



Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8

класс

Часть 2



УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

М34



Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики

для дошкольников, учащихся начальной и основной

школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Авторы: Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин.

Издание выходит в pdf-формате.

Математика. Алгебра : 8 класс : учебник : в 3 частях : издание в pdf-формате / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович [и др.]. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022.

ISBN 978-5-09-102064-9 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-092187-9 (печ. изд.).

Ч. 2. — 160 с. + [4 с., вкл.] : ил.

ISBN 978-5-09-101264-4 (электр. изд.).

ISBN 978-5-09-092402-3 (печ. изд.).

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101264-4 (ч. 2, электр. изд.)

ISBN 978-5-09-102064-9 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-092402-3 (ч. 2, печ. изд.)

ISBN 978-5-09-092187-9 (печ. изд.)

© Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин, 2014, 2018, с изменениями

© АО «Издательство «Просвещение», 2021, 2022

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение», 2021, 2022

Все права защищены

Оглавление

Глава 3. Исследование нелинейных процессов	3
§ 2. Кусочно-заданные функции	3
3.2.1. Кусочно-заданные функции	3
§ 3. Квадратный корень	13
3.3.1. Арифметический квадратный корень и его свойства	13
3.3.2. Преобразование выражений с корнями	21
3.3.3. График функции $y = \sqrt{x}$	28
3.3.4. *Приближённое вычисление квадратного корня	34
Задачи для самоконтроля к главе 3	40
Глава 4. Квадратичная функция	44
§ 1. Квадратные уравнения	44
4.1.1. Квадратные уравнения в реальных процессах. Неполные квадратные уравнения и их решение	44
4.1.2. Формулы корней квадратного уравнения	51
4.1.3. Решение уравнений, сводящихся к квадратным	58
4.1.4. Теорема Виета и обратная к ней теорема	64
4.1.5. Квадратный трёхчлен и его разложение на множители	71
4.1.6. Квадратные уравнения с параметром	76
4.1.7. Задачи, сводящиеся к решению квадратных уравнений	82
§ 2. Квадратичная функция	88
4.2.1. Функции $y = ax^2$; $y = ax^2 + h$; $y = a(x - d)^2$ их графики	88
4.2.2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$	94
4.2.3. * Наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена	101
§ 3. Квадратные неравенства	107
4.3.1. Решение квадратных неравенств	107
4.3.2. * Неравенства с параметром	115
Задачи для самоконтроля к главе 4	122
Глава 5. Рациональные уравнения и неравенства	125
§ 1. Алгебраические дроби	125
5.1.1. Алгебраические дроби и их свойства	125
5.1.2. Действия с алгебраическими дробями	135
5.1.3. * Алгебраические дроби и деление многочленов	143
Ответы	151
Предметный указатель	158

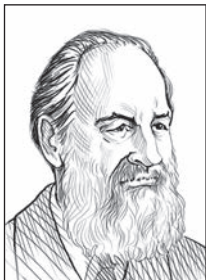
* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики

Глава 3

Исследование нелинейных процессов

§ 2. Кусочно-заданные функции

3.2.1. Кусочно-заданные функции



Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945),
русский и советский кораблестроитель,
механик, математик

Бывает, что на практике важно отследить не значение некоторой величины, а только её знак. Так, для работы компаний мобильной связи в некоторых случаях достаточно отслеживать не значение текущей суммы на счёте пользователя, а лишь знак его баланса. Весной для спасения саженцев от ночных заморозков садовода часто волнует лишь плюсовая температура. Чтобы автоматизировать процессы предоставления услуг связи, включения отопления и пр., возникает необходимость описать на математическом языке правило, которое каждому числу ставит в соответствие его знак.

Функция, которая удовлетворяет этому требованию, была введена ещё в конце XIX века немецким математиком Леопольдом Кронекером. Областью определения этой функции является множество всех чисел, для обозначения положительных чисел выбрано число (+1), для обозначения отрицательных чисел – число (–1), а нулю соответствует 0:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Эту функцию обозначают $y = \text{sign}(x)$, читают: «сигнум икс» (от латинского «signum» – «знак»). В наши дни функция **сигнум** используется в самых разных разделах математики, например, в математической статистике.

Областью определения данной функции является множество $X = (-\infty; +\infty)$, которое разбивается на три попарно непересекающихся подмножества $X_1 = (-\infty; 0)$, $X_2 = \{0\}$ и $X_3 = (0; +\infty)$:

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X; X_1 \cap X_2 = \emptyset; X_1 \cap X_3 = \emptyset; X_2 \cap X_3 = \emptyset$$

График функции сигнум состоит из двух лучей $y = 1$ и $y = -1$, а также отдельно расположенной точки $(0; 0)$ (рис. 1). Начало каждого из этих лучей не принадле-

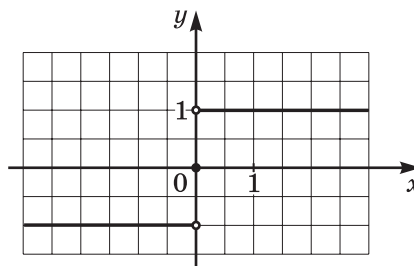


Рис. 1

жит графику, поэтому эти точки изображены «**выколотыми**» (иногда точки, не принадлежащие графику, обозначают стрелками).

