



Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8

класс

Часть 1



УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
МЗ4



Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики

для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Авторы: Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин.

Издание выходит в pdf-формате.

Математика. Алгебра : 8 класс : учебник : в 3 частях : издание в pdf-формате / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович [и др.]. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. ISBN 978-5-09-102064-9 (электр. изд.). — Текст : электронный. ISBN 978-5-09-092187-9 (печ. изд.).
Ч. 1. — 128 с. + [4 с., вкл.] : ил.
ISBN 978-5-09-101263-7 (электр. изд.).
ISBN 978-5-09-095269-9 (печ. изд.).

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101263-7 (ч. 1, электр. изд.)
ISBN 978-5-09-102064-9 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-095269-9 (ч. 1, печ. изд.)
ISBN 978-5-09-092187-9 (печ. изд.)

© Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин, 2014, 2018, с изменениями
© АО «Издательство «Просвещение», 2021, 2022
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2021, 2022
Все права защищены

Оглавление

Глава 1. Язык и логика	3
§ 1. Искусство математических рассуждений	3
1.1.1. Искусство задавать вопросы.....	3
1.1.2. Необходимость и достаточность.....	12
1.1.3. Свойства и признаки. Критерии	18
§ 2. Сложные предложения	25
1.2.1. Сложные высказывания	25
1.2.2.* Законы логики для сложных высказываний	34
Задачи для самоконтроля к главе 1	40
Глава 2. Системы линейных уравнений и неравенств	45
§ 1. Системы линейных уравнений	45
2.1.1.* Количество решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными	45
2.1.2. Математические модели задач и системы линейных уравнений с двумя переменными	50
2.1.3. Системы двух уравнений с модулями	56
2.1.4.* Системы линейных уравнений с тремя и более переменными	61
§ 2. Системы и совокупности линейных неравенств	67
2.2.1. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной.....	67
2.2.2.* Системы неравенств с одной переменной с модулями	75
2.2.3. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы. Графическое изображение множества их решений	81
2.2.4.* Системы неравенств с двумя переменными с модулями	89
Задачи для самоконтроля к главе 2	94
Глава 3. Исследование нелинейных процессов	97
§ 1. Представление о некоторых нелинейных процессах	97
3.1.1. Степенные функции их графики	97
3.1.2. Обратная пропорциональность и её график	110
Ответы	123
Предметный указатель	127

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики

Глава 1

Язык и логика

§ 1. Искусство математических рассуждений

1.1.1. Искусство задавать вопросы



*Открытия в математике – это всегда озарения.
Ответ надо звать, и он приходит.*

Жак Адамар (1865–1963),
французский математик

В решении любой математической задачи присутствует частица открытия. Новая нестандартная задача заставляет перепробовать множество самых разных способов, а часто и придумывать новые. Задача, открывающая свою тайну только после многократных попыток её решения, запоминается надолго, а сам процесс решения приносит огромное удовольствие. А значит, чем больше задач будет решено самостоятельно, тем больше занятия математикой будут приносить удовольствие.

Важную роль при построении математических рассуждений играет умение задавать «правильные» вопросы, то есть те вопросы, ответы на которые помогают продвигаться в поисках решения задачи.

Какие же вопросы могут помочь при решении задачи?

Одним из них является вопрос, помогающий определить конечную цель:

Что требуется найти в задаче?

При этом важно не только ответить на этот вопрос, но и понять, что представляет собой искомая величина, какие значения она может принимать.

После того как мы чётко определили нашу цель, надо выяснить, какие данные у нас имеются, то есть ответить на вопрос:

Что нам дано?

Разобравшись с данными и разъяснив суть каждого используемого понятия, мы можем двигаться дальше.

Решение каждой задачи основывается на накопленном опыте и на тех знаниях о способах решения задач, которые были получены ранее, поэтому следующим вопросом, на который нужно найти ответ, будет вопрос:

Не была ли нами уже решена ранее задача с подобными неизвестными и исходными данными?

