



Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

Алгебра

7

класс

Часть 1



УДК 373:51
ББК 22.1я721
П29



Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики

для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Издание выходит в pdf-формате.

Петерсон, Людмила Георгиевна.

П29 Алгебра. 7 класс : учебник : в 3 частях : издание в pdf-формате / Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022.

ISBN 978-5-09-102063-2 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-090300-4 (печ. изд.).

Ч. 1 — 136 с. : ил. + Вкл. к учебнику (4 с.)

ISBN 978-5-09-101260-6 (электр. изд.).

ISBN 978-5-09-090299-1 (печ. изд.).

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-101260-6 (ч. 1, электр. изд.)
ISBN 978-5-09-102063-2 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-090299-1 (ч. 1, печ. изд.)
ISBN 978-5-09-090300-4 (печ. изд.)

© Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова, 2011, 2014, 2018
© АО «Издательство «Просвещение», 2020
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2020
Все права защищены

Оглавление

Глава 1. Построение математической теории	3
§ 1. Математическое моделирование	3
1.1.1. Математическая модель реальной задачи	3
1.1.2. Основные требования к математической модели	10
§ 2. Основы построения математической теории*	16
1.2.1. Метод построения математической теории	16
1.2.2. Некоторые методы математического доказательства	23
1.2.3. Логический вывод	28
1.2.4. Логические ошибки	34
Задачи для самоконтроля к главе 1	41
Глава 2. Введение в теорию делимости	45
§ 1. Делимость на множестве натуральных чисел	45
2.1.1. Делимость чисел и её свойства	45
2.1.2. Простые числа	52
2.1.3. Деление с остатком	58
2.1.4. Алгоритм Евклида	64
§ 2. Развитие теории делимости*	69
2.2.1. Делимость целых чисел	69
2.2.2. Классификация целых чисел по остаткам от деления	76
2.2.3. Сравнения и их свойства	81
2.2.4. Арифметика остатков	88
2.2.5. Решение задач с помощью сравнений	93
Задачи для самоконтроля к главе 2	99
Глава 3. Законы равносильных преобразований алгебраических выражений	103
§ 1. Рациональные числа и законы арифметики	103
3.1.1. Множество рациональных чисел	103
3.1.2. Законы арифметических действий и равносильные преобразования	110
§ 2. Равносильные преобразования алгебраических выражений	116
3.2.1. Равносильные преобразования алгебраических сумм	116
3.2.2. Равносильные преобразования произведений	122
Задачи для самоконтроля к главе 3	128
Ответы	131
Предметный указатель	133
Таблица квадратов натуральных чисел до 100	134
Простые числа до 1000	135

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики

Глава 1

Построение математической теории

§ 1. Математическое моделирование

1.1.1. Математическая модель реальной задачи



Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, физик и философ

При изучении проблем физики, химии, биологии, экономики и многих других наук сегодня широко используется математическое моделирование. Наблюдая за явлениями окружающего мира, учёные стараются выявить их наиболее существенные свойства и установить закономерности, которым они подчиняются. Когда результаты таких наблюдений получается записать на математическом языке, удаётся построить математическую модель явления.

Иногда, казалось бы, различные явления или процессы описываются одними и теми же законами. Тогда возникает возможность дать их единое описание. Вот здесь и проявляется практическое удобство математического моделирования. Например, формула $a = bc$ может описывать как прямолинейное равномерное движение ($s = vt$), так и равномерную работу ($A = wt$) и множество других равномерных процессов. Поэтому при решении задач данного типа мы, например, можем легко найти значения величин v и w по общему правилу нахождения неизвестного множителя ($v = s : t$, $w = A : t$).

Язык математики, состоящий, в частности, из чисел, букв и выражений, уравнений и неравенств, помогает записать взаимосвязи, лежащие в основе различных процессов. А это уже позволяет упростить решение многих практических задач.

Идея моделирования состоит в замене реального объекта некоторым его «заместителем», называемым *моделью*. Сначала свойства изучаемого объекта формулируются, например, на языке физики. Таким образом строится физическая модель. Построенная физическая модель – это фактически текст математической задачи. Записав его на математическом языке, мы получим *математическую модель*.

