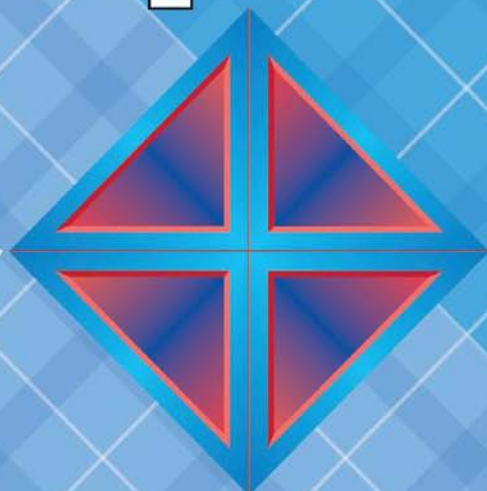
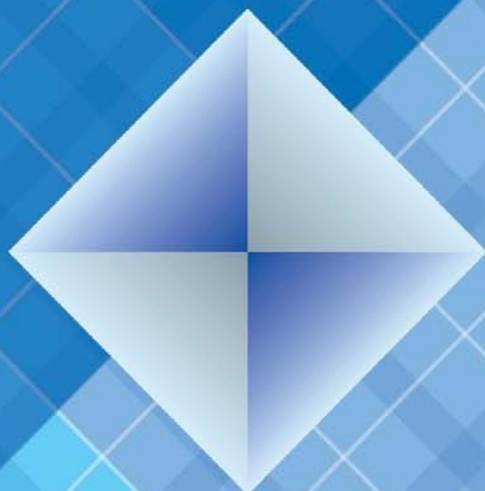
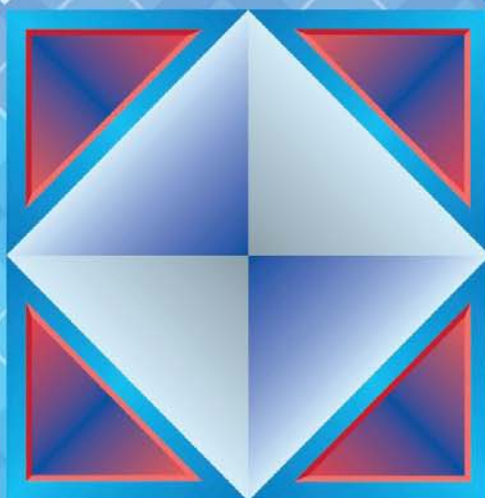


Геометрия



7



9

8

УДК 373.167.1:514+514(075.3)

ББК 22.151я721

М34

Авторы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

Издание подготовлено под научным руководством академика А. Н. Тихонова

Учебник (15-е издание, стереотипное соответствует 14-му, переработанному) допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Математика. Геометрия : 7—9-е классы : базовый уровень :
М34 учебник : издание в pdf-формате / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев [и др.]. — 15-е изд., стер. — Москва : Просвещение,
2024. — 416 с. : ил.

ISBN 978-5-09-116448-0 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-111167-5 (печ. изд.).

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования.

Учебник включает трёхступенчатую систему задач, а также исследовательские задачи, темы рефератов, список рекомендуемой литературы, что позволит учащимся расширить и углубить свои знания по геометрии.

Учебник подготовлен в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования, утверждённого Приказом Министерства просвещения № 287 от 31.05.2021 г.

УДК 373.167.1:514+514(075.3)

ББК 22.151я721

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич, Бутузов Валентин Фёдорович

Кадомцев Сергей Борисович, Позняк Эдуард Генрихович

Юдина Ирина Игоревна

МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЯ

7—9 классы

Базовый уровень

Учебник

Центр математики, физики и астрономии

Ответственный за выпуск *М. В. Кузнецова*

Редакторы *М. В. Кузнецова, Э. А. Мазурова*

Компьютерная вёрстка *С. Н. Терентьевой, О. В. Поповой*

Техническое редактирование *И. В. Грибковой*

Корректоры *И. В. Андрианова, В. К. Шаймарданов*

Дата подписания к использованию 16.10.2023. Формат 70×90/16. Гарнитура Школьная.

Усл. печ. л. 30,42. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».

Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru.

ISBN 978-5-09-116448-0 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-111167-5 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2013, 2023

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение», 2013, 2023

Все права защищены

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею пять лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия — одна из самых древних наук, она возникла очень давно, ещё до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная **наука, занимающаяся изучением геометрических фигур**.

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, окружность, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира, знаете формулы для нахождения периметра и площади некоторых фигур. Но всё это лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить ваши знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всём этом вам поможет учебник и, конечно, учитель.

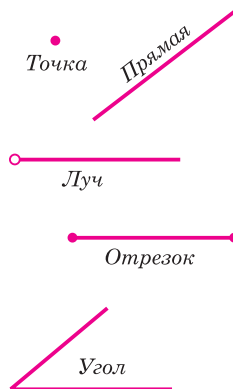


Рис. 1

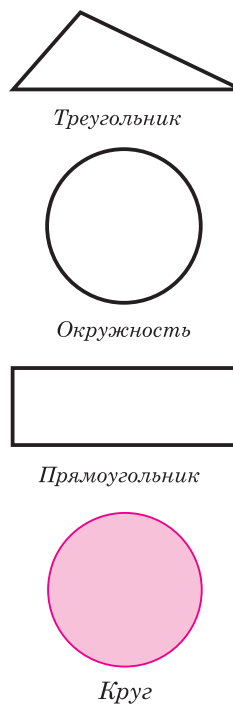


Рис. 2

Школьный курс геометрии делится на **планиметрию** и **стереометрию**. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнём изучение геометрии с планиметрии.

В процессе изучения геометрии вы будете доказывать **теоремы** и решать **задачи**. Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну а что такое задача — вам известно, на уроках математики вы решали разные задачи.

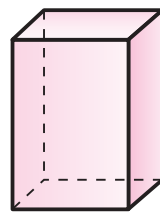
В нашем учебнике геометрии много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звёздочкой. Задачи, отмеченные знаком , можно решать с использованием компьютера (подходящие средства поможет выбрать учитель).

Задачи, отмеченные знаком , предполагают групповую работу.