Функция $y = \text{sign}(x)$ напоминает изученные нами в 7 классе кусочно-линейные функции. Однако в отличие от них у функции сигнум один из числовых промежутков, составляющих область определения, «сжался» в точку. Поэтому нам необходимо обобщить понятие кусочно-линейной функции и дополнить его случаями, когда в некоторых точках функция принимает «отдельные» значения. При таком понимании функция $y = \text{sign}(x)$ является кусочно-линейной. Попробуйте сами сформулировать новое, обобщённое определение этого понятия.

Вместе с тем в предыдущих пунктах мы выяснили, что многие реальные процессы могут описываться и нелинейными функциями. Поэтому нам необходимо продолжить обобщение понятия кусочно-линейной функции и ввести новую, так называемую **кусочно-заданную функцию**, где на каждом из промежутков функция может быть задана не только формулой $y = kx + b$, но и другими формулами самых разных видов – например, $y = x^n$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д.

Ясно, что кусочно-линейные функции также являются кусочно-заданными (а вот обратное верно не всегда!). Поэтому начнём знакомство с кусочно-заданными функциями с уточнения особенностей более простого их случая кусочно-линейных функций.

Пример 1.

Вспомним одну из простейших кусочно-линейных функций $y = |x|$. Используя определение модуля, её можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Отметим основные свойства функции $y = |x|$.

Свойство 1. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = |x|$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ – возрастает.

Свойство 2. Функция $y = |x|$ является чётной ($|-x| = |x|$), её график симметричен относительно оси ординат.

Свойство 3. Функция $y = |x|$ принимает только неотрицательные значения. Ее множество значений – промежуток $[0; +\infty)$.

График этой функции изображён на рис. 2. Её область определения разбита на два промежутка $X_1 = (-\infty; 0)$ и $X_2 = [0; +\infty)$, где $X_1 \cup X_2 = (-\infty; +\infty)$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Оба промежутка X_1 и X_2 имеют «общий конец» – точку 0, который принадлежит правому промежутку, но не принадлежит левому. При этом в точке 0 происходит «стыковка» значений функций, ведь по какой бы из формул мы бы ни вычисляли значение функции, для неё оно будет одним и тем же.

Однако подобная «стыковка» значений функций, заданных на разных промежутках, происходит далеко не всегда.

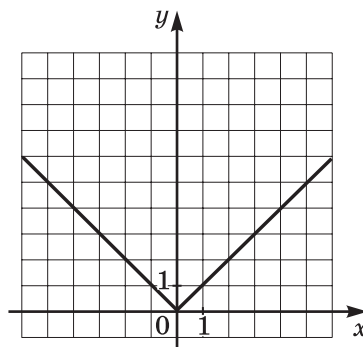


Рис. 2

Пример 2.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Область определения этой функции $X = (-\infty; +\infty)$ разбита на промежутки $X_1 = (-\infty; 0)$ и $X_2 = [0; +\infty)$. Правый конец X_1 совпадает с левым концом X_2 (точка 0), но значения функций на обоих промежутках в точке 0 не совпадают: при $x = 0$ значение $x + 1 = 0 + 1 = 1$, а значение $-x = -0 = 0$ ($1 \neq 0$).

График данной функции приведён на рис. 3. На левом участке графика точка 0 изображена «выколотой», так как концевая точка этому участку графика не принадлежит. Из-за отсутствия «стыковки» график *не соединяется в единую ломаную*.

Если определить функцию немного иначе:

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x > 0; \\ -x, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

то «выколотой» точкой будет отмечен уже не левый, а правый участок графика (рис. 4).

Во всех рассмотренных нами примерах область определения функции совпадала с числовой прямой $X = (-\infty; +\infty)$. Однако кусочно-заданные функции (и в том числе, кусочно-линейные) могут быть заданы на любом объединении числовых промежутков.

Пример 3.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq -1; \\ x-1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$

Эта функция также является не только кусочно-заданной, но и кусочно-линейной. Её график изображён на рис. 5.

Область определения данной функции является объединением двух лучей: $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = (-\infty; -1]$, $X_2 \in [1; +\infty)$. При этом правый конец X_1 (точка -1) не совпадает с левым концом X_2 (точка 1), поэтому область определения этой функции не является числовым промежутком. Во всех точках интервала $(-1; 1)$ функция не определена.

Рассмотрим теперь кусочно-заданные функции более сложного вида.

Пример 4.

Построить график функции: $y = \begin{cases} 5, & \text{если } x > 1; \\ x, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ 2, & \text{если } x = -1; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Решение:

Для построения графика кусочно-заданной функции воспользуемся алгоритмом построения кусочно-линейной функции с той лишь разницей, что на каждом из промежутков может быть получена часть не прямой, а кривой линии.

