

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

7
КЛАСС



БАЗОВЫЙ
УРОВЕНЬ

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник (16-е издание, стереотипное соответствует 15-му, переработанному) допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Авторы:

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 7-й класс : базовый уровень : учебник : издание в pdf-формате / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — 16-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2024. — 255, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-09-116444-2 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-110804-0.

Данный учебник является первой частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены новые по форме задания: задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-116444-2 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-110804-0 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение»,
2013, 2023
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение»,
2013, 2019
Все права защищены



Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый учебный предмет — *алгебру*, являющуюся одним из важнейших разделов математики.

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов решения разнообразных задач. Алгебра используется в современном мире очень широко: в физике, биологии, экономике, информатике, архитектуре и др.

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы научились выполнять различные действия с целыми числами и дробями, находить корни уравнений, решать текстовые задачи. В 7 классе вы узнаете ещё много нового. Вы научитесь выполнять различные тождественные преобразования: сложение, вычитание и умножение многочленов, разложение многочленов на множители и многое другое. Это даст вам возможность решать разнообразные задачи. Впервые вы узнаете о способах решения систем уравнений с двумя переменными. Теперь вы сможете решать текстовые задачи, используя не только уравнения с одной переменной, но и системы уравнений с двумя переменными. Вы познакомитесь со свойствами некоторых функций, научитесь строить их графики. Знания и умения, приобретённые на уроках алгебры в 7 классе, помогут вам при изучении многих школьных предметов: геометрии, информатики, физики, химии и др.

Надеемся, что, занимаясь по этому учебнику, вы полюбите новый учебный предмет — алгебру. Для этого прежде всего написанное в нём должно быть понятно. Поэтому в объяснительных текстах подробно излагается новый материал, приводятся решения различных задач. Они помогут вам разобраться в изучаемых приёмах преобразования выражений, решения уравнений, построения графиков функций и др. Материал, который нужно запомнить,

печатается на цветном фоне, чтобы вы обратили на него внимание. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса математики 5—6 классов». Контрольные вопросы и задания, помещённые в конце каждого параграфа, позволяют вам задуматься о сути изученного материала.

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что вы примете активное участие в выполнении упражнений под названием «задача-исследование», рассчитанных на коллективное обсуждение приёмов решения, а также заданий, предназначенных для работы в парах. Выполняя такие задания, вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей и отстаивать свою позицию.

Если вы интересуетесь математикой, то ваше внимание, безусловно, привлечёт материал рубрики «Для тех, кто хочет знать больше», помещённый в конце каждой главы. Специально для ребят, находящих радость в решении непростых задач, в учебнике помещены «Задачи повышенной трудности».

Конечно, многим из вас любопытно узнать, как и почему зарождался и затем развивался тот или иной раздел алгебры. Для ответа на эти вопросы в учебнике даются «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении нового интересного предмета — алгебры!

В учебнике используются следующие условные обозначения:



— материал, который важно знать



— текст, который нужно запомнить



— начало решения задачи



— окончание решения задачи



— начало обоснования утверждения или вывода формулы



— окончание обоснования утверждения или вывода формулы

19.

— задание обязательного уровня

201.

— задание повышенной трудности



— упражнения для повторения



Глава I ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

В этой главе повторяются начальные сведения из курса алгебры, с которыми вы познакомились в 5—6 классах. Вам уже приходилось находить значения выражений с переменными, сравнивать их, решать уравнения, применять их при решении несложных задач. Теперь эти знания и умения будут расширены. Вы узнаете, что называется тождеством, тождественным преобразованием, научитесь выполнять тождественные преобразования выражений с переменными и применять их при решении уравнений. Расширится круг задач, которые вы сможете решать с помощью уравнений.

§ 1 ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

1. Рациональные числа

В курсе математики вы встречались с различными видами чисел. Числа 1, 2, 3, ..., которые используют при счёте, называют натуральными числами. Они образуют *множество натуральных чисел*. *Натуральные числа, противоположные им числа и число нуль составляют множество целых чисел.*

Кроме целых, вам известны *дробные числа* (положительные и отрицательные). *Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел.*

- Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой N (от первой буквы латинского слова *naturalis* — естественный, природный),
- множество целых чисел — буквой Z (от первой буквы немецкого слова *Zahl* — число),
- множество рациональных чисел — буквой Q (от первой буквы французского слова *quotient* — отношение).

Напомним, что в математике словом «множество» принято называть любую совокупность объектов, объединённых каким-либо общим признаком. Например, можно говорить о множестве людей — граждан РФ, о множестве символов, используемых для записи математических выражений, о множестве окружностей с центром в данной точке. Но мы сейчас будем рассматривать *числовые множества*.

Для того чтобы записать, что какое-либо число принадлежит некоторому множеству, используют знак $\in$. Например, утверждение, что число 2 является натуральным (т. е. что число 2 принадлежит множеству натуральных чисел), можно записать так: $2 \in N$. А то, что число -2 не является натуральным, можно записать так: $-2 \notin N$.

Если каждый элемент множества B является элементом множества A , то множество B называют *подмножеством* множества A . Это записывают так: $B \subset A$.

Так, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $N \subset Z$. Точно так же множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел: $Z \subset Q$. Имеем цепочку включений: $N \subset Z \subset Q$.

Соотношения между множествами принято иллюстрировать с помощью специальных схем, называемых кругами Эйлера. На рисунке 1, а изображено соотношение $B \subset A$. Здесь видно, что все точки круга B принадлежат и кругу A . А на рисунке 1, б проиллюстрировано соотношение между множествами N , Z и Q .