При построении модели, как правило, происходит упрощение первоначальной задачи. Так, в задачах, которые мы рассматривали ранее, рабочие работали с одинаковой производительностью, а все объекты двигались с одинаковой скоростью. Конечно же, упрощение при моделировании происходит не только в школьных учебниках, но и в реальной жизни. Например,



автопилот самолёта всегда проще человека – пилота, а компьютерная имитация игры в футбол проще реальной игры.

Процесс *математического моделирования*, как мы уже знаем, включает в себя три этапа. Вспомним их.

I. Построение математической модели.

На данном этапе текст задачи переводится на математический язык. Для этого определяется, что известно, что надо найти, устанавливаются взаимосвязи между известными и неизвестными величинами, вводятся буквенные обозначения, составляются математические соотношения: уравнения и неравенства. При этом важно выбрать буквенные обозначения таким образом, чтобы полученные соотношения имели как можно более простой вид.

II. Работа с математической моделью.

В результате перевода практической задачи на математический язык могут возникнуть два случая:

1) имеется математическая теория, позволяющая получить решение данной задачи;

2) такой математической теории не существует.

В первом случае мы просто выбираем способ, позволяющий получить решение задачи. Во втором случае мы должны создать новый или усовершенствовать некоторый старый способ таким образом, чтобы получить в итоге решение данной задачи (и одновременно всех других подобных задач). При этом происходит развитие и самой математической теории.

Математика может развиваться также, исходя лишь из своей внутренней логики и красоты, опережая потребности практики. Так, например, Евклид ещё до нашей эры заложил основы теории делимости, а сегодня она широко используется в задачах шифрования и дешифрования текстов.



III. Практический вывод.

Получив решение математической задачи, необходимо его проанализировать, то есть разобраться в его реальном смысле, а затем сделать выводы. В этом состоит третий этап математического моделирования.

Таким образом, математическое моделирование позволяет свести решение большого числа внешне различных практических задач к решению уравнений и неравенств. А это, в свою очередь, ведёт к развитию математической теории, в частности к развитию теории уравнений и неравенств.

Но для начала нам надо научиться *строить удобные математические модели, приводящие к уравнениям, способ решения которых известен*. И тогда следующий шаг – применение знакомого алгоритма – не составит труда, являясь, как говорят, «делом техники».

Вспомним и уточним известный нам алгоритм решения задач методом математического моделирования. Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача. Мама купила Мише книги и диски. Вместе книг и дисков было 9. Известно, что количество купленных мамой книг при делении на 3 даёт остаток 1, а количество купленных ею дисков при делении на 3 даёт остаток 2. Один из дисков Миша подарил своей сестре. Сколько дисков у него осталось?

Решение:

I. Построение математической модели.

Фиксируем, что известно и что надо найти.

Нам известно, что мама купила общим числом 9 книг и дисков. Количество книг при делении на 3 даёт остаток 1, количество дисков при делении на 3 даёт остаток 2. Один из дисков Миша подарил своей сестре.

Нужно найти, сколько дисков осталось у Миши.

Выбираем неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.

Обозначим x – количество книг, а y – количество дисков, которые купила мама.

Из условия задачи следует, что $x \in N$ и $y \in N$.

Устанавливаем взаимосвязи между известными и неизвестными величинами.

Так как x при делении на 3 даёт остаток 1, то по формуле деления с остатком $x = 3a + 1$ ($a \in N_0$), где N_0 – множество натуральных чисел и 0.

Аналогично $y = 3b + 2$ ($b \in N_0$).

Составляем уравнение.

По условию, сумма искомым чисел равна 9, значит, $x + y = 9$.

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны полученными уравнениями.