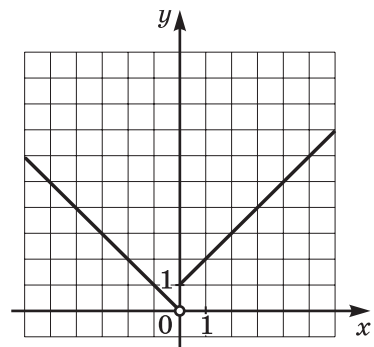


Рис. 3

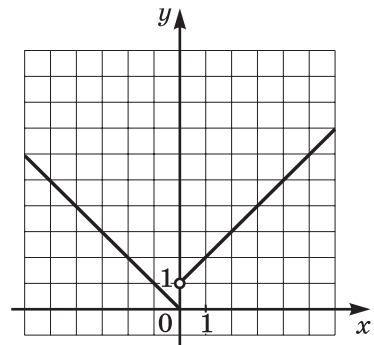


Рис. 4

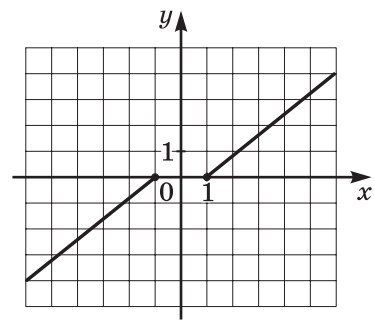


Рис. 5

Область определения функции $X = (-\infty; +\infty)$ разбита на четыре непересекающихся части. Пронумеруем их по мере движения по числовой прямой слева направо: $X_1 = (-\infty; -1)$; $X_2 = \{-1\}$; $X_3 = (-1; 1]$; $X_4 = (1; +\infty)$.

На каждом из выделенных промежутков и в точке $x = -1$ построим график, который задан соответствующей формулой.

Полученный график изображен на рис. 6. Он состоит из куска ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x < -1$; точки $(-1; 2)$; прямолинейного отрезка $y = x$ при $-1 < x \leq 1$; горизонтального луча $y = 5$ при $x > 1$. Концевые точки частей графика, не принадлежащие им, отмечены «выколотыми» точками.

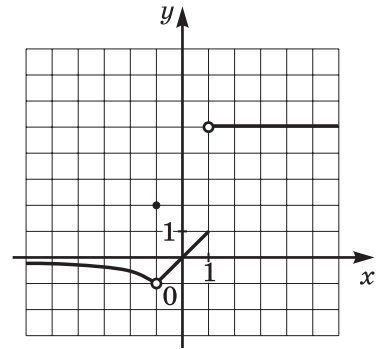


Рис. 6

* * *

Приведём примеры реальных ситуаций, которые описываются кусочно-заданными функциями.



Мы привыкли решать задачи на движение, упрощая реальный процесс. Для простоты мы обычно считаем, что объект сразу движется с постоянной скоростью, указанной в задаче. Однако в жизни это происходит иначе: сначала объект должен «набрать» эту заданную скорость. Попробуем описать прямолинейное движение объекта без подобных «математических» упрощений, используя законы, известные из курса физики.

Задача.

Автомобиль движется из состояния покоя (в момент $t = 0$) с ускорением $a = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через 3 минуты движения он достигает некоторой скорости v_0 , после чего продолжает равномерно двигаться с этой скоростью. Какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 минуту после начала движения? Через 2 минуты, 3 минуты, 5 минут, 10 минут? Постройте график зависимости $s(t)$, где время t от начала движения измеряется в минутах, s – в километрах.

Решение:

Если при прямолинейном движении скорость объекта прямо пропорционально зависит от времени ($v = at$, где коэффициент пропорциональности a называется *ускорением*), то путь, пройденный из точки начала движения ($t = 0$, $v = 0$), вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$.

1. Выразим ускорение в требуемых единицах измерения:

$$a = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0,1 \frac{\text{км} / 1000}{(\text{мин} / 60)^2} = 0,1 \cdot \frac{3600}{1000} \frac{\text{км}}{\text{мин}^2} = 0,36 \frac{\text{км}}{\text{мин}^2}.$$

2. Промежуток времени, за которое автомобиль наберет скорость v_0 , обозначим t_0 , а путь, который автомобиль пройдёт за это время, – s_0 . По условию, $t_0 = 3$ мин. Выясним, до какой скорости разгонится автомобиль за эти 3 минуты.

$$v_0 = a \cdot t_0 = 0,36 \frac{\text{км}}{\text{мин}^2} \cdot 3 \text{ мин} = 1,08 \frac{\text{км}}{\text{мин}}.$$

3. Найдём зависимость $s(t)$, где t – время от начала движения, s – путь, пройденный с момента начала движения.

3.1. Если $t \leq 3$, то пройденный путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$. Подставим в нее соответствующее значение a :

$$s(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0,36 \cdot t^2 = 0,18t^2$$

Таким образом, при $t \leq 3$ функция $s(t)$ является нелинейной функцией от t , графиком её будет часть параболы.