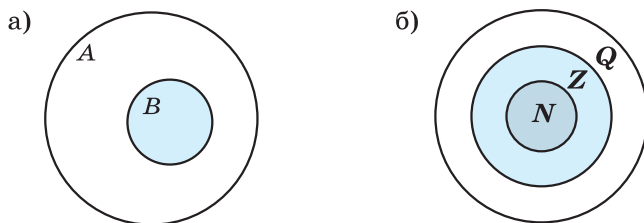


Рис. 1

Всякое рациональное число, как целое, так и дробное, можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами.

Например, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{40}{80}$; $-0,7 = \frac{-7}{10} = \frac{-14}{20}$; $10,3 = \frac{103}{10} = \frac{515}{50}$; $5 = \frac{5}{1} = \frac{20}{4}$.

Среди дробей, с помощью которых записывается данное рациональное число, всегда можно указать дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь несократима. Для целых чисел такая дробь имеет знаменатель, равный 1.

Термин «рациональное число» произошёл от латинского слова *ratio*, что в переводе означает «отношение» (частное).

Рассмотрим вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Представим в виде десятичной дроби число $\frac{1}{8}$. Для этого разделим числитель дроби на её знаменатель. Получим

$$\begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \hline 10 & 0,125 \\ -8 & \\ \hline 20 & \\ -16 & \\ \hline 40 & \\ -40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{1}{8} = 0,125$.

Точно так же можно показать, что $1\frac{3}{20} = 1,15$; $-\frac{1}{40} = -0,025$.

Применим теперь этот способ обращения обыкновенной дроби в десятичную к числу $\frac{8}{37}$. Делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 37 \\ \hline 80 & 0,216216 \\ -74 & \\ \hline 60 & \\ -37 & \\ \hline 230 & \\ -222 & \\ \hline 80 & \\ -74 & \\ \hline 60 & \\ -37 & \\ \hline 230 & \\ -222 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

Первым остатком, полученным при делении, является само число 8. Второй остаток равен 6, третий равен 23. Затем опять получили в остатке 8. Продолжая деление, мы, как и раньше, приписываем к остаткам нули. Поэтому следующим остатком снова будет 6, потом 23, и снова остаток 8 и т. д. Сколько бы мы ни продолжали деление, мы не получим в остатке 0. Значит, деление никогда не закончится.

Говорят, что дробь $\frac{8}{37}$ обращается в *бесконечную десятичную дробь* 0,216216...:

$$\frac{8}{37} = 0,216216\dots$$

Так как при делении числителя 8 на знаменатель 37 последовательно повторяются остатки 8, 6 и 23, то в частном в одном и том же порядке будут повторяться три цифры: 2, 1, 6. Бесконечные десятичные дроби такого вида называют *периодическими*. Повторяющаяся группа цифр составляет *период дроби*. При записи периодических десятичных дробей период пишут один раз, заключая его в круглые скобки:

$$\frac{8}{37} = 0,(216).$$

Эта запись читается так: ноль целых, двести шестнадцать в периоде.

Число $\frac{7}{12}$ также записывается в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\frac{7}{12} = 0,5833\dots = 0,58(3).$$

Эта запись читается так: ноль целых, пятьдесят восемь сотых, три в периоде.

Точно так же можно показать, что

$$5\frac{1}{6} = 5,1(6), \quad -\frac{5}{11} = -0,(45).$$

Вообще каждое дробное число можно представить либо в виде десятичной дроби (конечной десятичной дроби), либо в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби, приписав справа в качестве десятичных знаков бесконечную последовательность нулей. Например:

$$2,5 = 2,5000\dots; \quad -3 = -3,000\dots$$

Таким образом,

каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Верно и обратное утверждение:

каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Например, $0,(3) = \frac{1}{3}$; $2,(36) = 2\frac{4}{11}$; $0,0(945) = \frac{7}{74}$.

Эти равенства легко проверить, выполнив деление.

Разные бесконечные десятичные периодические дроби представляют разные рациональные числа. Исключением являются дроби с периодом 9, которые считают другой записью дробей с периодом 0:

$$0,(9) = 0,999... = 1,000... = 1;$$

$$16,1(9) = 16,1999... = 16,2000... = 16,2.$$

Бесконечные десятичные дроби с периодом 9 заменяют дроби с периодом 0. Заметим, что при обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9.

Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает «отрицание»). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Приведём примеры иррациональных чисел:

3,010010001... (единицы разделяются последовательно одним, двумя, тремя и т. д. нулями);

–5,020022000222... (число нулей и число двоек каждый раз увеличивается на единицу).

Иррациональным числом является число π , выражающее отношение длины окружности к её диаметру:

$$\pi = 3,1415926... .$$

Множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел составляют множество действительных чисел.

Более подробно о действительных числах вы узнаете в 8 классе. В курсе алгебры 7 класса все действия мы будем выполнять только с рациональными числами.

Упражнения

1. Верно ли, что:

а) $-4 \in \mathbb{N}$; $-4 \in \mathbb{Z}$; $-4 \in \mathbb{Q}$;

в) $28 \in \mathbb{N}$; $28 \in \mathbb{Z}$; $28 \in \mathbb{Q}$?