Таким образом, мы получили математическую модель, состоящую из трёх уравнений и требований к переменным, входящим в эти уравнения. Запишем их все вместе и *зафиксируем значение величины, которое требуется найти.* (Фигурная скобка обозначает, что все уравнения должны выполняться одновременно.)

$$\begin{cases} x + y = 9, x \in N, y \in N; \\ x = 3a + 1, a \in N_0; \\ y = 3b + 2, b \in N_0. \end{cases} \longrightarrow \boxed{y - 1 = ?}$$

Заметим, что в ходе построения математической модели мы выделили три важных шага, не зафиксированные в алгоритме, который использовался нами ранее:

✓ мы определили множество значений, которые могут принимать неизвестные величины;

☞ проверили, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением;

★ зафиксировали искомую величину.

Каждый из этих новых выделенных шагов непосредственно влияет на правильность построения модели и правильность ответа, поэтому необходимо дополнить этими шагами построенный ранее алгоритм.

II. Работа с математической моделью.

После того как модель построена, можно в первое уравнение вместо x и y подставить соответствующие им выражения и выполнить несложные преобразования полученного уравнения, помня, что $x, y \in N, a, b \in N_0$:

$$\begin{aligned} (3a + 1) + (3b + 2) &= 9 \Leftrightarrow 3(a + b) = 6 \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = 0, b = 2, \text{ или } a = 1, b = 1, \text{ или } a = 2, b = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 1, y = 8, \text{ или } x = 4, y = 5, \text{ или } x = 7, y = 2. \end{aligned}$$



Тогда количество дисков, оставшихся у Миши, равно:

$$y - 1 = 7, \text{ или } y - 1 = 4, \text{ или } y - 1 = 1.$$

III. Практический вывод.

Итак, мы получили, что данная задача имеет три решения, для каждого из которых значения величин x и y соответствуют условию задачи: полученные значения – натуральные числа, при этом во всех указанных случаях число книг при делении на 3 даёт остаток 1, а число дисков при делении на 3 даёт остаток 2.

Ответ: у Миши осталось либо 7 дисков, либо 4 диска, либо 1 диск.

В итоге мы пришли к следующему уточнённому варианту алгоритма решения задач методом математического моделирования:

Алгоритм решения задач методом математического моделирования

I. Построение математической модели.

1. Внимательно прочитать задачу.
2. Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3. Проверить соответствие единиц измерения величин.
4. Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6. Установить взаимосвязи между величинами.
7. Составить уравнение и обосновать его.
8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.
9. Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод.

11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

К

1

Запишите решение задачи в виде буквенного выражения и найдите его значение для:

а) $n = 208, m = 50;$

в) $n = 242, m = 110;$

б) $n = 180, m = 46;$

г) $n = 210, m = 62.$

1) За книгу и фотоальбом заплатили n р. Книга стоила на m р. дороже фотоальбома. Сколько стоила книга?

2) Автомобиль и автобус проехали вместе n км. Известно, что автобус проехал на m км меньше, чем автомобиль. Сколько километров проехал автомобиль?

3) Двое рабочих сделали вместе n деталей. При этом первый рабочий сделал на m деталей больше, чем второй. Сколько деталей сделал первый рабочий?



2 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Петю спросили, сколько ему лет. Он ответил: «Если из моего удвоенного теперешнего возраста вычесть утроенный мой возраст, который был восемь лет назад, то получится мой теперешний возраст». Сколько лет Пете?

б) Когда повара спросили, сколько яиц нужно взять, чтобы приготовить пирог, он ответил: «Если взять на 3 яйца меньше, чем это необходимо, увеличить это число в 5 раз, а затем вычесть из полученного результата число, в 2 раза большее необходимого числа яиц, то получится число, на 5 большее искомого». Сколько яиц нужно взять, чтобы приготовить три пирога по рецепту этого повара?

в) Высота Останкинской башни на 216 м больше, чем Эйфелевой. Если высоту Останкинской башни увеличить в 3 раза, а из высоты Эйфелевой башни вычесть 134 и сложить полученные величины, то получится 1810. Чему равна высота Останкинской башни?

3 Решите задачу:

а) Выручка книжного магазина (поступление денежных средств от покупателей) составила в первом квартале 700,46 тыс. р. Известно, что в январе выручка была на 49,58 тыс. р. больше, чем в феврале, а в марте – на 178,92 тыс. р. меньше, чем в феврале. Сколько денежных средств получил магазин от покупателей в марте?