3.2. При $t > 3$, пройдя путь s_0 , автомобиль далее двигался равномерно со скоростью $v_0 = 1,08 \frac{\text{км}}{\text{мин}}$ в течение времени $(t - 3)$ мин. Значит, зависимость $s(t)$ на этом участке задаётся формулой:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - 3) = 0,18 \cdot 3^2 + 1,08 \cdot (t - 3) = 1,62 + 1,08t - 3,24 = 1,08t - 1,62.$$

Таким образом, при $t > 3$ пройденный с начала движения путь является линейной функцией от t , графиком этой функции будет открытый луч.

4. Итак,

$$s(t) = \begin{cases} 0,18t^2, & \text{если } t \leq 3; \\ 1,08t - 1,62, & \text{если } t > 3 \end{cases}$$

Пройденный путь $s(t)$ – кусочно-заданная функция с областью определения $X = [0; +\infty)$. Эта область определения разбивается на два непересекающихся промежутка $X_1 = [0; 3]$ и $X_2 = (3; +\infty)$.

5. Пользуясь полученной формулой, вычислим, какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 мин, 2 мин, 3 мин, 5 мин, 10 мин после начала движения.

Если $t = 1$ мин, $s = 0,18 \cdot 1^2 = 0,18$ км;

если $t = 2$ мин, $s = 0,18 \cdot 2^2 = 0,72$ км;

если $t = 3$ мин, $s = 0,18 \cdot 3^2 = 1,62$ км.

Здесь же проверим, состыкуются ли концевые точки частей графика, вычислив $s(3)$ по другой формуле:

$$s(3) = 1,08t - 1,62 = 1,08 \cdot 3 - 1,62 = 1,62.$$

Значения одинаковые, значит, части графика состыкуются.

Если $t = 5$ мин, $s = 1,08 \cdot 5 - 1,62 = 3,78$ км;

если $t = 10$ мин, $s = 1,08 \cdot 10 - 1,62 = 9,18$ км.

Построим теперь график функции $s(t)$, используя полученные координаты точек $(t; s)$ и учитывая, что $s(0) = 0$.

График изображён на рис. 7. Первый участок графика – часть параболы, отличающейся от параболы $s = t^2$ лишь постоянным коэффициентом 0,18. Вторая часть графика – участок прямой, для построения которой достаточно значений функции в двух точках (например, $t = 3$ и $t = 5$).

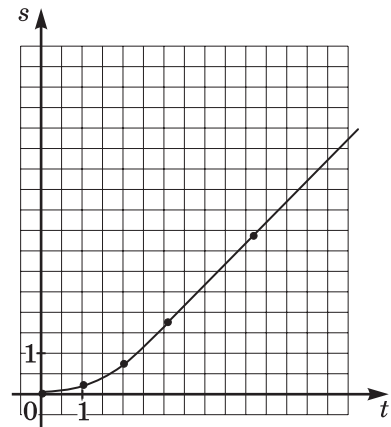


Рис. 7



1

Турист в течение первых 3 часов шёл со скоростью 4 км/ч. После этого он отдыхал в течение получаса. Следующие 2 часа он шёл со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s от времени движения t в часах.

Как называется полученная функция? Постройте её график на координатной плоскости Ost .

2

1) Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \geq 2; \\ -x+2, & \text{если } x < 2 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Чем отличаются эти функции? Какой из построенных графиков не является ломаной? На последнем графике найдите луч, начало которого не принадлежит графику функции.

$$2) \text{ Постройте график функции } y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \\ -x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Чем отличается эта функция от предыдущей? Найдите на графике этой функции лучи, начало которых не принадлежит графику.

3) Предложите, каким способом можно показать, что начало луча не принадлежит графику. Сравните свой способ с общепринятым способом, познакомившись с ещё одним примером кусочно-линейной функции на с. 3 учебника.

4) Перечислите новые особенности кусочно-линейных функций, которые вы выявили с помощью этого задания.

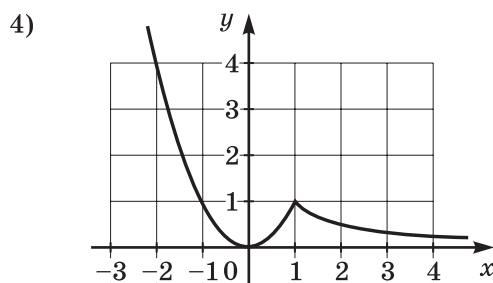
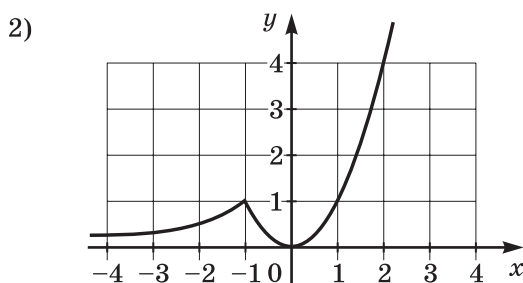
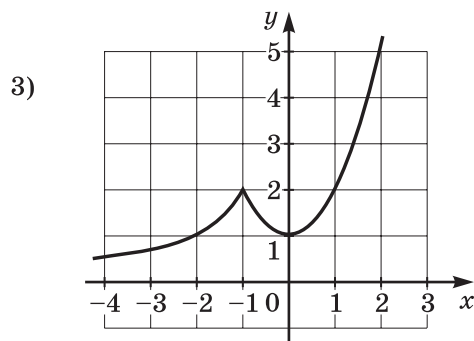
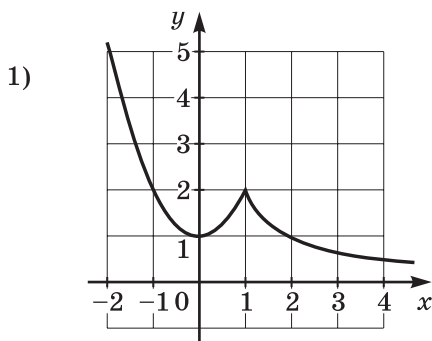
3

1) Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 1; \\ x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$. Является ли эта функция кусочно-линейной?

2) Предложите название для этой функции. Сравните его с общепринятым названием, указанным на с. 4 учебника. Приведите пример величин, связанных аналогичной зависимостью.

4

Укажите, какой из графиков задаётся функцией $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1; \\ x^2, & \text{если } x < 1 \end{cases}$



5 Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$a) y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > 4; \\ -x+9, & \text{если } x \leq 4 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > -1; \\ -x+9, & \text{если } x \leq -1 \end{cases}$$

6 Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$a) y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > 1; \\ 1, & \text{если } x = 1; \\ -2x+1, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 3x-2, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \\ x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

7 Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$a) y = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } x > 1; \\ 1, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ -2x-1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x > 2; \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ -x+1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

8 Постройте графики функций:

$$a) y = \begin{cases} 3x-4, & \text{если } x > 2; \\ x, & \text{если } -1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

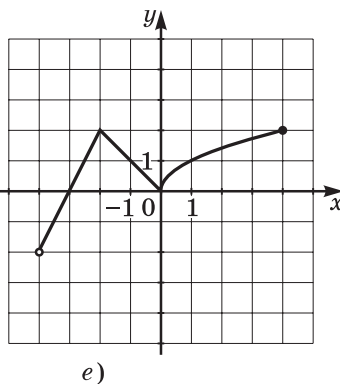
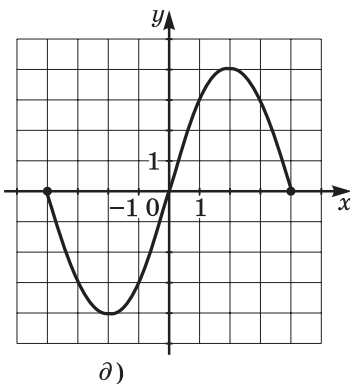
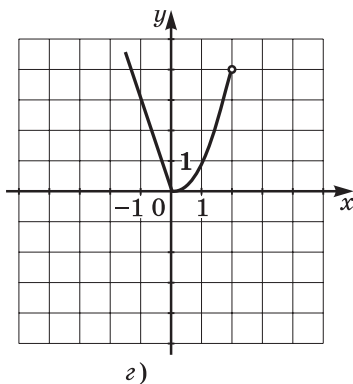
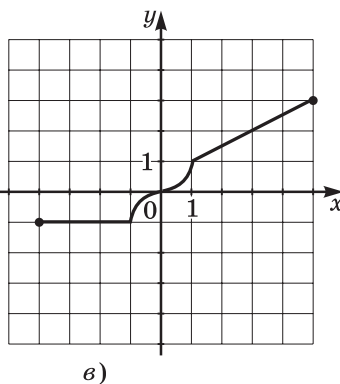
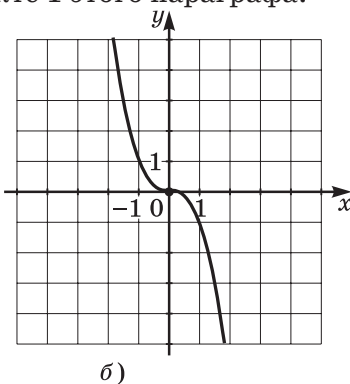
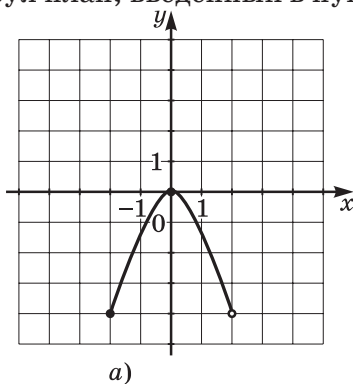
$$б) y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1; \\ 2x, & \text{если } 0 \leq x < 1; \\ -x+3, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

9 Постройте график функции:

$$a) y = \frac{24}{|x|};$$

$$б) y = -\frac{8}{|x|}.$$

10 На рисунках изображены графики функций. Прочитайте каждый график, используя план, введенный в пункте 1 этого параграфа:



- 11** Постройте график функции с заданной областью определения и «прочитайте» его:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x < 3; \\ -x^2, & \text{если } -3 < x < 0 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} x, & \text{если } 1 \leq x \leq 5; \\ x^6, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

12 Дана функция $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq -2; \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x < -2 \end{cases}$

Найдите $y(-8)$, $y(-4)$, $y(-1)$, $y(-\frac{1}{2})$, $y(0)$, $y(24)$. Постройте график функции и «прочитайте» его.

