
Задания для повторения	225
Задания на исследование	269
Задания для самоконтроля	271
Список дополнительной литературы	273
Предметный указатель	275
Ответы	276