б) Три файла занимают на диске 112,73 Мб. Размер второго файла на 4,54 Мб меньше, чем первого, а размер третьего файла — на 5,61 Мб больше, чем первого. Каков размер второго файла?

в) Шоколадная фабрика выпустила в августе 524,48 тонны конфет трёх сортов: «Миндальные», «Клубничные», «Сливочные». При этом миндальных конфет произвели на 39,56 тонны меньше, чем клубничных, а сливочных – на 97,69 тонны больше, чем клубничных. Сколько миндальных конфет произвели на шоколадной фабрике в августе?



4 а) Компания «Дискоспэйс» выпускает диски DVD. Стоимость изготовления одного диска составляет 50 р. При этом компания несет ежемесячно следующие расходы: аренда помещений – 50 000 р., зарплата персонала – 100 000 р., лицензии и авторские гонорары – 200 000 р., прочие расходы – 30 000 р. Цена продажи одного диска составляет в среднем 250 р. Какое количество дисков должна продавать компания ежемесячно, чтобы окупать все свои расходы?

б) Компания «Шокодрим» продает шоколадные батончики. Стоимость закупки одного батончика составляет 24 р., а стоимость продажи – 32 р. В месяц компания продаёт 80 000 батончиков. Какими должны быть другие ежемесячные расходы компании, чтобы её прибыль равнялась нулю?

в) Компания «Лайтстар» продает многофункциональные туристические фонари. Стоимость продажи одного фонаря составляет 570 р. Ежемесячно компания несёт следующие расходы: аренда помещений – 300 000 р., зарплата персонала – 400 000 р., прочие расходы – 76 900 р. В месяц компания продаёт 4570 фонарей. По какой максимальной цене может закупать компания эти фонари, чтобы покрывать все свои расходы?

5

Постройте математическую модель и решите задачу:

- а) Сумма двух натуральных чисел равна 12. Первое число при делении на 5 даёт остаток 3, а второе число при делении на 5 даёт остаток 4. Найдите эти числа.
- б) Сумма двух натуральных чисел равна 28. Первое число при делении на 8 даёт остаток 5, а второе число при делении на 8 даёт остаток 7. Найдите эти числа.
- в) Сумма двух натуральных чисел равна 44. Первое число при делении на 11 даёт остаток 9, а второе число при делении на 11 даёт остаток 2. Найдите эти числа.
- г) Сумма двух натуральных чисел равна 47. Первое число при делении на 15 даёт остаток 11, а второе число при делении на 15 даёт остаток 6. Найдите эти числа.

 π

6

Разбейте записи на три группы: выражения, уравнения, неравенства.

- а) $158 + 2 \cdot 6$; в) $-1 = 3(7a + 2)$; д) $a^3 - b^3$; ж) $-1,04 \leq 2c < \frac{1}{9}$;
- б) $0,5y - 45 = 5x$; г) $2 > 3$; е) $(a - b)^3$; з) $d^2 \geq 0$.

Вспомните, какими особенностями обладает каждая из этих групп.

7

Что общего во всех высказываниях?

- а) Разностью двух чисел $a - b$ называется число c , такое, что $a = b + c$.
- б) Средним арифметическим нескольких чисел называется результат деления суммы этих чисел на их количество.
- в) Переменной величиной называется буквенное обозначение для элемента некоторого множества.
- г) Натуральной (n -й) степенью числа a называется число a^n , равное произведению n множителей, каждый из которых равен a .

8

Запишите следующие выражения:

- 1) сумма квадратов двух чисел; 3) разность квадратов двух чисел;
- 2) квадрат суммы двух чисел; 4) квадрат разности двух чисел.

Найдите значения полученных выражений для чисел:

- а) 8 и 2; б) -4 и 3; в) 7 и -5; г) -9 и -6.