Ответ на данный вопрос поможет вспомнить все уже изученные ранее способы решения подобных задач, и если для их решения раньше был уже придуман общий метод, то им можно воспользоваться опять.

Если задачи подобного типа ещё не рассматривались и не удаётся найти ответ на предыдущий вопрос, то бывает полезно задать себе следующий вопрос:

Какие данные нужны, для того чтобы найти неизвестное?

Отвечая на этот вопрос, мы исходное неизвестное заменяем на новые неизвестные, для поиска которых возможным окажется применение уже известных методов.

На следующем этапе важно провести анализ данных, то есть ответить на вопрос:

Для чего могут понадобиться исходные данные?

Данный вопрос позволит понять, что может быть определено по известным данным. Проанализировав известное, нам будет легче установить взаимосвязи между известным и неизвестным.

Нестандартная задача может быть сформулирована таким образом, что разобраться в её условиях бывает достаточно непросто. Если условие громоздкое и запутанное, то полезно ответить на следующий вопрос:

Можно ли переформулировать исходную задачу?

Порой после переформулировки сложная на первый взгляд задача превращается в весьма простую.

Иногда сложную задачу можно разбить на несколько более простых, поэтому важно также ответить на вопрос:

Нельзя ли исходную задачу свести к решению нескольких более простых?

Приведённый список вопросов является лишь некоторой схемой, которая помогает только наметить план решения. Сам процесс решения может потребовать ответа на множество других вопросов. Но для того, чтобы начать решать задачу, полезным бывает составить первоначальный план действий, руководствуясь указанными вопросами. Возможно, первичный план поможет найти решение задачи на каком-то из его этапов. А возможно, предприняв все указанные попытки, мы так и не найдём решения задачи. Тогда нам надо будет задавать новые вопросы и искать новые пути решения. Но главное – начать действовать, так как именно в процессе действия рождаются новые идеи решения. А план нам поможет начать думать над задачей.

Итак, на основе рассмотренных вопросов мы можем составить следующий первоначальный план решения задачи.

Первоначальный план решения нестандартной задачи

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина и какие значения она может принимать.
2. Определить, что известно.
3. Попытаться найти аналогию между решёнными ранее задачами и новой задачей, а затем использовать уже известный способ решения.
4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.
5. Провести анализ данных: выяснить, что может быть определено по известным данным.
6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав её более понятной.
7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счёте, приведёт к решению исходной задачи.

Рассмотрим на примерах, как при решении задач могут быть использованы идеи данного плана.

Задача 1.

Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шел со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с.

Когда Миша и Маша выходили навстречу друг другу, их собака Тузик побежала от Миши к Маше. Добежав до Маши, она развернулась и побежала к Мише, и так она бегала, не останавливаясь, со скоростью 6 м/с от одного из них к другому, пока Миша не встретился с Машей. Сколько метров пробежала собака?

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Надо найти, сколько метров пробежала собака. Искомая величина – расстояние, положительная величина.

2. Определить, что известно.

Известно, что Миша и Маша вышли одновременно навстречу друг другу и прошли вместе расстояние 2500 м. Известны скорости их движения и скорость движения собаки. Известно, что собака бегала все время от начала движения детей и до их встречи.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решёнными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Миша и Маша вышли одновременно и двигались навстречу друг другу. Их движение может быть описано известными формулами встречного одновременного движения. Так как собака двигалась с постоянной скоростью, то её движение описывается также известной нам формулой движения $S = vt$, где S – путь, пройденный собакой, v – скорость движения собаки, а t – время её движения.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Для того чтобы найти путь, который пробежала собака, нам достаточно определить время её движения, так как её скорость нам известна. Собака двигалась всё время, пока Миша и Маша шли навстречу друг другу. Значит, время движения собаки равно времени движения детей. Найдя время движения детей, мы сможем найти время движения собаки, а значит, и путь, который она пробежала.

5. Провести анализ данных: определить, что может быть определено по известным данным.

Зная скорости движения детей и расстояние, которое они прошли при встречном одновременном движении, мы можем вычислить время их движения

$$t = \frac{2500}{1,6 + 0,9}.$$

6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав её более понятной.