б) $5,6 \notin \mathbb{N}$; $5,6 \in \mathbb{Z}$; $5,6 \in \mathbb{Q}$;

2. Какое из множеств (A или B) является подмножеством другого:
 а) A — множество чётных чисел, B — множество чисел, кратных 4;
 б) A — множество делителей числа 12, B — множество делителей числа 60;
 в) A — множество треугольников, B — множество прямоугольных треугольников?
3. Представьте в виде отношения целого числа к натуральному несколькими способами числа $1\frac{2}{5}$; $0,3$; $-3\frac{1}{4}$; -27 ; 0 .
4. Представьте в виде дроби с наименьшим натуральным знаменателем числа 36 ; -45 ; $4,2$; $-0,8$; $15\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{9}$.
5. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:
 а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{7}$; д) $-\frac{8}{15}$; ж) -17 ; и) $-1\frac{3}{40}$;
 б) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{20}{9}$; е) $10,28$; з) $\frac{3}{16}$; к) $2\frac{7}{11}$.
6. Сравните рациональные числа:
 а) $0,013$ и $0,1004$; ж) $-2,005$ и $-2,04$;
 б) -24 и $0,003$; з) $-1\frac{3}{4}$ и $-1,75$;
 в) $-3,24$ и $-3,42$; и) $0,437$ и $\frac{7}{16}$;
 г) $\frac{3}{8}$ и $0,375$; к) $-\frac{1}{8}$ и $-0,13$;
 д) $-1,174$ и $-1\frac{7}{40}$; л) $1,37$ и $1,(37)$;
 е) $\frac{10}{11}$ и $\frac{11}{12}$; м) $-5,(34)$ и $-5,34$.
7. Укажите какое-либо число, которое:
 а) больше $\frac{1}{8}$, но меньше $\frac{1}{7}$; б) больше $\frac{1}{6}$, но меньше $\frac{1}{5}$.
8. Укажите несколько чисел, заключённых между:
 а) 10 и $10,1$; в) -1001 и -1000 ;
 б) $-0,001$ и 0 ; г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.
9. Запишите пять чисел, заключённых между числами:
 а) $1,3$ и $1,4$; в) $-10\,000$ и -1000 ;
 б) 5 и $5\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$.



10. Найдите:

а) $|x|$, если $x = 10$; 0,3; 0; -2,7; -9; б) x , если $|x| = 6$; 3,2; 0.

11. Запишите без знака модуля:

а) $|a|$, где $a > 0$; в) $|2b|$, где $b < 0$; д) $|y - 3|$, где $y < 3$.
б) $|c|$, где $c < 0$; г) $|x - 5|$, где $x > 5$;

12. Среди чисел 1458; 1805; 2342; 3620; 89217; 364425 найдите и выпишите те, которые: а) делятся на 2; б) кратны 9; в) делятся на 5, но не кратны 3.

13. Разложите на простые множители:

а) 66; б) 1200; в) 5460; г) 1001.

2. Числовые выражения

Решим задачу:

«Туристы в течение двух часов ехали на велосипедах по шоссе со скоростью 16 км/ч, а затем шли лесом ещё 7 км. Какова длина всего маршрута?»

По шоссе туристы проехали $16 \cdot 2$ (км), а лесом прошли 7 км. Поэтому длина всего маршрута равна $(16 \cdot 2 + 7)$ (км), т. е. 39 км.

Решая задачу, мы получили *числовое выражение* $16 \cdot 2 + 7$.

Числовые выражения составляются из чисел с помощью знаков действий и скобок. Приведём ещё примеры числовых выражений: $43 : 5$; $9,6 - 3 \cdot 1,2$; $5 \cdot (7,4 - 6,1)$.

Число, которое получается в результате выполнения действий в числовом выражении, называют *значением выражения*.

Найдём, например, значение выражения $12 \cdot 6 - 35 : 7$. Для этого мы должны, соблюдая принятый порядок действий, выполнить сначала умножение и деление, а затем вычитание:

1) $12 \cdot 6 = 72$; 2) $35 : 7 = 5$; 3) $72 - 5 = 67$.

Число 67 — значение выражения $12 \cdot 6 - 35 : 7$.

Если в выражении есть деление на ноль, то выражение не имеет числового значения, так как на ноль делить нельзя. О таких выражениях говорят, что они не имеют смысла.

Например, не имеют смысла выражения $35 : (4 \cdot 2 - 8)$, $\frac{1}{12 + 4 \cdot (-3)}$.

Упражнения

14. Найдите значение выражения:

- а) $6,965 + 23,3$; г) $6,5 \cdot 1,22$; ж) $53,4 : 15$;
б) $50,4 - 6,98$; д) $0,48 \cdot 2,5$; з) $16,94 : 2,8$;
в) $88 - 9,804$; е) $0,016 \cdot 0,25$; и) $75 : 1,25$.

15. Выполните действия:

- а) $481,92 : 12 - 20,16$; б) $1,08 \cdot 30,5 - 9,72 : 2,4$.

16. Найдите значение выражения:

- а) $3,6 : 0,08 + 5,2 \cdot 2,5$; б) $(9,885 - 0,365) : 1,7 + 4,4$.

17. Выполните действие:

- а) $\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$; д) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$; ж) $2\frac{6}{7} : 1\frac{3}{7}$;
б) $\frac{7}{8} - \frac{5}{6}$; г) $5 - 3\frac{2}{7}$; е) $\frac{5}{8} : \frac{9}{10}$; з) $6\frac{3}{5} \cdot 10$.