13 Дана функция $y = \begin{cases} -2x+2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ -\frac{12}{x}, & \text{если } -6 \leq x < -2 \end{cases}$

Найдите $y(-12)$, $y(-3)$, $y(-2)$, $y(-0,6)$, $y(0)$, $y(4)$.
Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

- 14** Постройте график кусочно-заданной функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} -x+4, & \text{если } x \geq 2; \\ \frac{4}{x}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x < 2; \\ 8, & \text{если } x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} 5, & \text{если } -1 \leq x \leq 5; \\ -\frac{5}{x}, & \text{если } -5 \leq x < -1; \\ -x-4, & \text{если } -6 < x < -5 \end{cases}$$

- 15** Постройте график функции и исследуйте её на чётность:

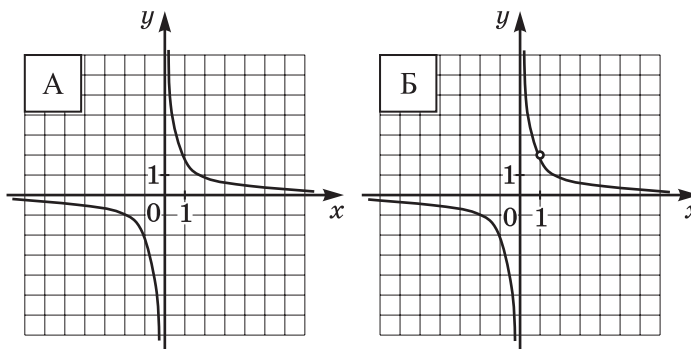
$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x+1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

- 16** На рис. А изображён график функции $y = \frac{2}{x}$. Чем отличается от него график, изображенный на рис. Б?

Укажите область определения для каждой из функций.

Какой из этих графиков совпадет с графиком функции $y = \frac{2(x-1)}{x(x-1)}$?

Объясните, как построить график функции $y = \frac{2x-2}{x^2-x}$.



17 Постройте график функции $y = \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$.

π 18 Представьте каждое из чисел в виде отношения целого числа к натуральному:

$$2\frac{3}{5}; -6; 0,37; 0; -\frac{4}{7}; 0,06; -15\frac{1}{6}.$$

19 Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{3}{9}$; б) $\frac{8}{37}$; в) $\frac{7}{15}$; г) 3;
 д) $-15,15$; е) $\frac{22}{9}$; ж) $-6\frac{5}{12}$; з) $\frac{89}{11}$.

20 Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 12,(3); б) 1,(23); в) 15,3(1); г) $-14,0(14)$; д) 8,14(8).

21 Назовите три числа, заключённых между числами:

а) 2,002 и 2,011; б) $-3,009$ и $-3,09$;
 в) $-1\frac{3}{4}$ и $-1,7(5)$; г) $\frac{1}{9}$ и 0,(2).

22 Решите неравенство $2|x - 3| + x \geq 3$.

23 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 7 - 5x \leq 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}$ 24 Как называются данные функции? Постройте их графики.

а) $y = \begin{cases} 0,5x + 0,5, & \text{если } x \geq 1; \\ x^8, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -0,5x + 0,5, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 1; \\ x^5, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -x - 2, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

25 Дана функция $y = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x > 0; \\ -\frac{3}{x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

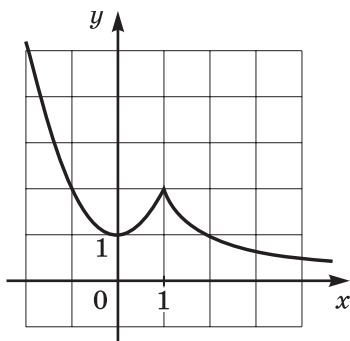
Найдите $y(-9)$, $y(-6)$, $y(-1)$, $y(-\frac{3}{5})$, $y(0)$, $y(15)$, $y(30)$. Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.



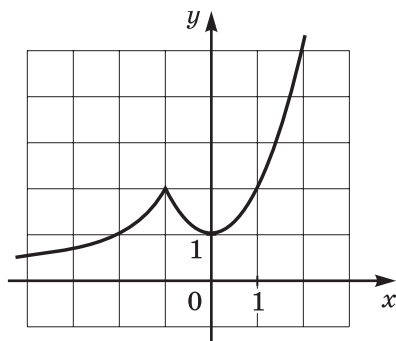
26

Укажите, какой из графиков задаётся функцией $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq -1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$

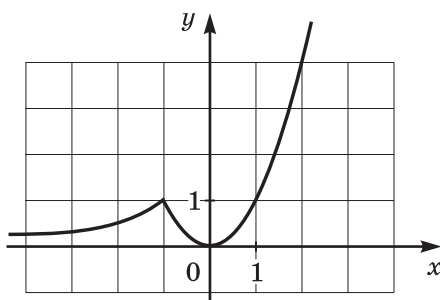
1)