9

Решите уравнение:

- а) $2(x - 9,5) - 3(x + 1,8) = -4,4$; в) $-4(x - 7,6) = 8(x - 1,8) - 3,2$;
- б) $5,7 - (x - 11,3) = 2(x + 3,7)$; г) $15,3 - 2(x - 0,9) = -0,7 + 3(x - 2,4)$.

10

Решите задачу:

- а) Автомобилист проехал за два дня 580 км, причём в первый день он проехал расстояние в 1,5 раза большее, чем во второй. Сколько километров проехал автомобилист в первый день?
- б) Расходы предприятия на закупку сырья увеличились в марте в 2,1 раза по сравнению с февралем. Всего в феврале и марте на закупку сырья потратили 1643 тыс. р. Какую сумму потратило предприятие на закупку сырья в марте?
- в) Задумали три натуральных числа. Известно, что их сумма равна 960. Первое число на 36 больше второго, а второе в 2,5 раза больше третьего. Какие числа задумали?

г) Команда из 4 бегунов участвовала в эстафете. Их результат составил 104,3 с. Первый бегун пробежал свою часть дистанции на 3 с быстрее второго, второй – на 2,1 с медленнее третьего, а четвертый – на 1,6 с медленнее первого. За сколько секунд пробежал четвертый бегун свою часть дистанции?

D

11 Решите задачу:

а) Выручка магазина составила в этом году на 323,69 тыс. р. больше, чем в предыдущем. Всего за эти два года магазин получил выручку в размере 927,45 тыс. р. Сколько денег получил магазин от покупателей в этом году?

б) В вагоне метро, после того как из него вышли 9 человек, а вошли 17 человек, стало в 1,5 раза больше людей, чем было до этого. Сколько человек стало в вагоне?

12

Запишите следующие выражения:

1) сумма кубов двух чисел; 2) куб суммы двух чисел.

Найдите значения полученных выражений для чисел:

а) 3 и 1; б) -5 и 2.

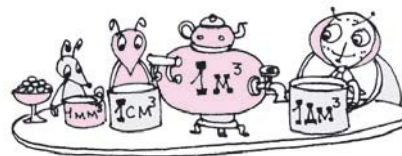
Что вы замечаете?

13

Решите уравнение:

а) $-(x + 15,4) = -5,4 + (3,7 - 2x)$;

б) $x + 12,3 - 5(x - 5,9) = 8,6$.



14

Выполните вычисления и расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Вы узнаете название раздела математики, основоположником которого был великий французский математик Анри Пуанкаре.

П $-4,3 + (-3,1 - 7,8)$

Л $-(11,8 - 3,6) + 2,5$

О $-6,4 + 5,2 - (12,7 - 3,5)$

О $(0,5 + 14,9) - (17,4 + 1,9)$

Я $-(11,2 - 2,4 - 32,5)$

Т $(18,1 - 17,3 + 2,5) - 34,5$

И $5,8 + 13,1 - (-3,4)$

О $45,7 - 38,9 + (-28,4)$

Г $3,2 + 15,8 - (-5 + 4)$

C

15*

Выпускники школы после выпускного вечера обменялись фотографиями каждый с каждым. Всего потребовалось 650 фотографий. Сколько было выпускников?

16*

Мальчик спустился по движущемуся вниз эскалатору метро и насчитал 45 ступенек. Затем он с той же скоростью поднялся вверх по этому эскалатору и насчитал 225 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, пройдя по неподвижному эскалатору?



1.1.2. Основные требования к математической модели



*Вместо того чтобы искать некоторое соотношение,
надо спросить, возможно ли такое соотношение.*

Нильс Хенрик Абель (1802–1829),
норвежский математик

В предыдущем пункте мы говорили о том, что построение математических моделей является эффективным методом исследования явлений и объектов окружающего мира. Математическое моделирование позволяет не только их изучать, но и управлять ими. Хорошо построенная модель помогает даже прогнозировать (предвидеть, определять заранее) моделируемое явление.

Математическая модель – это инструмент в руках исследователя. Для эффективности его использования он должен быть *достаточно простым*.