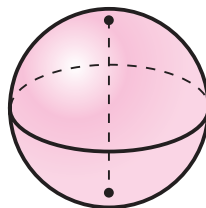
В конце книги к задачам даны ответы и указания.

Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звёздочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решать такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удаётся сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперёд, читать те параграфы, которые ещё не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

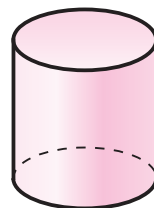
Доброго вам пути!



Прямоугольный
параллелепипед



Шар



Цилиндр

Рис. 3

В этой главе речь пойдёт о простейших геометрических фигурах — точках, прямых, отрезках, лучах, углах. С ними вы познакомились на уроках математики в 5 и 6 классах. К тому, что вы знаете об этих фигурах, мы добавим новые сведения, и они послужат нам опорой для изучения в следующих главах свойств более сложных фигур. Вы узнаете о практических приложениях геометрии — о том, как геометрия помогает прокладывать прямолинейные дороги и как проводится измерение углов на местности.

§1

Прямая и отрезок

1. Точки, прямые, отрезки

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямой на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A , B , C и D . Точки A и B лежат на прямой a , а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B , но не проходит через точки C и D . Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a . Вообще

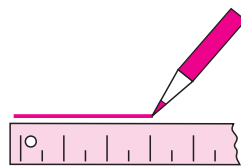
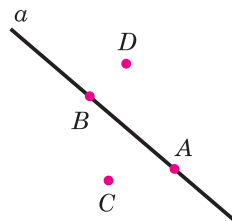


Рис. 4



Прямая и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну¹.

¹ Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые пересекаются. На рисунке 6 прямые a и b пересекаются в точке O , а прямые p и q не пересекаются. Две прямые не могут иметь более одной общей точки. В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: **две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.**

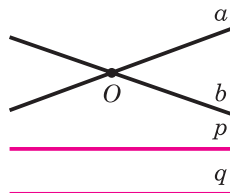


Рис. 6

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B , иногда обозначают двумя буквами: AB или BA . Для краткости вместо слов «точка A лежит на прямой a » используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка B не лежит на прямой a » — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, а выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**. На рисунке 7, б изображён отрезок с концами A и B . Такой отрезок обозначается AB или BA . Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB , лежащие между A и B .



Рис. 7

Последовательно соединяя отрезки, можно получить геометрическую фигуру, которую называют **ломаной**. Она составлена из отрезков так, что **смежные** отрезки (т. е. отрезки AB и BC , BC и CD , ..., EF и FG) не лежат на одной прямой (рис. 8, а). Отрезки, из которых составлена ломаная, называются **звеньями ломаной**, концы этих отрезков — **вершинами ломаной**. На рисунке 8, а изображена ломаная $ABCD...FG$. Концы ломаной $ABCD...FG$, т. е. точки A и G , могут быть различны, а могут совпадать (рис. 8, б). В последнем случае ломаная называется **замкнутой**.

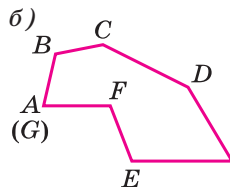
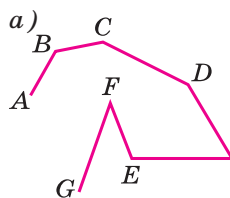


Рис. 8

Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется **многоугольником**, её звенья называются **сторонами многоугольника**. В зависимости от количества

сторон (вершин) многоугольника выделяют треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. Многоугольник с n вершинами называется n -угольником, он имеет n сторон. На рисунке 9 изображены четырёхугольник $ABCD$, пятиугольник $ABCDE$ и шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Фигура, изображённая на рисунке 10, не является многоугольником, так как несмежные отрезки C_1C_5 и C_2C_3 (а также C_3C_4 и C_1C_5) имеют общую точку.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** многоугольника.

На рисунке 11 внутренние области многоугольников закрашены. Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

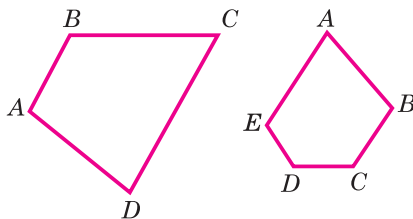


Рис. 9

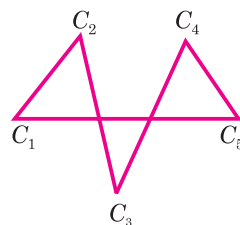


Рис. 10

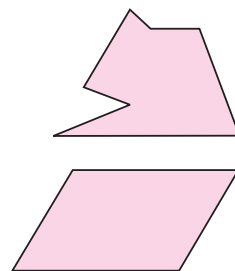


Рис. 11

2. Провешивание прямой на местности

Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки A и B и какую-нибудь точку C , лежащую между точками A и B (рис. 12, а). Затем передвинем линейку вправо так, чтобы её левый конец оказался около точки C , и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 12, б). Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Если мы проведём теперь отрезок AB , а затем отрезок BD , то получим отрезок AD , более длинный, чем линейка.

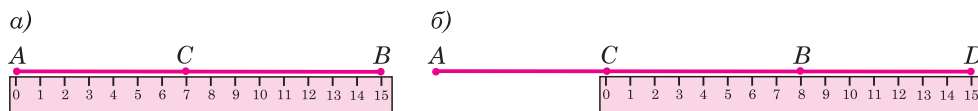


Рис. 12

Аналогичный приём используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот приём заключается в следующем. Сначала отмечают какие-нибудь точки A и B . Для этой цели используют две веши — шесты длиной около 2 м, заострённые на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью вешу ставят так, чтобы веши, стоящие в точках A и B , закрывали её от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 13). Следующую вешу ставят так, чтобы её закрывали веши, стоящие в точках B и C , и т. д.

Описанный приём называется **провешиванием** прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании шоссе или железных дорог, линий высоковольтных передач и т. д.