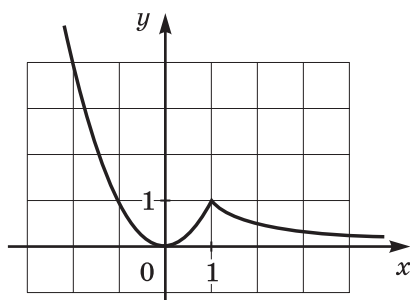
3)



2)



4)



27

Дана функция $y = \begin{cases} -9x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ -\frac{9}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Найдите $y(-9)$, $y(-4,5)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(0,5)$, $y(3)$. Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

28

Постройте график функции $y = \frac{x+1}{x^2+x}$.

29

Назовите пять целых чисел из интервала $(-1,6; 3,2)$.

30

Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{22}{6}$; г) $8,09$; д) $-\frac{5}{3}$; е) $-8\frac{7}{11}$.

31

Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) $1,(1)$; б) $2,0(9)$; в) $-6,(12)$; г) $9,8(76)$; д) $-0,13(52)$.

32

Решите неравенство $|5-x| + x \leq 5$.

33

Решите систему неравенств: $\begin{cases} 7-48x \leq -5 \\ 15x-1 \geq 2 \\ 3x < 1 \end{cases}$.

34

Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2002. Может ли их сумма равняться 9999?

35

В компании 100 акционеров, и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

§ 3. Квадратный корень

3.3.1. Арифметический квадратный корень и его свойства



Математика должна помогать философу углубляться в понятие числа, пространства и времени. Люди, посвящённые в её тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые даёт нам живопись и музыка.

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912), французский математик, физик, философ

«Открыть» – «закрыть», «взять» – «положить на место»... Мы записали пары, состоящие из обратных операций, последовательное выполнение которых возвращает её объект к исходному состоянию. Таким же образом мы можем указать и пары математических операций: «сложить» – «вычесть», «умножить» – «разделить».

Вспомним ещё одну известную нам операцию – возведение во вторую степень. А какая операция будет обратной для неё? В данном пункте мы будем искать ответ на этот вопрос, чтобы расширить свои возможности в решении практических задач.

Возведение в квадрат мы встречаем, например, при нахождении площади квадрата x по длине его стороны a (рис. 1). Для решения этой задачи нужно длину стороны a умножить саму на себя, то есть возвести в квадрат: $x = a^2$.

Поставим и решим обратную задачу (рис. 2).

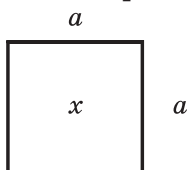


Рис. 1

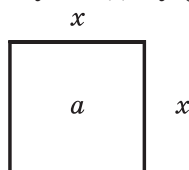


Рис. 2

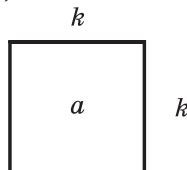
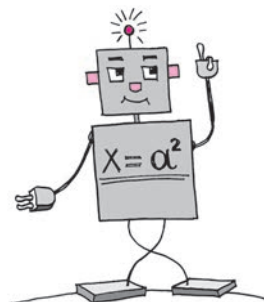


Рис. 3



Задача.

Площадь квадрата a см². Найти длину его стороны (в сантиметрах).

Для решения этой задачи нужно решить уравнение $x^2 = a$, где a – некоторое заданное неотрицательное число ($a \geq 0$). Требование $a > 0$ следует как из геометрических соображений, так и из свойства степени с чётным показателем. Если же $a = 0$, то единственным корнем уравнения является число 0. Но геометрического смысла такое решение не имеет, так как при $a = 0$ квадрат вырождается в точку.

Итак, будем искать решение уравнения $x^2 = a$ при $a > 0$. Ясно, что если число a является квадратом некоторого рационального числа k ($a = k^2$, где $k \in \mathbb{Q}$), то уравнение $x^2 = a$ имеет ровно два корня: $x = k$ и $x = -k$ (рис. 3). Из этих корней только положительный станет решением задачи. Например, корнями уравнения $x^2 = 9$ являются числа $x = 3$ и $x = -3$, но геометрический смысл имеет только решение $x = 3$.

А как найти решение, если число a не является точным квадратом? С такими примерами мы также уже встречались в 6 классе. Исследуя с помощью теоремы Пифагора длину диагонали ква-

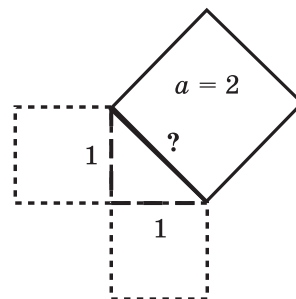


Рис. 4

драта со стороной 1 см, мы получили, что она равна длине стороны квадрата, площадь которого равна 2 см^2 (рис. 4).