Вместе с тем, важно находить разумный баланс между простотой модели и её соответствием моделируемой ситуации. Ведь усложнение модели за счёт чрезмерной детализации может привести порой к невозможности исследования такой модели, а сильное упрощение модели может не дать достоверной информации о поведении исследуемого объекта.

Поэтому важным является требование *достаточной полноты* математической модели. А именно, математическая модель должна отражать все существенные для решения задачи свойства объекта. Эти свойства могут быть описаны явно в условии задачи. Они могут также следовать и из особенностей изучаемых объектов. Так, например, если в задаче речь идёт о количестве n учащихся класса, то ответ $n = -5\frac{2}{3}$ заведомо неверный. Ведь в задаче фактически есть условие $n \in N$, которое явно не указано.

Давайте решим задачу и посмотрим, какие изменения в нашем алгоритме повлекут эти требования к математическим моделям.

Задача. Первый угол треугольника на 20° больше второго, но в три раза меньше третьего угла. Найдите углы этого треугольника, если сумма первого и третьего углов равна 120° .

Определяем, что известно и что надо найти.

Известно, что первый угол треугольника на 20° больше второго, но в три раза меньше третьего, а сумма первого и третьего углов равна 120° .

Надо найти углы этого треугольника.

Проверяем соответствие единиц измерения величин.

Величины всех углов выражены в градусах, поэтому единицы измерения величин соответствуют друг другу.

Выбираем неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.

Для того чтобы получить более простые уравнения, обозначим x° величину меньшего из углов треугольника, то есть величину второго угла.

Определяем множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

Величина угла треугольника может принимать только положительные значения, меньшие 180° , значит, $0 < x < 180$.

Устанавливаем взаимосвязи между известными и неизвестными величинами.

Величина первого угла треугольника равна $(x + 20)^\circ$, а третьего угла – $3(x + 20)^\circ$. Так как это углы треугольника, то для них также должны выполняться неравенства:

$$0 < x + 20 < 180; 0 < 3(x + 20) < 180.$$

Также известно, что сумма первого и третьего углов равна 120° .

На первый взгляд кажется, что другой информации в условии не дано. Однако нередко бывает так, что какие-то взаимосвязи заданы не явно, а вытекают из свойств заданного объекта.

В нашем случае объект моделирования – треугольник, а сумма углов любого треугольника равна 180° .

Таким образом, при построении математической модели необходимо также *установить взаимосвязи между величинами, возникающие из свойств моделируемого объекта (если они есть)*. ✎

Составляем и обосновываем уравнение.

По условию, сумма первого и третьего углов равна 120° , значит,

$$(x + 20) + 3(x + 20) = 120.$$

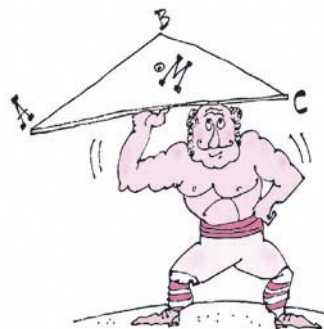
Сумма углов треугольника равна 180° , значит,

$$(x + 20) + x + 3(x + 20) = 180.$$

Проверяем, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением. ✓

Мы зафиксировали, что первый угол треугольника на 20° больше второго и в три раза меньше третьего, сумма первого и третьего углов равна 120° и что заданная фигура – треугольник.

Заметим, что ранее при моделировании задач мы сталкивались лишь с уравнениями, но требуемые соотношения могут быть заданы и неравенствами. Так, указанное множество значений переменной x не может быть описано уравнением, но может быть описано *неравенствами*. Поэтому соотношения мы будем понимать теперь в более широком смысле. ✓



Фиксируем искомую величину.

Требуется найти величины каждого из трёх углов треугольника, то есть значения $x + 20$, x и $3(x + 20)$.

Выпишем соотношения, которые мы составили, и зафиксируем искомые величины. При этом важно заметить, что все составленные соотношения должны выполняться одновременно.

$$\begin{cases} (x + 20) + 3(x + 20) = 120; \\ (x + 20) + x + 3(x + 20) = 180; \\ 0 < x < 180; 0 < x + 20 < 180; 0 < 3(x + 20) < 180. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 20 = ? \\ x = ? \\ 3(x + 20) = ? \end{cases}$$

Ищем все решения, удовлетворяющие построенной модели.