18. Выполните действие:

- а) $4,2 - 8$; г) $1,2 \cdot (-5)$; ж) $38 : (-0,19)$;
б) $-2,4 + 5,6$; д) $-8 \cdot 4,5$; з) $-16 : 0,2$;
в) $-2,1 - 3,2$; е) $-0,9 \cdot (-0,1)$; и) $-6,4 : (-8)$.

19. Вычислите:

- а) $6\frac{1}{3} - 8$; г) $\frac{3}{8} : \left(-\frac{9}{16}\right)$; ж) $\frac{4}{7} \cdot (-49)$;
б) $-2\frac{2}{7} + 4\frac{3}{5}$; д) $\frac{5}{12} \cdot (-6)$; з) $-16 : \left(-\frac{4}{9}\right)$;
в) $5\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4}$; е) $-3\frac{2}{9} \cdot 3$; и) $-3\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$.

20. Запишите проценты в виде десятичной дроби: 1%; 5%; 7%; 10%; 20%; 25%; 36%; 50%; 75%; 100%; 138%; 263%; 0,2%; 0,43%.

21. Представьте дроби в виде процентов: 0,01; 0,04; 0,23; 1,17; 2,78; 4,5; 0,005; 0,9971; 1,369; 2,2785; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{20}$.

22. Найдите:

- а) 1% числа 240; г) 9,5% числа 280;
б) 40% числа 15; д) число, 30% которого равны 18;
в) 120% числа 8; е) число, 125% которого равны 550.

23. На пакете молока написано, что в молоке содержится 3,2% жира, 2,5% белка и 4,7% углеводов. Сколько граммов каждого из этих веществ содержится в стакане (200 г) молока?

24. В фермерском хозяйстве собирали по 36 ц пшеницы с гектара. Применение интенсивной технологии позволило увеличить производство пшеницы на той же площади на 25%. Сколько центнеров пшеницы стали собирать с 1 га в этом фермерском хозяйстве?

25. За несколько книг уплатили 320 р. Стоимости двух из этих книг составили соответственно 30% и 45% израсходованных денег. На сколько рублей одна из этих книг дешевле другой?

26. Используя три раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно: а) 6; б) 8; в) 3; г) 1.

27. Составьте выражение, содержащее два знака действия, значение которого равно: а) 12; б) 0.

28. Какое из выражений не имеет смысла?

1. $\frac{2,6 - 13 \cdot 0,2}{8}$

2. $\frac{0,57}{0,8 - 0,4 \cdot 2}$

3. $(1,7 \cdot 2 - 3,4) : 11$

29. Составьте какое-либо выражение, не имеющее смысла.

30. Составьте выражение для решения задачи: «Из двух населённых пунктов, расстояние между которыми 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Какое расстояние будет между ними через 3 ч, если известно, что скорость одного пешехода 4 км/ч, а скорость другого — 5 км/ч?»

31. Решите задачу, составив выражение: «Один рабочий изготавливает за час 7 деталей, а другой — 9 деталей. Сколько деталей они изготовят за 4 ч?»

32. Используя термины «сумма», «разность», «произведение» и «частное», прочитайте выражение:

а) $8,5 - 7,3$;

д) $2 \cdot 9,5 + 14$;

и) $2,5 - (3,2 + 1,8)$;

б) $4,7 \cdot 12,3$;

е) $(10 - 2,7) : 5$;

к) $(5,74 - 1,24) \cdot 3,6$;

в) $65 : 1,3$;

ж) $6,1 \cdot (8,4 : 4)$;

л) $8 - (1,71 + 0,19)$;

г) $5,6 + 0,9$;

з) $(6,4 + 7) : 2$;

м) $0,36 : 0,3 - 1,78$.

33. (Задача-исследование.) Из 36 учащихся класса каждый изучает хотя бы один иностранный язык — английский или немецкий. Известно, что 25 учащихся изучают английский язык, а 20 учащихся — немецкий язык.

1) Укажите число учащихся, изучающих хотя бы один из этих языков.

2) Вычислите число учащихся, изучающих оба языка — английский и немецкий.

3) Найдите, сколько процентов учащихся изучают оба языка.



34. У Ивана в социальной сети 24 подписчика. Из них $\frac{2}{3}$ слушают современную музыку, а остальные предпочитают классическую музыку. Сколько подписчиков Ивана слушают классическую музыку?
35. Новый спектакль посетили 24 семиклассника, что составило $\frac{2}{3}$ всех обучающихся в параллели седьмых классов. Сколько всего человек учится в этой параллели?
36. В июле семья Иванушкиных израсходовала 250 кВт·ч, а в следующем месяце они уехали отдыхать, поэтому расход электроэнергии в августе уменьшился на 80%. В сентябре семья вернулась, но в связи с наступлением холодной погоды пришлось включать обогреватель, что увеличило расход электроэнергии на 620% по сравнению с августом. Постройте столбчатую диаграмму расхода электроэнергии семьёй Иванушкиных.

3. Выражения с переменными

Двигаясь со скоростью 60 км/ч, автомобиль за 2 ч пройдёт $60 \cdot 2$ км, за 3 ч — $60 \cdot 3$ км, за 5 ч — $60 \cdot 5$ км, за 5,5 ч — $60 \cdot 5,5$ км. Вообще за t ч он пройдёт $60t$ км. Изменяя значение t , мы можем с помощью выражения $60t$ находить путь, пройденный автомобилем за разные промежутки времени. Для этого достаточно вместо буквы t подставить её значение и выполнить умножение. Букву t в выражении $60t$ называют *переменной*, а само выражение $60t$ — *выражением с переменной*.