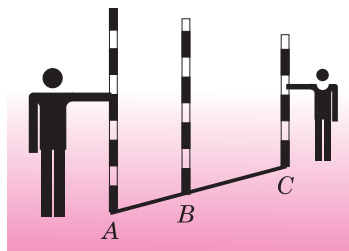


Рис. 13



Практические задания

- 1 Проведите прямую, обозначьте её буквой a и отметьте точки A и B , лежащие на этой прямой, и точки P , Q и R , не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A , B , P , Q , R и прямой a , используя символы $\in$ и $\notin$.
- 2 Отметьте три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько прямых получилось?
- 3  Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.
- 4 Отметьте точки A , B , C , D так, чтобы точки A , B , C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?
- 5 Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B . Отметьте: а) точки M и N , лежащие на отрезке AB ; б) точки P и Q , лежащие на прямой a , но не лежащие на отрезке AB ; в) точки R и S , не лежащие на прямой a .
- 6 Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

- 7 На рисунке 14 изображена прямая, на ней отмечены точки A , B , C и D . Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C ; б) на которых не лежит точка B .



Рис. 14

- 8 Начертите ломаную из трёх звеньев, которая: а) является замкнутой, б) не является замкнутой.

- 9  Цифры почтового индекса записываются по определённым правилам (рис. 15) для удобства распознавания сортировочным автоматом.



Рис. 15

Укажите на рисунке цифры, в записи которых используются ломаные. Сколько звеньев у каждой ломаной? Укажите замкнутую ломаную. Как называется многоугольник, образованный на рисунке замкнутой ломаной?

- 10  Начертите пятиугольник, как на рисунке 9. Разбейте его на треугольники так, чтобы у пятиугольника и каждого треугольника были общие стороны. Сколько треугольников может получиться на чертеже? Какие ещё многоугольники получились на чертеже?

§2

Луч и угол

3. Луч

Проведём прямую a и отметим на ней точку O (рис. 16). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом**, **исходящим из точки O** (на рисунке 16 один из лучей выделен цветной линией). Точка O называется **началом** каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 17, а), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 17, б).



Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 16

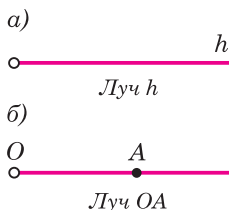


Рис. 17

Начальные
геометрические
сведения

4. Угол

Напомним, что **угол** — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

На рисунке 18 изображён угол с вершиной O и сторонами h и k . На сторонах отмечены точки A и B . Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

Угол называется **развёрнутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 19 изображён развёрнутый угол с вершиной C и сторонами p и q .

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвёрнутый, то одна из частей называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** этого угла (рис. 20, а). На рисунке 20, б изображён неразвёрнутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

Если угол развёрнутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 21, а луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB . Если угол AOB развёрнутый, то любой луч OC , не совпадающий с лучами OA и OB , делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 21, б).

Практические задания

- 11 Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C . а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA назовите совпадающие лучи; б) назовите луч, который является продолжением луча CA .

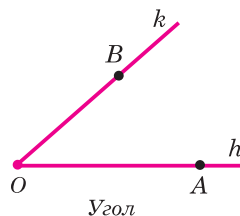


Рис. 18

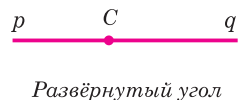


Рис. 19

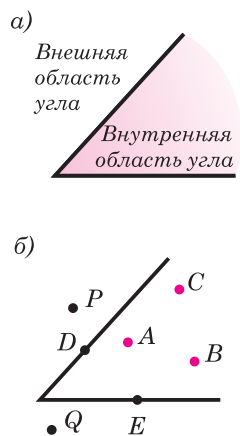


Рис. 20

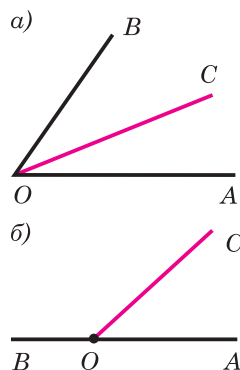
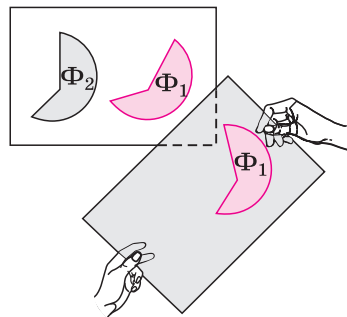
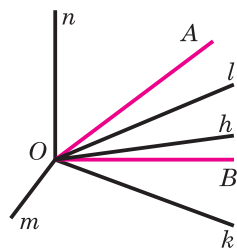
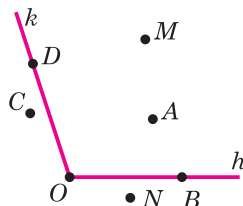


Рис. 21



Передвигая кальку и накладывая её на фигуру Φ_2 той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры Φ_1 с фигурой Φ_2 . Если они совместятся, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2 .

Мы можем представить себе, что на фигуру Φ_2 накладывается не копия фигуры Φ_1 , равная этой фигуре, а сама фигура Φ_1 . Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, две геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением.

6. Сравнение отрезков и углов

На рисунке 25, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 25, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 25, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB , поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется **серединой отрезка**. На рисунке 26 точка C — середина отрезка AB .

На рисунке 27, *а* изображены неразвёрнутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, что-

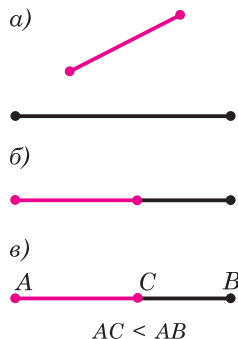


Рис. 25

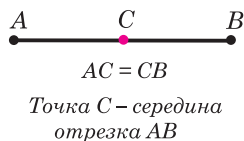


Рис. 26

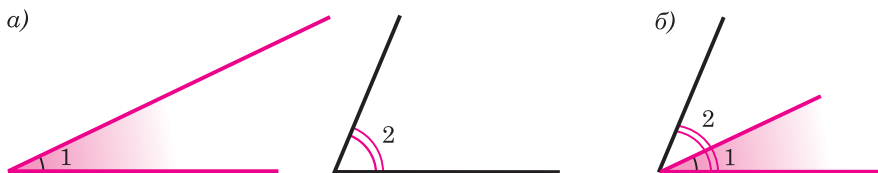


Рис. 27

бы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 27, б).

Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 27, б угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

Неразвёрнутый угол составляет часть развёрнутого угла (рис. 28), поэтому развёрнутый угол больше неразвёрнутого угла. Любые два развёрнутых угла, очевидно, равны.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой угла**. На рисунке 29 луч l — биссектриса угла hk .

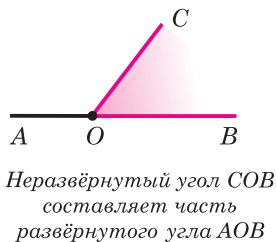


Рис. 28

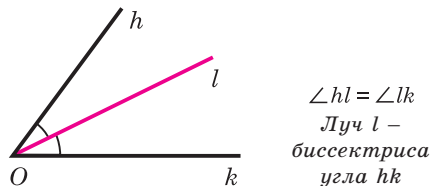


Рис. 29

Задачи

- 21 На луче с началом O отмечены точки A , B и C так, что точка B лежит между точками O и A , а точка A — между точками O и C . Сравните отрезки OB и OA , OC и OA , OB и OC .
- 22 Точка O является серединой отрезка AB . Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB ; б) OA и AB ?
- 23 На рисунке 30 отрезки AB , BC , CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC , AE и CE ; б) отрезок, серединой которого является точка D ; в) отрезки, серединой которых является точка C .
- 24 Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC .



Рис. 30

- 25 Луч l — биссектриса угла hk . Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk ; б) hl и hk ?
- 26 На рисунке 31 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите: а) биссектрису каждого из углов AOC , BOF , AOE ; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC . Сравните углы BOC и BOD .

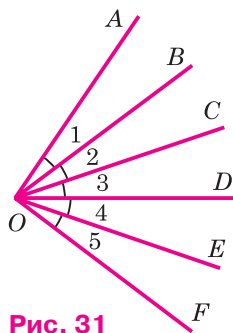


Рис. 31

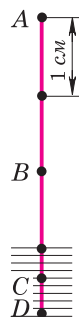
§4 Измерение отрезков

7. Длина отрезка

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за **единицу измерения** (его называют также **масштабным отрезком**). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 32 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно 2 раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 32 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см.

Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и по-



$AB = 2$ см, $AC = 3,4$ см,
 $AD \approx 3,8$ см

Рис. 32

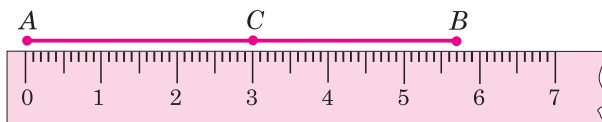
лучается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 32, в котором сантиметр укладывается 3 раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается 8 раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближённо равна 3,8 см.

Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со всё большей точностью. На практике, однако, пользуются приближёнными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. **Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.** Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и её части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. **равные отрезки имеют равные длины.** Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или её часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. **меньший отрезок имеет меньшую длину.**

На рисунке 33 изображён отрезок AB . Точка C делит его на два отрезка: AC и CB . Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2,7$ см, $AB = 5,7$ см. Таким образом, $AC + CB = AB$. Ясно, что и во всех других случаях, **когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.**



$$AC + CB = AB$$

Рис. 33

Если длина отрезка CD в k раз больше длины отрезка AB , то пишут $CD = kAB$.

Длина отрезка называется также **расстоянием** между концами этого отрезка.

Если известны длины отрезков, являющихся звеньями ломаной, то можно найти длину ломаной. Для этого надо вычислить сумму длин всех её звеньев. Длина замкнутой ломаной называется **периметром** многоугольника.

8. Единицы измерения.

Измерительные инструменты

Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран **метр** — отрезок, приближённо равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части

земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображёнными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояние между населёнными пунктами — в **километрах**. Используются и другие единицы измерения, например **дециметр**, **морская миля** (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают **световой год**, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше

время. В старину в разных странах существовали свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется масштабная миллиметровая линейка. Для измерения диаметра трубки используют **штангенциркуль** (рис. 34). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются **рулеткой**, которая представляет собой ленту с нанесёнными на ней делениями (рис. 35).

Практические задания

- 27 Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.
- 28 Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.
- 29 Найдите длины всех отрезков, изображённых на рисунке 36, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL ; б) AB .
- 30 Начертите отрезок AB и луч h . Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.
- 31 Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B . С помощью масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC , а точка D — серединой отрезка BC .
- 32 Начертите прямую AB . С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C , такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB ?

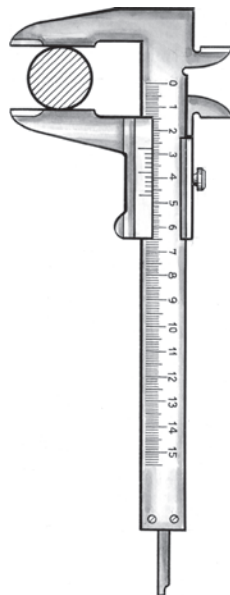


Рис. 34

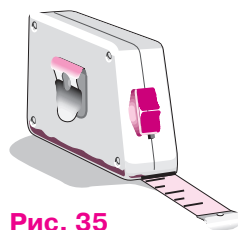


Рис. 35

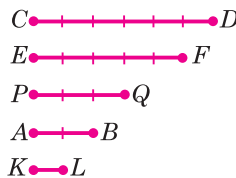


Рис. 36

Задачи

- 33 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC , если $AB = 7,8$ см, $BC = 25$ мм.
- 34 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC , если:
а) $AB = 3,7$ см, $AC = 7,2$ см;
б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.
- 35 Точки A , B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13,5$ см. Какой может быть длина отрезка AC ?
- 36 Точки B , D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM ?
- 37 Точка C — середина отрезка AB , равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA .
- 38 Расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом приблизительно равно 650 км. Город Тверь находится между этими городами в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и Санкт-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.
- 39 Лежат ли точки A , B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

Решение

Если точки A , B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB , BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A , B и C не лежат на одной прямой.

- 40 Точка C — середина отрезка AB , точка O — середина отрезка AC . Найдите:
а) AC , CB , AO и OB , если $AB = 2$ см;
б) AB , AC , AO и OB , если $CB = 3,2$ м.
- 41 На прямой отмечены точки O , A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB , если точка O :
а) лежит на отрезке AB ;
б) не лежит на отрезке AB .
- 42  Отрезок, длина которого равна a , разделён произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.
- 43 Отрезок, равный 28 см, разделён на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

- 44 На рисунке 37 изображены несколько ломаных, все звенья которых имеют длину 3 см. Найдите длины всех замкнутых ломаных. Укажите ломаную, имеющую наибольшую длину.