Для того чтобы сделать задачу более простой, её можно сформулировать, например, следующим образом:

«Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шёл со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с. Всё то время, что дети шли навстречу друг другу, их собака Тузик бегала со скоростью 6 м/с. Сколько метров пробежала собака?»

7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счёте, приведёт к решению исходной задачи.

Решая нашу задачу, мы разбили её на две более простые: нахождение времени движения детей при встречном одновременном движении; нахождение расстояния, пройденного собакой при движении с постоянной скоростью. Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$1) \frac{2500}{1,6+0,9} = 1000 \text{ (с)} - \text{время движения детей и собаки,}$$

$$2) 6 \cdot 1000 = 6000 \text{ (м)} = 6 \text{ (км)} - \text{путь, который пробежала собака.}$$

Ответ: собака пробежала 6 км.

Задача 2.

Решите уравнение: $\frac{10x}{x+3} + \frac{11x}{x+3} = 7$.

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Нам надо найти все значения переменной x , при которых данное равенство превращается в истинное высказывание. Так как выражение $x + 3$ стоит в знаменателе дроби, то $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

2. Определить, что известно.

Нам известно, что x удовлетворяет указанному уравнению.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решёнными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Мы уже умеем решать уравнения вида $kx = c$, где k и c – некоторые рациональные числа. Заметим, что если мы обозначим $y = \frac{x}{x+3}$, то сможем записать уравнение в виде $10y + 11y = 7 \Leftrightarrow 21y = 7$.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Найдя y из линейного уравнения $21y = 7$, мы затем сможем найти x из равенства $y = \frac{x}{x+3}$, используя основное свойство пропорции.

Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$21y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x + 3 \ (x \neq -3) \Leftrightarrow 2x = 3 \ (x \neq -3) \Leftrightarrow x = 1,5 \ (1,5 \neq -3).$$

Ответ: $\{1,5\}$.

К

1

Сравните задачи. Наметьте план решения каждой из них. Что вы замечаете?

1) Из пунктов A и B одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени был в пути каждый из этих автомобилей?

2) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 360 км, одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Через сколько времени они встретились, если первый затратил на весь путь 4 часа, а второй 12 часов?

3) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 360 км, одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени после их встречи двигался каждый автомобиль до пункта назначения?

Как более простые задачи помогут в решении последней задачи? Сформулируйте идею, которая может пригодиться для решения сложных задач.

2

1) Проанализируйте уравнение:

$$\frac{2x-3}{x-6} = \frac{2x-1}{x-2}.$$

Алгоритм решения подобных уравнений вам ещё неизвестен. Аналогия с каким из предложенных ниже уравнений поможет решить данное уравнение?

а) $\frac{5x-1}{x-2} = 0$; б) $\frac{2x}{5} = \frac{x-1}{3}$; в) $x-2=5$; г) $2x-3=2x-1$.

2) Сформулируйте идею, которая может пригодиться при выполнении «новых» заданий.

3

Сопоставьте идеи, сформулированные вами при выполнении заданий № 1 и № 2 с алгоритмом на с. 4. Какие из шагов алгоритма вам удалось сформулировать самостоятельно?

4

Проанализируйте задачу:

«Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они встретились через 2 часа после выезда, а через 1 час после встречи первый велосипедист приехал в конечный пункт. Сколько времени понадобилось на весь путь второму велосипедисту?»

Аналогия с какой из приведённых ниже задач поможет решить эту задачу?

А) Мастер и ученик, работая вместе, делают всю работу за 2 часа. Мастер, работая один, будет выполнять эту работу на час дольше. За сколько времени эту работу выполнит ученик, если производительность каждого из них не меняется?

Б) Из пунктов A и B , расстояние между которыми составляет 243 км, навстречу друг другу выехали мотоциклисты. Скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости второго. С какой скоростью двигался каждый из них, если известно, что через 1 ч 48 минут они встретились?

Решите задачу с помощью найденной аналогии.

5

Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2x-5}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$; б) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 1$; в) $x^5 - x^3 = 0$; г) $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

6

Решите задачу И. Ньютона.