Мы доказали также, что искомое число (то есть положительное число, квадрат которого равен 2) не является рациональным, так как не может быть записано конечной либо бесконечной периодической десятичной дробью. Оно представляет собой *иррациональное* число, которое записывается бесконечной непериодической дробью 1,414213561...

Можно доказать, что такое число существует не только для числа 2, но и для любого неотрицательного числа a . Возникает вопрос, как назвать и как записать это число. Неужели так длинно: «*неотрицательное число, квадрат которого равен a* »?

Естественно, что математики придумали таким числам свое название и обозначили специальным символом.

Определение. Пусть a – неотрицательное число. Тогда *арифметическим квадратным корнем* из числа a называется такое неотрицательное число x , что $x^2 = a$.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

Иными словами, $\sqrt{a}$ – это неотрицательное решение уравнения $x^2 = a$. Тогда ответ к задаче будет иметь вид: $\sqrt{a}$ см. Так, например, при $a = 16$ в ответе мы получим рациональное число $\sqrt{16} = 4$ см, а при $a = 6$ мы получим иррациональное число $\sqrt{6}$ см.

Замечание 1. В ходе решения задачи мы ещё раз убедились в том, что, помимо известных нам рациональных чисел, существуют и иррациональные числа. Все рациональные и иррациональные числа мы будем называть *действительными числами*. Множество действительных чисел обозначается $\mathbf{R}$. Действительные числа представляются десятичными дробями – конечными или бесконечными (периодическими или непериодическими). В 7 классе было показано, что любое рациональное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, и наоборот. А иррациональным числам соответствуют бесконечные непериодические дроби.

Таким образом, мы последовательно расширяли множества изучаемых нами чисел: натуральные, целые, рациональные, действительные.

Сформулируем теоремы о существовании и единственности арифметического квадратного корня на множестве новых для нас действительных чисел.

Теорема 1. Арифметический квадратный корень из любого неотрицательного действительного числа существует и является действительным числом (то есть для $\forall a \geq 0, \exists x \geq 0: \sqrt{a} = x$, где $a, x \in \mathbf{R}$).

Доказательство теоремы о существовании корня мы не приводим в данном курсе, а вот его единственность нам уже под силу доказать.

Теорема 2. Арифметический корень из неотрицательного действительного числа имеет единственное значение.

Доказательство (метод от противного):

1. Пусть $a \geq 0$. Предположим, что существует два различных арифметических корня из числа a – неотрицательные действительные числа x и y , для которых, по определению корня, верно $x^2 = a$ и $y^2 = a$.

2. Так как $x^2 = y^2$, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$.

По предположению, $x \neq y$, значит, и $x - y \neq 0$. Поэтому произведение $(x + y)(x - y)$ может равняться нулю только при $x + y = 0$, то есть при $x = -y$. Но в то же время, по условию, эти числа неотрицательны. Следовательно, $x = y = 0$.

3. Предположив, что $x \neq y$, мы получили, что $x = y = 0$. Полученное противоречие означает, что предположение неверно. Значит, $x = y$. Равенство любых двух значений $\sqrt{a}$ означает единственность значения $\sqrt{a}$, что и требовалось доказать.

Итак, мы познакомились с операцией нахождения арифметического квадратного корня из некоторого числа. Ее называют **извлечением квадратного корня**.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$. Это означает, что если из неотрицательного числа a извлечь квадратный корень, а затем результат возвести в квадрат, то получим исходное число a . Значит, операции извлечения квадратного корня и возведения в квадрат являются взаимно обратными на множестве неотрицательных чисел.

Систематизируем установленные нами в ходе рассуждений и выведем некоторые новые свойства арифметического квадратного корня.

Свойство 1. $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$

Это свойство непосредственно следует из определения квадратного корня и используется для доказательства ряда других его свойств. Поэтому его считают **основным тождеством квадратного корня**.

Свойство 2. $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \mathbf{R}$

Доказательство:

Пусть $x = |a|$, тогда x – неотрицательное число и $x^2 = (|a|)^2 = a^2$. Следовательно, число x удовлетворяет определению арифметического квадратного корня из a^2 , и, в силу единственности корня, $\sqrt{a^2} = |a|$, что и требовалось доказать.

Данное равенство называют **основным свойством квадратного корня**.

Свойство 3. $(\sqrt{a})^{2n} = a^n$, где $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$

Доказательство:

Применяя свойство возведения степени в степень и основное тождество, имеем: $(\sqrt{a})^{2n} = ((\sqrt{a})^2)^n = a^n$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$, где $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

Доказательство:

Применяя свойство возведения степени в степень и основное свойство корня, имеем: $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n|$, что и требовалось доказать.

Свойство 5. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$

Доказательство:

Пусть $x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Тогда $x^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Неотрицательное число x удовлетворяет определению арифметического квадратного корня из числа ab , и, в силу единственности корня $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

Свойство 6. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geq 0$ и $b > 0$

Доказательство:

Пусть $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Тогда $x^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.

Поэтому неотрицательное число x удовлетворяет определению арифметического корня из числа $\frac{a}{b}$, и, в силу единственности корня $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, что и требовалось доказать.