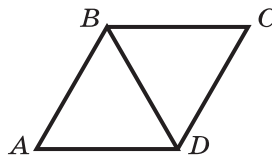


Рис. 37

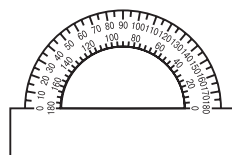
§5

Измерение углов

9. Градусная мера угла

Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают **градус** — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, ещё до нашей эры.

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла**. Для измерения углов используется транспортир (рис. 38).



Транспортир

Рис. 38

На рисунке 39, а изображён угол AOB , градусная мера которого равна 150° . Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150° » — и пишут: $\angle AOB = 150^\circ$. На рисунке 39, б угол hk равен 40° ($\angle hk = 40^\circ$). Определённые части градуса носят специальные названия: $\frac{1}{60}$ часть градуса называется **минутой**, $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой**. Минуты обозначают знаком «'», а секунды — знаком «''». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: $60^\circ 32' 17''$.

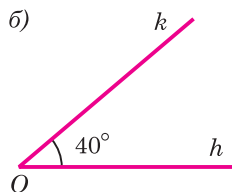
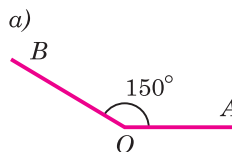


Рис. 39

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. **равные углы имеют равные градусные меры**.

Если же один угол меньше другого, то в нём градус (или его часть) укладывается мень-

шее число раз, чем в другом угле, т. е. **меньший угол имеет меньшую градусную меру.**

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла, то он укладывается в развёрнутом угле ровно 180 раз, т. е. **развёрнутый угол равен 180° .**

Неразвёрнутый угол меньше развёрнутого угла, поэтому **неразвёрнутый угол меньше 180° .**

На рисунке 40 изображены лучи с началом в точке O . Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB . Мы видим, что $\angle AOC = 40^\circ$, $\angle COB = 120^\circ$, $\angle AOB = 160^\circ$. Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

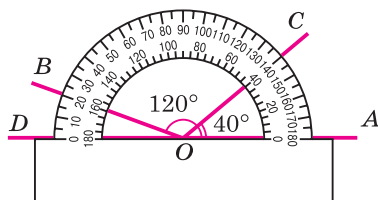


Рис. 40

Ясно, что и во всех других случаях, когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.

Угол называется **прямым**, если он равен 90° (рис. 41, а), **острым**, если он меньше 90° , т. е. меньше прямого угла (рис. 41, б), **тупым**, если он больше 90° , но меньше 180° , т. е. больше прямого, но меньше развёрнутого угла (рис. 41, в).

Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.

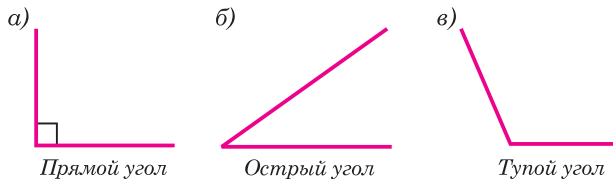


Рис. 41

Прямой угол

Острый угол

Тупой угол



10. Измерение углов на местности

Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является **астролябия** (рис. 42). Она состоит из двух частей: диска, разделённого на градусы, и вращающейся вокруг центра диска линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки её в определённом направлении.

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой O . Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон OA или OB и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя её вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчёта и даёт градусную меру угла AOB .

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на компьютерах.

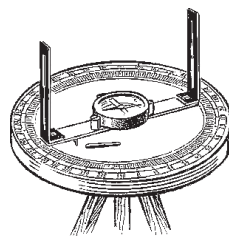


Рис. 42

Практические задания

- 45 Начертите три неразвёрнутых угла и один развёрнутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.
- 46 Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB , AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23^\circ$, $\angle AOC = 67^\circ$, $\angle AOD = 138^\circ$.
- 47 Начертите угол, равный 70° , и с помощью транспортира проведите его биссектрису.
- 48 Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC . Всегда ли это выполнимо?

Задачи

49 Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

50 На рисунке 43 изображены лучи с общим началом O .

а) Найдите градусные меры углов AOX , BOX , AOB , COB , DOX ;

б) назовите углы, равные 20° ;

в) назовите равные углы;

г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

51 Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOB , если:

а) $\angle AOE = 44^\circ$, $\angle EOB = 77^\circ$;

б) $\angle AOE = 12^\circ 37'$, $\angle EOB = 108^\circ 25'$.

52 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB , если $\angle AOB = 78^\circ$, а угол AOC на 18° меньше угла BOC .

53 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC , если $\angle AOB = 155^\circ$, а угол AOC на 15° больше угла COB .

54 Угол AOB является частью угла AOC . Известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB .

55 На рисунке 44 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD .

56 На рисунке 45 луч OV является биссектрисой угла ZOY , а луч OU — биссектрисой угла XOY . Найдите угол XOZ , если $\angle UOV = 80^\circ$.

57 Луч l является биссектрисой неразвёрнутого угла hk . Может ли угол hl быть прямым или тупым?

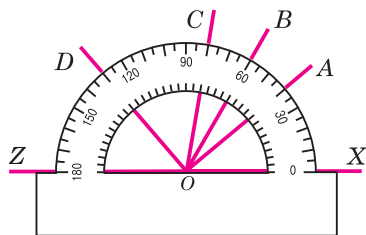


Рис. 43

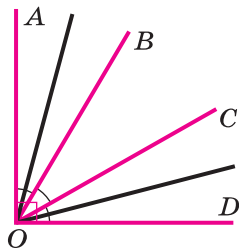


Рис. 44

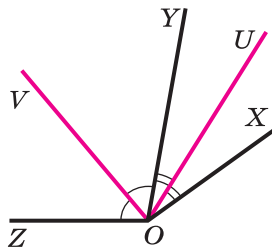


Рис. 45

§6

Перпендикулярные прямые

11. Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

На рисунке 46 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развёрнутый угол, то

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180^\circ.$$

Таким образом, **сумма смежных углов равна 180°** .