Купец ежегодно расходует 100 фунтов стерлингов на содержание семьи и приумножает остальной капитал на одну треть. Через три года он стал вдвое богаче. Как велик стал его капитал?

π

7

Решите задачу:

а) Один насос наполнил бассейн, а другой за это же время наполнил бассейн объёмом на 600 м^3 больше. Определите объёмы бассейнов, если один из насосов накачивает 70 м^3 в час, другой – 120 м^3 .

б) Ученики седьмых и восьмых классов получили в библиотеке 286 учебников, причём восьмиклассники получили на 20% больше, чем семиклассники. Сколько учебников получили восьмиклассники?

8

Является ли данное предложение высказыванием? Если является, то сформулируйте его отрицание. Какое из этих высказываний истинно?

- 1) Существуют числа, не являющиеся рациональными.
- 2) В прямоугольном треугольнике гипотенуза короче катета.
- 3) Л. Н. Толстой родился в 1828 году.
- 4) Если бы можно было не ходить в школу!
- 5) Для любого натурального числа n верно, что число $n^3 - n$ делится на 6.
- 6) Для любого натурального числа n число $n^3 - n$ делится на 5.
- 7) И. Ньютон сформулировал три фундаментальных закона механики.
- 8) Я учусь в восьмом классе.
- 9) Если бы я родился на год позже, то я бы сейчас учился в седьмом классе.
- 10) Через пять лет я буду учиться в институте.
- 11) Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой.
- 12) Вопросительное предложение не является высказыванием.

9

Для двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

- 1) A : квадрат натурального числа n делится на 7;
 B : натуральное число n делится на 7.
- 2) A : квадрат натурального числа n при делении на 3 даёт остаток 1;
 B : натуральное число n при делении на 3 даёт остаток 1.
- 3) A : квадрат натурального числа n при делении на 7 даёт остаток 2;
 B : натуральное число n при делении на 7 даёт остаток 4.
- 4) A : число $n!$ делится на 13;
 B : натуральное число n больше 11.

10

Вычислите устно:

а) $0,6 \cdot \frac{2}{3}$

б) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

в) $-0,25 \cdot \frac{4}{7}$

г) $(0,6)^2$

: $(-0,08)$

: $(-1,2)$

$-2\frac{6}{7}$

: $0,04$

+ $3\frac{12}{17}$

$-(-7\frac{1}{5})$

: $0,02$

$-\frac{3}{5}$

$\left(-3\frac{1}{11}\right)$

$-11,8$

+ 155

$-4,4$

?

?

?

?

11

Найдите значение выражения:

а) $3 \cdot 0,8 \cdot 0,0005$;

б) $1,2 \cdot 0,07 \cdot 0,5$;

в) $-0,4 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$;

г) $1\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right) \cdot (-0,6)$;

д) $\left(-3\frac{5}{6}\right) \cdot 0,4 \cdot 1\frac{1}{23};$

е) $0,3 \cdot \left(-7\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{19};$

ж) $\frac{7}{9} + \frac{2}{9} \cdot 0,9;$

з) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0,6;$

и) $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 3 - 9\frac{1}{6};$

к) $\frac{13}{15} - 2\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2\frac{2}{5};$

л) $2\frac{3}{4} + \left(3\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10}\right) \cdot 1\frac{1}{4};$

м) $\left(2,125 \cdot 1\frac{15}{17} - 1\frac{7}{12}\right) : 7,25.$

12 Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{x}{\left(7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5}\right) : 0,35} = \frac{\left(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73\right) : (-1,73)}{7\frac{1}{5} : 2,4}.$$

13 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $1\frac{1}{3};$ в) $-2\frac{2}{3};$ д) $3\frac{5}{6};$ ж) $4\frac{4}{5};$

б) $1\frac{44}{45};$ г) $2\frac{61}{90};$ е) $-17\frac{28}{225};$ з) $-5\frac{15}{22}.$

14 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 3,(6); в) 94,32(1); д) -7,2(72);

б) 0,(13); г) -7,0(7); е) 17,01(32).