Приведём ещё пример. Пусть длины сторон прямоугольника равны a см и b см. Тогда его площадь равна ab см². Выражение ab содержит две переменные a и b . Оно показывает, как находить площадь прямоугольника при различных значениях a и b . Например:

если $a = 8$ и $b = 11$, то $ab = 8 \cdot 11 = 88$;
если $a = 25$ и $b = 4$, то $ab = 25 \cdot 4 = 100$.

Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо её значение, то получится числовое выражение. Его значение называют *значением выражения с переменными* при выбранных значениях переменных.

Так, число 88 есть значение выражения ab при $a = 8$ и $b = 11$, число 100 есть значение этого выражения при $a = 25$ и $b = 4$.

Рассмотрим выражение $\frac{b}{b-3}$. При любом $b \neq 3$ можно найти его значение. Например, если $b = 13$, то $\frac{b}{b-3} = \frac{13}{13-3} = \frac{13}{10} = 1,3$.

При $b = 3$ значение этого выражения найти нельзя, так как в этом случае делитель $b - 3$ равен нулю. Говорят, что при $b = 3$ выражение *не имеет смысла*.

Некоторые выражения имеют смысл при всех значениях переменных. Примерами могут служить выражения

$$x(x+1), \quad ay-4, \quad \frac{a^2-10}{3}.$$

Выражения с переменными используются для записи *формул*.

Рассмотрим примеры.

Любое чётное число m можно представить в виде произведения числа 2 и целого числа n , т. е.

$$m = 2n.$$

Если в эту формулу вместо n подставлять целые числа, то значениями переменной m будут чётные числа. Формулу $m = 2n$ называют *формулой чётного числа*.

Формулу $m = 2n + 1$, где n — целое число, называют *формулой нечётного числа*.

Точно так же можно записать формулу числа, кратного любому другому натуральному числу.

Например, формулу числа, кратного 3, можно записать так: $m = 3n$, где n — целое число.

Упражнения

37. Найдите значения выражения:

- а) $4x - 12$ при $x = 7$; 0; -5 ;
б) $2,8 - 0,5y$ при $y = 3$; 0; -6 .

38. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните её, вычислив значения выражений $3x - 1$ и $-3x + 1$ для указанных значений x .

x	-2	-1	0	1	2	4	5
$3x - 1$							
$-3x + 1$							

Какими числами являются соответственные значения выражений $3x - 1$ и $-3x + 1$?

- 39.** Найдите значения выражений $10 - 2y$ и $10 + 2y$ и запишите их в соответствующие клетки таблицы, перечертив её в тетрадь.

y	-3	-1	0	2	3	4	6
$10 - 2y$							
$10 + 2y$							

- 40.** Какие значения принимают сумма $x + y$ и произведение xy при следующих значениях переменных:

- а) $x = 1,2$, $y = -2,5$; в) $x = 0,1$, $y = 0,2$;
 б) $x = -0,8$, $y = 3$; г) $x = -1,4$, $y = -1,6$?

- 41.** Найдите значение выражения $5m - 3n$, если:

- а) $m = -\frac{2}{5}$, $n = \frac{2}{3}$; б) $m = 0,2$, $n = -1,4$.

- 42.** Вычислите значение выражения $\frac{1}{2}x - y$, если:

- а) $x = 2,4$, $y = 0,8$; в) $x = 4,8$, $y = -2,1$;
 б) $x = -3,6$, $y = 5$; г) $x = -4,4$, $y = -3$.

- 43.** Перечертите в тетрадь и заполните таблицу, вычислив значения выражения $a - 2b$.

a	5	-2	4	1	6
b	-3	3	0	-1	4
$a - 2b$					

- 44.** Известно, что при некоторых значениях x и y значение выражения $x - y$ равно 0,7. Какое значение принимает при тех же x и y выражение: а) $5(x - y)$; б) $y - x$; в) $\frac{1}{x - y}$; г) $\frac{x - y}{y - x}$?

- 45.** Известно, что при некоторых значениях a и b значение выражения $a - b$ равно 4. Чему равно при тех же a и b выражение $\frac{12}{b - a} + \frac{16}{(b - a)^2}$? Выберите верный ответ.
 1. -2 2. 2 3. -4 4. 4

- 46.** Вычислите значение выражения:

- а) $ax - 3y$ при $a = 10$, $x = -5$, $y = -\frac{1}{3}$;
 б) $ax + bx + c$ при $a = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $b = -3$, $c = 5,8$.

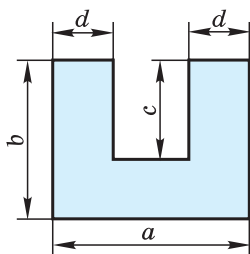


Рис. 2

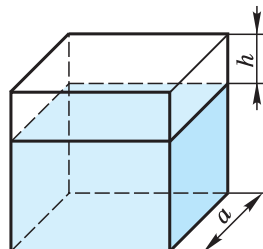
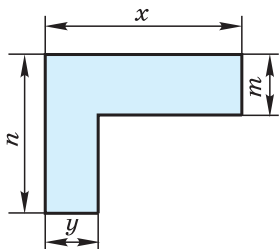