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

На рисунке 47 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. **вертикальные углы равны**.

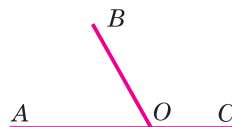


Рис. 46

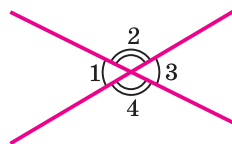


Рис. 47

12. Перпендикулярные прямые

Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвёрнутых угла (см. рис. 47). Величина того из этих углов, который не превосходит каждого из трёх остальных, называется **углом между пересекающимися прямыми**. Если один из четырёх углов прямой (угол 1 на рис. 48), то остальные углы также прямые (объясните почему).

Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными** (или **взаимно перпендикулярными**), если они образуют четыре прямых угла.

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD »).

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 49, а).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1 , перпендикулярные к прямой PQ (рис. 49, б). Мысленно перегибём рисунок по прямой PQ так,

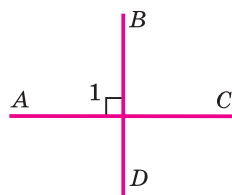


Рис. 48

чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1 . Аналогично луч QB наложится на луч QB_1 .

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M , то эта точка наложится на некоторую точку M_1 , также лежащую на этих прямых (рис. 49, в), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1 . Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертёжный треугольник и линейку (рис. 50).

13. Построение прямых углов на местности

Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является **экер**.

Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укреплённых на треножнике (рис. 51). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны.

Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA , устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O , а направление одного бруска совпало с направлением луча OA . Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью веши, поставленной на луче.

Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 51). Получается прямой угол AOB .

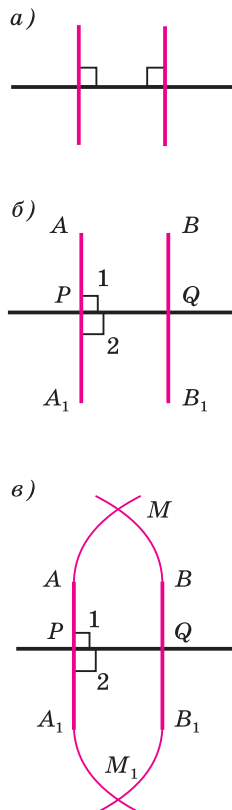


Рис. 49

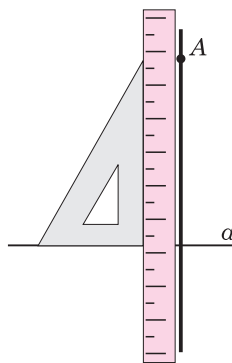


Рис. 50

В геодезии для построения прямых углов используют более совершенные приборы, например теодолит.

Практические задания

- 58 Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D . Сравните углы AOB и AOD .
- 59 Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.
- 60 Начертите неразвёрнутый угол hk . Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.
- 61 Начертите неразвёрнутый угол MON и отметьте точку P внутри угла и точку Q вне его. С помощью чертёжного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON .

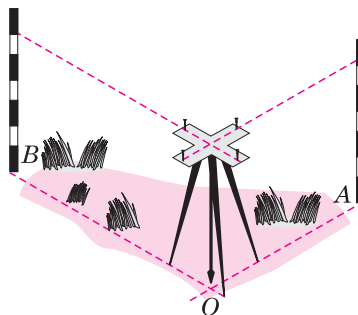


Рис. 51

Задачи

- 62 Найдите угол, смежный с углом ABC , если:
а) $\angle ABC = 111^\circ$; б) $\angle ABC = 90^\circ$; в) $\angle ABC = 15^\circ$.
- 63 Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?
- 64 Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?
- 65 Найдите смежные углы hk и kl , если:
а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на 40° ;
б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на 120° ;
в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47^\circ 18'$;
г) $\angle hk = 3\angle kl$;
д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.
- 66 На рисунке 52 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD , если $\angle COB = 148^\circ$.
- 67 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?
- 68 Найдите изображённые на рисунке 47 углы:
а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117^\circ$;
б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43^\circ 27'$.
- 69 Найдите неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если:
а) сумма двух из них равна 114° ;
б) сумма трёх углов равна 220° .

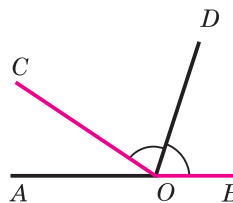


Рис. 52

- 70 На рисунке 47 (см. с. 23) найдите углы 1, 2, 3, 4, если:
 а) $\angle 2 + \angle 4 = 220^\circ$;
 б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$;
 в) $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$.

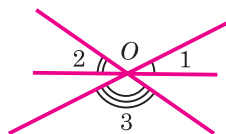


Рис. 53

- 71 На рисунке 53 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O . Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.
- 72 На рисунке 54 $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle FOE = 70^\circ$. Найдите углы $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle COE$ и угол между прямыми AD и FC .
- 73 Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q . Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a ?
- 74 Через точку A , не лежащую на прямой a , проведены три прямые, пересекающие прямую a . Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a .

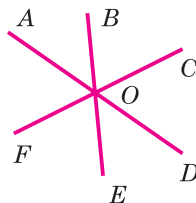


Рис. 54

Вопросы для повторения к главе I

- 1 Сколько прямых можно провести через две точки?
- 2 Сколько общих точек могут иметь две прямые?
- 3 Объясните, что такое отрезок.
- 4 Какая фигура называется ломаной? Объясните, что такое вершины и звенья ломаной.
- 5 Какая ломаная называется многоугольником?
- 6 Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
- 7 Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.
- 8 Какой угол называется развёрнутым?
- 9 Какие фигуры называются равными?
- 10 Объясните, как сравнить два отрезка.
- 11 Какая точка называется серединой отрезка?
- 12 Объясните, как сравнить два угла.
- 13 Какой луч называется биссектрисой угла?
- 14 Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB , если известны длины отрезков AC и CB ?
- 15 Что такое длина ломаной?
- 16 Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник?
- 17 Объясните, как найти периметр многоугольника?
- 18 Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?

- 19** Что такое градусная мера угла?
- 20** Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB , если известны градусные меры углов AOC и COB ?
- 21** Какой угол называется острым; прямым; тупым?
- 22** Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?
- 23** Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?
- 24** Какие прямые называются перпендикулярными?
- 25** Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.
- 26** Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности?

