


О. И. Горбанева

# Модели распределения ресурсов и коррупции

учебное пособие

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮФУ
РОСТОВ-НА-ДОНУ-ТАГАНРОГ

УДК 519.87+004(075.8)
ББК 22.18+32.81я73
Г67

*Печатается по решению кафедры прикладной математики и программирования Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета (протокол № 7 от 15 апреля 2021 г.)*

**Рецензенты:**
доцент кафедры высшей математики и исследования операций Южного федерального университета,
кандидат физико-математических наук *Н. В. Данилова*;

президент отделения «Погранология» Международной академии информатизации, доктор технических наук *В. В. Шумов*

**Горбанева, О. И.**

Г67 Модели распределения ресурсов и коррупции : учебное пособие / О. И. Горбанева ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. – 195 с.
ISBN 978-5-9275-3860-7

Учебное пособие содержит полное и систематическое изложение материала, входящего в учебную программу курса по выбору «Модели распределения ресурсов и коррупции». В доступной для студентов форме освещены основные тезисы авторских научных работ по распределению ресурсов в иерархических системах управления, а также некоторых других представителей теорий активных систем и организационного управления. Для закрепления программного материала после каждой главы, как правило, приводятся индивидуальные задания в 12 вариантах.

Предназначено для студентов магистратуры, обучающихся по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» специальности «Модели и информационные технологии организационного управления» Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета.

УДК 519.87+004(075.8)
ББК 22.18+32.81я73

ISBN 978-5-9275-3860-7

© Южный федеральный университет, 2022
© Горбанева О. И., 2022
© Оформление. Макет. Издательство Южного федерального университета, 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**ВВЕДЕНИЕ** ..... 5

**МОДУЛЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СПРАВЕДЛИВОГО И ЭФФЕКТИВНОГО РАЗДЕЛА** ..... 7

Глава 1. Задача о справедливом разделе пирога ..... 7

Глава 2. Общая задача распределения ресурсов. Эффективное и справедливое распределение. Иерархическая система ..... 16

**МОДУЛЬ 2. МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ** ..... 27

Глава 3. Задача распределения ресурсов в иерархической системе управления. Согласованная постановка ..... 27

Глава 4. Неполная информированность Центра при распределении ресурсов ..... 39

Глава 5. Модель распределения ресурсов с учетом частных интересов участников системы ..... 46

Глава 6. Оптимальное распределение ресурсов в условиях создания коалиций между участниками системы ..... 55

Глава 7. Коррупционное распределение ресурсов в иерархических системах управления ..... 65

Глава 8. Распределение нескольких видов ресурсов в иерархической системе ..... 77

**МОДУЛЬ 3. МОДЕЛИ СТИМУЛИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ** ..... 87

Глава 9. Задача стимулирования в организационных системах ..... 88

Глава 10. Ситуация на рынке труда. Равновесие на рынке труда и проблемы занятости ..... 96

Глава 11. Базовые системы оплаты труда ..... 108

Глава 12. Задача управления составом организационной системы ..... 119

**МОДУЛЬ 4. МОДЕЛИ СОЧЕТАНИЯ ОБЩИХ И ЧАСТНЫХ ИНТЕРЕСОВ АКТИВНЫХ АГЕНТОВ** ..... 132
Глава 13. Модели сочетания общих и частных интересов (СОЧИ-модели). Случай равноправных Агентов ..... 132
Глава 14. Модели сочетания общих и частных интересов (СОЧИ-модели). Случай иерархически связанных Агентов. Сравнение случаев иерархии и равноправия Агентов ..... 142
Глава 15. Согласование общих и частных интересов нескольких независимых Агентов ..... 155
Глава 16. Экономический механизм управления в СОЧИ-модели ..... 165
Глава 17. Административный механизм управления в СОЧИ-модели ..... 180

**ЛИТЕРАТУРА** ..... 191

# ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено основным моделям распределения ресурсов в иерархических системах управления. В нем также рассмотрены некоторые неформальные ситуации, возникающие при этом, в частности коррупция.

Настоящее пособие содержит 17 глав, что соответствует 17-недельному курсу дисциплины, которая проводится в первом семестре второго года обучения. В конце каждой главы, как правило, приведены индивидуальные задания, выполнение которых помогает усвоению программного материала. Данные задания представлены в виде 12 равноценных вариантов.

Все главы объединены в четыре модуля. В конце каждого модуля имеются проектные задания, которые можно использовать для контроля знаний студентов, в том числе индивидуальных заданий. Количество вариантов, как правило, позволяет это сделать.