15 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является значение выражения:

а) $-5 \cdot 7^{24};$ б) $(-5 \cdot 7)^{18};$ в) $5 \cdot (-7)^7;$ г) $-(5 \cdot 7)^8.$

16 Расположите числа в порядке возрастания и расшифруйте фамилию автора высказывания: «Счастье не в том, чтобы делать всегда, что хочешь, а в том, чтобы всегда хотеть того, что делаешь».

О $\left(\frac{1}{8}\right)^{100};$ **С** $3,5^0;$ **Т** $-7^{22};$ **Л** $(-1)^{73};$ **Й** $(-8)^{30};$ **О** $(-2)^{19};$ **Т** $\left(\frac{1}{8}\right)^{101}.$

Как вы понимаете это высказывание, согласны ли вы с ним?

17 Во сколько раз изменится объём куба, если его ребро увеличить:

а) в два раза; б) в три раза; в) в четыре раза; г) в пять раз?

18 Найдите значение выражения:

а) $(-3)^3 - (-1)^6 + 5^2 + 7;$ б) $(0,125)^6 \cdot 8^8;$ в) $\frac{4^3 \cdot 2^5}{8^3};$

г) $(-1)^9 - (-1)^5 - (-1)^4;$ д) $\frac{(0,1)^3 \cdot (0,1)^8}{(0,1)^9};$ е) $\frac{18^{15}}{9^{14} \cdot 2^{16}};$

$$\begin{array}{lll} \text{ж)} 2^5 \cdot (0,5)^3; & \text{з)} \frac{(5^2)^3 \cdot 5^{10}}{(5^3)^5}; & \text{и)} \frac{2^n \cdot 7^n}{14 \cdot 14^n}; \\ \text{к)} (0,25)^3 \cdot 4^3; & \text{л)} \frac{7^9 \cdot 49^3}{7^{14}}; & \text{м)} \frac{10^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}. \end{array}$$

19 Найдите значение выражения:

$$\frac{(36^2 : 6^3) \cdot 5^{15} \cdot 2^7 \cdot (2^9)^2 \cdot \left(\frac{35^{36}}{35^{30}}\right)}{14^5 \cdot (3^{20} : 3^{17}) \cdot 5^{20} \cdot 2^{23}} + (11,1)^0.$$

20 **Эстафета.** Выполнение заданий начинается с первого номера, верный ответ каждого задания показывает номер задания, которое надо выполнить следующим. Посоревнуйтесь со своим товарищем по парте. В эстафете выигрывает тот, кто первым называет правильный ответ последнего задания.

1. Решить уравнение: $(x+1)^3 = 64$.

2. Вычислить: $\frac{(5^8)^3 \cdot 5^5}{(5^2)^{10} \cdot (5^4)^2}$.

3. Решить уравнение: $5^{2n} = 625$.

4. Вычислить: $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^6$.

5. Вычислить: $-5^2 + (-5)^2 + 4$.

Д

21 Решите задачу:

«Для трёх кроликов на 2 дня накосили 12 кг травы. Сколько травы нужно заготовить на 3 дня для 7 кроликов, если каждый кролик в день съедает одинаковое количество сена?».

Какой из шагов плана решения нестандартной задачи подал вам основную идею для её решения?

22 Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^2} = -4$; б) $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$.

23 Решите задачу:

а) Моторная лодка развивает скорость в стоячей воде 15 км/ч. Рыбак проплыл на ней против течения реки 30 ч, а затем вернулся на прежнее место за 20 ч. Какова скорость течения реки?

б) В цехе поставили автоматический станок, производительность которого выше производительности рабочего на 95 деталей в час. За 18 минут автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

в) Морской круизный лайнер должен был преодолеть расстояние между портами за 10 ч. Спустя 8 часов после отправления он увеличил скорость на 5 км/ч, поэтому в порт пришел раньше на 15 минут. С какой скоростью должен был плыть лайнер?