Дополнительные задачи

- 75** Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?
- 76** Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?
- 77** Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении трёх прямых, проходящих через одну точку?
- 78** Точка N лежит на отрезке MP . Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в 2 раза больше расстояния между точками N и P . Найдите расстояние:
 а) между точками N и P ;
 б) между точками N и M .
- 79** Три точки K , L , M лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние KM ? Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.
- 80** Отрезок AB длины a разделён точками P и Q на три отрезка AP , PQ и QB так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между:
 а) точкой A и серединой отрезка QB ;
 б) серединами отрезков AP и QB .
- 81**  Отрезок длины m разделён:
 а) на три равные части;
 б) на пять равных частей.
 Найдите расстояние между серединами крайних частей.

- 82** Отрезок в 36 см разделён на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.
- 83*** Точки A , B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC . Докажите, что $BC = 2MN$.
- 84** Известно, что $\angle AOB = 35^\circ$, $\angle BOC = 50^\circ$. Найдите угол AOC . Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж с помощью линейки и транспортира.
- 85** Угол hk равен 120° , а угол ht равен 150° . Найдите угол kt . Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.
- 86** Найдите смежные углы, если:
а) один из них на 45° больше другого;
б) их разность равна 35° .
- 87** Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.
- 88** Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
- 89*** Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A , B и D лежат на одной прямой.
- 90** Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A , не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.
- 91**  Найдите площадь и периметр прямоугольника, если прямоугольник сложили: а) из двух квадратов с периметрами 8 см; б) из трёх квадратов с периметрами 8 см; в) из четырёх квадратов с периметрами 8 см; г) из n (n — натуральное число, большее 1) квадратов с периметрами 8 см.

Оглавление

Дорогие семиклассники!	3
------------------------------	---

7 КЛАСС

Глава I. Начальные геометрические сведения	5
---	---

§ 1. Прямая и отрезок	—
1. Точки, прямые, отрезки	—
2. Провешивание прямой на местности	7
Практические задания	8
§ 2. Луч и угол	9
3. Луч	—
4. Угол	10
Практические задания	—
§ 3. Сравнение отрезков и углов	11
5. Равенство геометрических фигур	—
6. Сравнение отрезков и углов	12
Задачи	13
§ 4. Измерение отрезков	14
7. Длина отрезка	—
8. Единицы измерения. Измерительные инструменты	16
Практические задания	17
Задачи	18
§ 5. Измерение углов	19
9. Градусная мера угла	—
10. Измерение углов на местности	21
Практические задания	—
Задачи	22
§ 6. Перпендикулярные прямые	—
11. Смежные и вертикальные углы	—
12. Перпендикулярные прямые	23
13. Построение прямых углов на местности	24
Практические задания	25
Задачи	—
Вопросы для повторения к главе I	26
Дополнительные задачи	27

Глава II. Треугольники	29
-------------------------------------	----

§ 1. Первый признак равенства треугольников	—
14. Треугольник	—
15. Первый признак равенства треугольников	30
Практические задания	31
Задачи	32
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	33
16. Перпендикуляр к прямой	—
17. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	34
18. Свойства равнобедренного треугольника	35
Практические задания	37
Задачи	—

§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	38
19. Второй признак равенства треугольников	—
20. Третий признак равенства треугольников	39
Задачи	41
§ 4. Задачи на построение	43
21. Окружность	—
22. Построения циркулем и линейкой	44
23. Примеры задач на построение	45
Задачи	48
Вопросы для повторения к главе II	49
Дополнительные задачи	50
Глава III. Параллельные прямые	53
§ 1. Признаки параллельности двух прямых	—
24. Определение параллельных прямых	—
25. Признаки параллельности двух прямых	54
26. Практические способы построения параллельных прямых ...	56
Задачи	57
§ 2. Аксиома параллельных прямых	58
27. Об аксиомах геометрии	—
28. Аксиома параллельных прямых	59
29. Теоремы об углах, образованных двумя	
параллельными прямыми и секущей	61
30. Углы с соответственно параллельными	
или перпендикулярными сторонами	64
Задачи	65
Вопросы для повторения к главе III	67
Дополнительные задачи	68
Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника	69
§ 1. Сумма углов треугольника	—
31. Теорема о сумме углов треугольника	—
32. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники ..	70
Задачи	71
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	72
33. Теорема о соотношениях между сторонами	
и углами треугольника	—
34. Неравенство треугольника	73
Задачи	74
§ 3. Прямоугольные треугольники	75
35. Некоторые свойства и признаки	
прямоугольных треугольников	—
36. Признаки равенства прямоугольных треугольников	77
Задачи	79
§ 4. Построение треугольника по трём элементам	80
37. Расстояние от точки до прямой.	
Расстояние между параллельными прямыми	—
38. Построение треугольника по трём элементам	83
Задачи	85
Вопросы для повторения к главе IV	87
Дополнительные задачи	89

Глава V. Геометрические места точек. Симметричные фигуры	91
§ 1. Геометрические места точек	—
39. Свойства биссектрисы угла	—
40. Свойства серединного перпендикуляра к отрезку	93
Задачи	95
§ 2. Окружность. Касательная к окружности	—
41. Свойства диаметров и хорд окружности	—
42. Взаимное расположение окружности и прямой.	—
Касательная к окружности	97
43. Вписанная и описанная окружности треугольника	100
Задачи	103
§ 3. Симметричные фигуры	106
44. Фигуры, симметричные относительно прямой	—
45. Осевая симметрия и её свойства	108
Практические задания	110
Задачи	—
Вопросы для повторения к главе V	112
Дополнительные задачи	114
Задачи повышенной трудности	115

8 КЛАСС

Глава VI. Четырёхугольники	121
§ 1. Многоугольники	—
46. Выпуклый многоугольник	—
47. Четырёхугольник	122
Задачи	123
§ 2. Параллелограмм и трапеция	124
48. Параллелограмм	—
49. Признаки параллелограмма	125
50. Трапеция	126
Задачи	—
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	131
51. Прямоугольник	—
52. Ромб и квадрат	132
53. Центральная симметрия	133
Задачи	134
Вопросы для повторения к главе VI	135
Дополнительные задачи	137