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Однако из первого уравнения следует, что $x = 10$, а из второго – что $x = 20$, что одновременно выполняться не может. Таким образом, приходим к выводу, что данная задача не имеет решений.

Проведенное исследование показывает, насколько важно при работе с математическими моделями учитывать все существенные свойства исследуемых объектов. Действительно, если бы мы не учли того, что сумма углов треугольника равна 180° , то получили бы решение 30° , 10° и 90° , которое не отражает объективных законов окружающего мира: треугольников с такими углами не существует.

Итак, математическая модель должна удовлетворять требованию *достаточной полноты*, то есть содержать все существенные взаимосвязи между исследуемыми объектами. Поэтому мы приходим к следующему *уточнению шагов* общего *алгоритма решения задач методом математического моделирования*:

Алгоритм решения задач методом математического моделирования с уточнёнными шагами

I. Построение математической модели.

1. Внимательно прочитать задачу.
2. Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3. Проверить соответствие единиц измерения величин.
4. Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6. Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).
7. Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.
8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.
9. Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод.

11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

К

17 Периметр прямоугольного участка земли равен 62 м, а разность между его длиной и шириной равна 5 м. Чему равна площадь этого участка земли?

18

а) Расстояние AD между началом и концом ломаной $ABCD$ равно 9,6 см. Известно, что AB равно четверти AD , BC на 0,4 см меньше AB , а CD в 1,5 раза больше BC . Чему равна длина ломаной $ABCD$?

б) Постройте ломаную $ABCD$, удовлетворяющую условию предыдущей задачи.

19

Постройте математическую модель и решите задачу:

- 1) Величины углов треугольника в градусах равны трём последовательным натуральным числам. Найдите их.
- 2) Величины углов треугольника в градусах равны трём последовательным четным числам. Найдите их.
- 3) Величины углов треугольника в градусах равны трём последовательным натуральным числам, кратным трём. Найдите их.

20

Решите задачу, используя метод перебора:

- а) В школьном парке растут дубы, клёны, берёзы и тополя. Известно, что дубов, клёнов и берёз одинаковое количество. При этом число тополей более чем в 3 раза больше, чем число всех остальных деревьев. А число клёнов и тополей меньше 12. Сколько в этом парке растёт тополей?
- б) В городском зоопарке живут обезьяны, крокодилы, слоны и тигры. Известно, что обезьян, слонов и крокодилов одинаковое количество. Число тигров более чем на 11 больше, чем число обезьян и крокодилов вместе. А число тигров и слонов в сумме меньше 16. Сколько в этом зоопарке крокодилов?
- в) В турнире принимали участие не менее 12 игроков. В итоговой таблице турнира было указано, что игроки могли набрать следующие баллы: 5, 7, 8, 10. Количество игроков, набравших 5, 7 и 10 баллов, было одинаковым, а игроков, набравших 8 баллов, было больше, чем всех остальных, вместе взятых. При этом больше 7 баллов набрали менее 10 игроков. Сколько игроков набрали 8 баллов?

π

21

Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

- а) Температура воздуха в Красноярске всегда равна -30°C .
- б) Некоторые грибы – съедобные.
- в) Насекомые являются животными.
- г) Известный математик Абель жил в Норвегии.
- д) Иногда на пальмах растут кокосы.
- е) Все школьники любят играть в шахматы.
- ж) Автомобиль может развивать скорость 300 км/ч.
- з) Некоторые реки не имеют истока.
- и) Некоторые собаки лают.
- к) Иногда родители балуют своих детей.
- л) Все учителя – женщины.
- м) На прошлом уроке мы изучали правила сложения дробей.



22

Длина прямоугольника равна 17 см. Какие значения может принимать ширина этого прямоугольника, если его периметр меньше периметра прямоугольника, длина которого равна 15 см, а ширина – 13 см?