24 Из двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

- 1) A : квадрат натурального числа n делится на 5;
 B : натуральное число n делится на 5.
- 2) A : квадрат натурального числа n при делении на 5 дает остаток 1;
 B : натуральное число n при делении на 5 дает остаток 1.
- 3) A : натуральное число n больше 10;
 B : число $n!$ делится на 3.
- 4) A : числа m и n целые;
 B : сумма чисел m и n — целое число.

25 Найдите значение выражения:

- а) $\left(3,6 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0,6$; в) $(3,4 \cdot 2,8 - 7,15) : 0,01$;
- б) $12\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} \cdot \left(3,2 - \frac{1}{5}\right)$; г) $7\frac{3}{4} \cdot \left(-2\frac{2}{31}\right) - \left(-5\frac{1}{6}\right) : 2\frac{7}{12}$.

26 Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{12\frac{4}{5} \cdot 3,75 - 6\frac{2}{5} \cdot 3,125}{x} = \frac{3\frac{3}{5} : \frac{3}{45}}{7,2 + 0,8 \left(5,5 - 3\frac{1}{4}\right)}.$$

27 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

- а) $-10,(27)$; б) $1,0(27)$.

28 Вычислите:

- а) $(-5+3)^3$; б) $(-5)^3 + 3^3$; в) $0,25^6 \cdot 4^8$; г) $\frac{2^6 \cdot (2^3)^3}{2^{15}}$.

29 Найдите значение выражения:

- а) $\left(-0,2^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot (8 - (-4)^3)\right) : (-0,1)^2$;
- б) $\frac{55^4 \cdot (3^3)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 11}{(11^5)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (6:11)^5 \cdot 10^4}$.

с

30* Прочитайте предложения:

A : Натуральное число n не делится на 7;

B : В представлении рационального числа $\frac{n}{7}$, где n — натуральное число, десятичной дробью имеется период из шести цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Из этих предложений сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Проведите доказательство методом от противного.

1.1.2. Необходимость и достаточность



*Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит.*

Михаил Ломоносов (1711–1765)
русский учёный-естествоиспытатель,
основатель Московского университета

Понятиями, важными не только для грамотного проведения математических рассуждений, но и для построения любых рассуждений, являются понятия «*необходимости*» и «*достаточности*».

В повседневной жизни мы часто используем слова «необходимо» и «достаточно». Например, «мне необходимо сделать домашнее задание» или «мне этого достаточно». При этом эти слова иногда употребляются в разных смыслах. Так, когда вы говорите, что для того, чтобы дойти из дома до школы, вам необходимо 20 минут, то, скорее всего, вы имеете в виду, что за это время вы успеете дойти до школы. На самом деле вы хотите сказать, что на путь из дома до школы вам достаточно 20 минут. А когда вы говорите, что для того чтобы поехать во Францию вам нужна виза, вы имеете в виду, что без визы вас во Францию не пустят и здесь слово «необходимо» употребляется уже в другом смысле.

Так как математика не допускает нескольких различных толкований одного и того же понятия, нам важно разобраться с математическим смыслом этих слов.

Для этого рассмотрим следующее высказывание:

«Если Миша умеет читать по-английски, то он знает буквы английского алфавита». Это высказывание можно записать в виде $A \Rightarrow B$, где

- предложение A : «Миша умеет читать по-английски»,
- предложение B : «Миша знает буквы английского алфавита».

Данное высказывание можно переформулировать следующим образом: «Из того что Миша умеет читать по-английски, следует, что он знает буквы английского алфавита». Это высказывание истинное.

А вот обратное высказывание: «Из того что Миша знает буквы английского алфавита, следует, что он умеет читать по-английски» ложно.

Какое же условие является здесь необходимым, а какое достаточным?

Определение. Если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно, то A называется *достаточным условием* для B , а B – *необходимым условием* для A .

Итак,

$A \Rightarrow B$ – истинное
 A – достаточное условие для B
 B – необходимое условие для A

В нашем случае истинно высказывание: «Из того, что Миша умеет читать, следует, что он знает буквы». Значит, *знание букв* – необходимо для *умения читать*, а *умение читать* – достаточно для *знания букв*.