Глава VII. Площадь	139
§ 1. Площадь многоугольника	—
54. Понятие площади многоугольника	—
55*. Площадь квадрата	142
56. Площадь прямоугольника	144
Задачи	—
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	146
57. Площадь параллелограмма	—
58. Площадь треугольника	147

59. Площадь трапеции	149
Задачи	150
§ 3. Теорема Пифагора	152
60. Теорема Пифагора	—
61. Теорема, обратная теореме Пифагора	154
62. Формула Герона	155
Задачи	156
Вопросы для повторения к главе VII	158
Дополнительные задачи	159
Глава VIII. Подобные треугольники	163
§ 1. Определение подобных треугольников	—
63. Пропорциональные отрезки	—
64. Определение подобных треугольников	164
65. Отношение площадей подобных треугольников	165
Задачи	—
§ 2. Признаки подобия треугольников	167
66. Первый признак подобия треугольников	—
67. Второй признак подобия треугольников	168
68. Третий признак подобия треугольников	169
Задачи	—
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	171
69. Средняя линия треугольника	—
70. Четыре замечательные точки треугольника	173
71. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике ...	174
72. Метод подобия в задачах на построение	175
73. Применение подобия треугольников в измерительных работах на местности	176
Задачи	178
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	181
74. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника	—
75. Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° , 60°	182
Задачи	184
Вопросы для повторения к главе VIII	185
Дополнительные задачи	186
Глава IX. Окружность	189
§ 1. Окружность и прямые	—
76. Взаимное расположение прямой и окружности	—
77. Взаимное расположение двух окружностей	191
78. Общие касательные двух окружностей	195
Практические задания	197
Задачи	—
§ 2. Центральные и вписанные углы	199
79. Градусная мера дуги окружности	—
80. Теорема о вписанном угле	201

81. Углы, образованные хордами, касательными и секущими	202
Задачи	204
§ 3. Вписанная и описанная окружности	
четырёхугольников	206
82. Вписанная окружность	—
83. Описанная окружность	207
Задачи	208
Вопросы для повторения к главе IX	209
Дополнительные задачи	210
Задачи повышенной трудности	214
9 КЛАСС	
Глава X. Векторы	224
§ 1. Понятие вектора	—
84. Понятие вектора	—
85. Равенство векторов	226
86. Откладывание вектора от данной точки	227
Практические задания	228
Задачи	229
§ 2. Сложение и вычитание векторов	230
87. Сумма двух векторов	—
88. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма	231
89. Сумма нескольких векторов	232
90. Вычитание векторов	233
Практические задания	235
Задачи	—
§ 3. Умножение вектора на число.	
Применение векторов к решению задач	237
91. Произведение вектора на число	—
92. Применение векторов к решению задач	239
Практические задания	241
Задачи	—
Вопросы для повторения к главе X	243
Дополнительные задачи	244
Глава XI. Метод координат	246
§ 1. Координаты вектора	—
93. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	—
94. Координаты вектора	248
Задачи	251
§ 2. Простейшие задачи в координатах	252
95. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца	—
96. Простейшие задачи в координатах	254
Задачи	255
§ 3. Уравнения окружности и прямой	260
97. Уравнение линии на плоскости	—
98. Уравнение окружности	261

99. Уравнение прямой	262
Задачи	263
Вопросы для повторения к главе XI	267
Дополнительные задачи	269
Глава XII. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов	271
§ 1. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла	—
100. Синус, косинус, тангенс, котангенс	—
101. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения	273
102. Формулы для вычисления координат точки	—
103. Угловой коэффициент прямой	274
Задачи	275
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	276
104. Теорема о площади треугольника	—
105. Теорема синусов	277
106. Теорема косинусов	—
107. Решение треугольников	278
108. Измерительные работы	280
Задачи	281
§ 3. Скалярное произведение векторов	283
109. Угол между векторами	—
110. Скалярное произведение векторов	284
111. Скалярное произведение в координатах	285
112. Свойства скалярного произведения векторов	287
Задачи	288
Вопросы для повторения к главе XII	290
Дополнительные задачи	291
Глава XIII. Длина окружности и площадь круга	294
§ 1. Правильные многоугольники	—
113. Правильный многоугольник	—
114. Окружность, описанная около правильного многоугольника	—
115. Окружность, вписанная в правильный многоугольник	295
116. Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности	297
117. Построение правильных многоугольников	298
Задачи	300
§ 2. Длина окружности и площадь круга	302
118. Длина окружности	—
119. Радианная мера угла	304
120. Площадь круга	305
121. Площадь кругового сектора	306
Задачи	307
Вопросы для повторения к главе XIII	310
Дополнительные задачи	311
Глава XIV. Преобразования плоскости. Движения	313
§ 1. Преобразования плоскости	—
122. Отображение плоскости на себя	—

123. Понятие движения плоскости	314
124*. Наложения и движения	316
Задачи	318
§ 2. Параллельный перенос и поворот	320
125. Параллельный перенос	—
126. Поворот	321
Задачи	322
§ 3. Симметрии фигур	323
127. Понятие симметрии фигур	—
128. Практические приложения симметрий	324
129. Применение движений к решению задач	326
Задачи	327
Вопросы для повторения к главе XIV	328
Дополнительные задачи	329
Глава XV. Преобразование подобия. Подобие фигур	332
§ 1. Подобие многоугольников	—
130. Представление о подобных фигурах	—
131. Подобные многоугольники	333
132. Теоремы о периметрах и площадях подобных многоугольников	336
Задачи	337
§ 2. Преобразование подобия	340
133. Гомотетия	—
134. Свойства гомотетии	341
135. Подобие произвольных фигур	342
Задачи	344
§ 3. Применение подобия фигур к доказательству теорем и решению задач	347
136. Применение подобия к доказательству теорем	—
137. Применение подобия к решению задач	349
Задачи	351
Вопросы для повторения к главе XV	353
Дополнительные задачи	354
Задачи повышенной трудности	357
Исследовательские задачи	365
Темы рефератов	366
Комплексные задания	368
Приложения	372
1. Об аксиомах планиметрии	—
2. Некоторые сведения о развитии геометрии	377
3. Угловой отражатель	380
Ответы и указания	382
Предметный указатель	406