Рис. 3

47. Опытное поле разбили на два участка. Площадь первого участка a га, а второго — b га. С каждого гектара первого участка собрали 32 ц пшеницы, а с каждого гектара второго участка собрали 40 ц. Сколько пшеницы собрали с обоих участков? Вычислите при $a = 120$ и $b = 80$.
48. На стройке работало 5 бригад, по a человек в каждой, и 3 бригады, по b человек в каждой. Сколько человек работало на стройке? Вычислите при $a = 25$ и $b = 32$.
49. На рисунке 2 указаны длины отрезков (в сантиметрах). Для каждой фигуры составьте выражение для вычисления её площади (в квадратных сантиметрах).
50. Ребро куба равно a м. От этого куба отрезан прямоугольный параллелепипед, высота которого равна h м (рис. 3). Найдите объём оставшейся части.
51. В 250 г водного раствора соли содержалось x г соли. Какой стала концентрация раствора после добавления в него 5 г соли? Выберите верный ответ.
1. $\frac{x}{250} \cdot 100\%$
 2. $\frac{x+5}{250} \cdot 100\%$
 3. $\frac{x}{255} \cdot 100\%$
 4. $\frac{x+5}{255} \cdot 100\%$
52. В сплаве олова и свинца массой 20 кг содержалось x кг олова. Каким стало процентное содержание олова в сплаве после добавления в него 2 кг олова?
53. Длина прямоугольника a см, ширина b см. Что означает выражение:
- а) ab ;
 - б) $2a + 2b$;
 - в) $a + b$;
 - г) $2a$?
54. Тетрадь стоит x р., а карандаш стоит y р. Что означает выражение:
- а) $x + y$;
 - б) $3x + y$;
 - в) $2x + 3y$;
 - г) $\frac{x}{y}$?

55. Прочитайте, пользуясь терминами «сумма», «разность», «произведение» и «частное», выражение:
- а) mx ; в) $(a + 5)x$; д) $2x + 1$; ж) $ab + bc$;
 б) $10 + ab$; г) $m - 8a$; е) $\frac{a}{b} + c$; з) $(a - b)(a + b)$.
56. Запишите в виде выражения:
- а) сумму чисел b и c ;
 б) разность чисел a и m ;
 в) квадрат числа x ;
 г) куб числа y ;
 д) сумму числа x и произведения чисел a и b ;
 е) разность числа m и частного чисел x и y ;
 ж) произведение суммы чисел a и b и числа c ;
 з) произведение числа a и суммы чисел x и y .
57. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
- а) $5y + 2$; б) $\frac{18}{y}$; в) $\frac{1}{x - 7}$; г) $\frac{m - 1}{4}$; д) $\frac{7a}{3 + a}$; е) $\frac{2b}{10 - b}$?
58. Какое из выражений $\frac{14}{a^2}$, $\frac{14}{a^2 + 1}$ или $\frac{14}{a^2 - 1}$ имеет смысл при любом значении a ?
59. Составьте формулу числа:
- а) кратного 5; б) кратного 10; в) кратного 101.
60. Напишите формулу числа, кратного 7. Найдите по этой формуле два трёхзначных числа, кратных 7.
61. (Для работы в парах.) Докажите, что всякое простое число, начиная с 5, либо увеличенное, либо уменьшенное на 1, делится на 6.
- 1) Проверьте утверждение на примерах. Одному учащемуся рекомендуем взять простые числа из третьего десятка, другому — из седьмого десятка.
- 2) Обсудите друг с другом, из чего следует справедливость указанного свойства.
- 3) Проведите доказательство.
62. Найдите число, если известно, что:
- а) 3% этого числа равны 1,8;
 б) 85% этого числа равны 17;
 в) 130% этого числа равны 3,9;
 г) 6,2% этого числа равны 9,3.
63. После того как из бидона отлили 30% молока, в нём осталось 14 л. Сколько литров молока было в бидоне первоначально?



64. Перевыполнив план на 15%, завод выпустил за месяц 230 станков. Сколько станков нужно было выпустить за месяц по плану?
65. На выборах голоса за двух кандидатов распределились в отношении 5:7. Всего в голосовании приняли участие 252 человека. Сколько голосов набрал победитель?

4. Сравнение значений выражений

Решим задачу: «Пшеницей засеяли два опытных участка площадью 48 га и 60 га. С первого участка собрали 1800 ц пшеницы, а со второго — 2100 ц. На каком участке урожайность выше?»

Урожайность выражается частным от деления массы пшеницы, собранной с участка, на площадь участка. Чтобы узнать, на каком участке урожайность выше, надо сравнить значения выражений $1800 : 48$ и $2100 : 60$. Так как $1800 : 48 = 37,5$ и $2100 : 60 = 35$, то урожайность выше на первом участке.

Для любых двух числовых выражений можно установить, равны их значения или нет, и если они не равны, то какое из них больше и какое меньше.

Результат сравнения значений выражений можно записать в виде равенства или неравенства. Например, результат сравнения частных $1800 : 48$ и $2100 : 60$ можно записать в виде неравенства

$$1800 : 48 > 2100 : 60.$$

Если выражения содержат переменные, то для разных значений переменных результат сравнения значений этих выражений может оказаться различным. Сравним, например, значения выражений $2a$ и $a + 4$ при $a = 0$; 4; 10.

Если $a = 0$, то $2a = 0$ и $a + 4 = 4$, т. е. при $a = 0$ верно неравенство $2a < a + 4$.

Если $a = 4$, то $2a = 8$ и $a + 4 = 8$, т. е. при $a = 4$ верно равенство $2a = a + 4$.

Если $a = 10$, то $2a = 20$ и $a + 4 = 14$, т. е. при $a = 10$ верно неравенство $2a > a + 4$.

Иногда требуется установить, между какими числами заключено значение выражения.

Рассмотрим пример. Пусть при взвешивании металлического шарика установили, что его масса больше 86 г, но меньше 87 г. Обозначим массу шарика (в граммах) буквой m . Тогда результат взвешивания можно записать так: $m > 86$ и $m < 87$ — или иначе: $86 < m$ и $m < 87$.

Два неравенства $86 < m$ и $m < 87$ можно записать в виде двойного неравенства

$$86 < m < 87.$$

Неравенство $86 < m < 87$ читают так: « m больше 86 и меньше 87».

Рассмотрим ещё один пример. Число дней в месяце меньше 31 или равно 31. Обозначим число дней в месяце буквой n . Тогда

$$n < 31 \text{ или } n = 31.$$

Вместо этой записи обычно пишут одно неравенство

$$n \leq 31$$

(читают: « n меньше или равно 31»).

Число дней в месяце больше или равно 28:

$$n > 28 \text{ или } n = 28.$$

В таких случаях также пишут короче:

$$n \geq 28$$

(читают: « n больше или равно 28»).

Так как $n \geq 28$, то $28 \leq n$.

Два неравенства $28 \leq n$ и $n \leq 31$ можно записать в виде двойного неравенства

$$28 \leq n \leq 31.$$

Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ и $<$, называют *строгими неравенствами*, а неравенства, составленные с помощью знаков $\geq$ и $\leq$, называют *нестрогими*.

Упражнения

66. Сравните значения выражений:

- а) $2,06 \cdot 3,05$ и $21,28 : 3,5$; в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;
б) $97,2 : 2,4$ и $62 - 21,6$; г) $16 - 3\frac{5}{8}$ и $15 - 2\frac{1}{4}$.

67. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

- а) $56 \cdot \frac{2}{7}$ и $56 : \frac{7}{2}$; в) $2,1 - 5,8$ и $2,1 - 1,7$;
б) $9 : 0,6$ и $9 \cdot 0,6$; г) $6,13 - 7,57$ и $-6,13 + 7,57$.

68. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

- а) $6,16 - 7,44$ и $7,23 + 8,11$; в) $5,7 - 3,11$ и $5,7 - 2,16$;
б) $24,12 \cdot \frac{1}{4}$ и $24,12 : \frac{1}{4}$; г) $65,4 \cdot \frac{5}{6}$ и $65,4 : \frac{5}{6}$.

69. Сравните значения выражений:

- а) $0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9$ и $0,7 + 0,8 - 0,9$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ и $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$.

70. Сравните значения выражений:

- а) $9,5 - a$ и $0,5a$ при $a = 3,8$; 0; 5;
б) $3 - c$ и $4c - 5$ при $c = 1,6$; -3 ; -6 .

71. Сравните значения выражений:

- а) x и $-x$ при $x = 8$; 0; -3 ; б) x и $100x$ при $x = 5$; 0; -5 .

72. Сравните значения выражений:

- а) $5m - 0,8$ и $0,8m - 5$ при $m = -1$;
б) ab и $a : b$ при $a = 4,6$, $b = 0,23$.

73. Верно ли неравенство $2x + 5 < 3x$ при $x = 4,2$; 5; 6,5?

74. Прочитайте неравенство:

- а) $8,1 < 8,14 < 8,6$; г) $-40 < -38,7 < -30$;
б) $9 < 9,865 < 10$; д) $1\frac{3}{5} < 1,7 < 1\frac{4}{5}$;
в) $-900 < -839 < -800$; е) $2,42 < 2\frac{3}{7} < 2,43$.

75. Запишите в виде двойного неравенства:

- а) 8 меньше 13 и 13 меньше 15;
б) 4,1 меньше 4,18 и 4,18 меньше 4,2;
в) 63,5 больше 63 и меньше 64;
г) $-8,1$ больше -11 и меньше -7 ;
д) a больше 1,8 и меньше 2,8;
е) x больше a и меньше b .

76. Подберите какое-нибудь число, заключённое между числами:

- а) 8,6 и 8,7; б) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$; в) $-3,6$ и $-3,7$; г) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.

Результат запишите в виде двойного неравенства.

77. Запишите в виде двойного неравенства:

- а) 0,79 больше 0,7 и меньше 0,8;
б) $6\frac{4}{5}$ больше 6 и меньше 7;
в) $-4,6$ больше -10 и меньше 0;
г) m больше -16 и меньше -15 ;
д) k больше 2,65 и меньше 2,66;
е) y больше m и меньше n .

78. На координатной прямой точками отмечены числа a , b и c (рис. 4). Укажите для каждой точки соответствующее ей число, если известно, что $a > b$ и $c > a$. Составьте из чисел a , b и c двойное неравенство с помощью знака $<$.



Рис. 4

79. Прочитайте неравенство:

- а) $7,3 \leq x$; г) $k \leq 0,5$; ж) $-5 \leq a < -2$;
б) $y \geq 0,83$; д) $4,4 \leq n \leq 6,1$; з) $x \leq b \leq y$.
в) $a \geq -10,4$; е) $7,6 \leq m \leq 20,8$;

80. Верно ли неравенство:

- а) $x \leq 5,3$ при $x = 2,7; 5,3; 6$;
б) $y \geq 4,8$ при $y = 3,5; 4,8; 7,1$;
в) $0,6 < x \leq 0,8$ при $x = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$;
г) $2,1 \leq y \leq 2,4$ при $y = 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5$?

81. Запишите с помощью знаков неравенства:

- а) x меньше или равно 8;
б) y больше или равно 0;
в) a больше 5 и меньше или равно 7;
г) b больше или равно -2 и меньше 1.

82. Запишите в виде неравенства:

- а) x — отрицательное число;
б) m — положительное число;
в) y — неотрицательное число;
г) z — неположительное число.

83. Запишите в виде двойного неравенства:

- а) x больше или равно 11 и меньше 12;
б) y больше 50 и меньше или равно 100;
в) a больше 350 и меньше 400;
г) b больше или равно -100 и меньше или равно -10 .

84. Один автомобиль проехал 700 км за x ч, а другой автомобиль проехал 630 км за y ч. Сравните средние скорости автомобилей, если:

- а) $x = 12,5$, $y = 10,5$; б) $x = y = 14$.



85. Сколько процентов составляет:

- а) число 8 от числа 200; б) число 2,1 от числа 14?

86. В результате рационализации производства удалось сократить число рабочих на комбинате. Вместо 1600 их осталось 1200. На сколько процентов сократилось число рабочих?

87. Найдите значение выражения:

- а) $37,6 - 5,84 + 3,95 - 8,9$; в) $17,1 \cdot 3,8 : 4,5 \cdot 0,5$;
б) $81 - 45,34 + 19,6 + 21,75$; г) $81,9 : 4,5 : 0,28 \cdot 1,2$.

88. Запишите в виде выражения:

- а) сумму числа x и произведения чисел a и b ;
б) частное от деления числа a на разность чисел b и c ;
в) произведение суммы чисел x и a и разности чисел x и b .

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

§ 1. ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ	5
1. Рациональные числа	—
2. Числовые выражения	11
3. Выражения с переменными	14
4. Сравнение значений выражений	19
§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ	23
5. Свойства действий над числами	—
6. Тождества. Тождественные преобразования выражений ...	26
§ 3. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	32
7. Уравнение и его корни	—
8. Линейное уравнение с одной переменной	34
9. Решение задач с помощью уравнений	38
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
10. Формулы	42
Дополнительные упражнения к главе I	45

ГЛАВА II. ФУНКЦИИ

§ 4. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ	51
11. Числовые промежутки	—
12. Что такое функция	54
13. Вычисление значений функции по формуле	58
14. График функции	61
§ 5. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ	69
15. Прямая пропорциональность и её график	—
16. Линейная функция и её график	74
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
17. Кусочно-заданные функции	83
Дополнительные упражнения к главе II	88

ГЛАВА III. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 6. СТЕПЕНЬ И ЕЁ СВОЙСТВА	95
18. Определение степени с натуральным показателем	—
19. Умножение и деление степеней	101
20. Возведение в степень произведения и степени	105

§ 7. ОДНОЧЛЕНЫ	110
21. Одночлен и его стандартный вид	—
22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень	112
23. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики	114
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
24. О простых и составных числах	121
Дополнительные упражнения к главе III	124

ГЛАВА IV. МНОГОЧЛЕНЫ

§ 8. СУММА И РАЗНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ	129
25. Многочлен и его стандартный вид	—
26. Сложение и вычитание многочленов	132
§ 9. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА	137
27. Умножение одночлена на многочлен	—
28. Вынесение общего множителя за скобки	142
§ 10. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ	147
29. Умножение многочлена на многочлен	—
30. Разложение многочлена на множители способом группировки	152
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
31. Деление с остатком	154
Дополнительные упражнения к главе IV	157

ГЛАВА V. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

§ 11. КВАДРАТ СУММЫ И КВАДРАТ РАЗНОСТИ	165
32. Возведение в квадрат и в куб суммы и разности двух выражений	—
33. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности	171
§ 12. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КУБОВ	174
34. Умножение разности двух выражений на их сумму	—
35. Разложение разности квадратов на множители	179
36. Разложение на множители суммы и разности кубов	182
§ 13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ	185
37. Преобразование целого выражения в многочлен	—
38. Применение различных способов для разложения на множители	188
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
39. Возведение двучлена в степень	192
Дополнительные упражнения к главе V	195

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 14. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ	201
40. Линейное уравнение с двумя переменными	—
41. График линейного уравнения с двумя переменными	206
42. Системы линейных уравнений с двумя переменными	209
§ 15. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	213
43. Способ подстановки	—
44. Способ сложения	217
45. Решение задач с помощью систем уравнений	221
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
46. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы	225
Дополнительные упражнения к главе VI	228
Задачи повышенной трудности	234
Исторические сведения	238
Сведения из курса математики 5—6 классов	241
Список дополнительной литературы	246
Предметный указатель	247
Ответы	248

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич, Миндюк Нора Григорьевна,
Нешков Константин Иванович, Суворова Светлана Борисовна

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

7 класс

Базовый уровень

Учебник

Центр математики, физики и астрономии

Ответственный за выпуск *П. А. Зубкова*

Редактор *П. А. Зубкова*

Художественный редактор *Т. В. Глушкова*

Компьютерная графика *Л. В. Аникиной, М. А. Тамазовой*

Технический редактор *Е. А. Урвачева*

Компьютерная вёрстка *О. В. Сиротиной*

Корректор *Г. И. Мосякина*

Дата подписания к использованию 21.11.2023. Формат 70×90/16.
Гарнитура SchoolBookCSanPin. Уч.-изд. л. 14,30. Усл. печ. л. 18,72.

Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vorpros@prosv.ru.