В первом модуле изложены основы теории справедливого и эффективного раздела имущества. Введены основные понятия теории распределения ресурсов, а также рассмотрена самая первая задача справедливого раздела блага – задача раздела пирога, ее история от простой формулировки к сложной, а также методы ее решения.

Второй модуль посвящен подробному исследованию ряда последовательно усложняемых моделей распределений финансовых ресурсов в иерархических производственных системах. Постепенно вводятся в модель элементы, отвечающие за различную информированность участников системы и сопутствующую ей манипуляцию участников в системах. Рассматриваются случаи распределения нескольких видов ресурсов, наличие непроизводственных интересов у участников системы, возможности объединения участников системы в коалиции и возможные коррупционные отношения между ними.

Третий модуль представляет собой обзор моделей стимулирования в организационных системах. Здесь уже показано распределение не только невозобновимых ресурсов (зарплата работникам, доход фирмы, затраты Агента), но и трудовых. Что касается последних, рассматривается задача

формирования оптимального состава организационной системы как однородных, так и неоднородных Агентов.

Четвертый модуль посвящен исследованию моделей сочетания общих и частных интересов, в которых некая группа Агентов имеет общий интерес, реализация которого требует вложения ресурсов. Но так как каждый Агент этой группы имеет наряду с общим интересом свой частный интерес, то перед ним стоит задача, как оптимально распределить имеющиеся у него ресурсы между общими и частными интересами. Описаны административный и экономический механизм воздействия Центра на Агентов.

Полученные в рамках данного курса знания помогут студенту научиться учитывать как формальные, так и неформальные ситуации при моделировании распределения ресурсов в иерархических системах, применять различные методы для исследования иерархических игр и интерпретировать результаты, что будет полезно при написании выпускной квалификационной работы.

Учебное пособие по моделям распределения ресурсов и коррупции написано для студентов магистратуры механико-математического факультета направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» специальности «Модели и информационные технологии организационного направления». Кроме того, книга будет полезна для аспирантов специальности 05.13.10 «Управление в социальных и экономических системах», 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а также для студентов бакалавриата и магистратуры экономической специальности «Прикладная математика в экономике» и других управленческих специальностей.

# МОДУЛЬ 1
# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СПРАВЕДЛИВОГО И ЭФФЕКТИВНОГО РАЗДЕЛА

Курс, посвященный моделям распределения ресурсов в иерархических системах управления, начнем с обзора моделей, определений и результатов теории справедливого распределения. Но перед обзором общего материала данной теории приведем сначала одну задачу – задачу справедливого раздела пирога.

## Глава 1. Задача о справедливом разделе пирога

Когда речь идет о справедливом распределении, разделе или разделении, подразумевается, что имеется в виду разделение какой-то ценности. То есть в классическом понимании – участники системы делят между собой благо, под которым могут выступать ресурсы, клад, наследство. Но, к сожалению, иногда приходится делить хлопоты, обязанности, расходы, которые трудно отнести к понятию «благо». Конечно, «злом» (антонимом слова «благо») эти сущности тоже назвать нельзя.

Мы будем рассматривать разделение благ или ресурсов. Ресурсы бывают разных типов: делимые и неделимые, однородные и неоднородные, возобновляемые и невозобновляемые, ресурсы типа «мощность», ресурсы типа «топливо». Отдельно выделяют людские ресурсы, в состав которых входят не только трудовые ресурсы. В частности, к делимым однородным ресурсам относят денежные средства. К делимым неоднородным ресурсам можно отнести время, землю. К неделимым однородным ресурсам можно отнести, например, парты в школе, коров на ферме. К неделимым неоднородным ресурсам относят комнаты в здании или в квартире, квартиры в доме, предметы имущества человека, например, мебель, одежда, книги и т. д.

В основном мы будем исследовать модели распределения делимых однородных ресурсов – финансовых средств. Но для начала рассмотрим задачу деления пирога. Причем задачу справедливого деления пирога.

Так уж исторически сложилось, что именно с подобной задачей распределения впервые сталкивается человек в своей жизни. Возможность

решения данной задачи очень важна в жизни человека. Наверное, этим можно объяснить тот факт, что задача справедливого раздела пирога хорошо освещена в литературе и предложено очень много алгоритмов для ее решения. Правда, все они основываются на некоторых допущениях. Перечислим их.

Будем считать, что:

1) пирог является линейным. Это означает, что

а) пирог прямоугольный,

б) делить пирог можно только разрезами, параллельными меньшему основанию;

2) длина пирога равна единице.

Эти два допущения позволяют свести задачу раздела пирога к задаче деления отрезка [0; 1] между участниками дележа.

Имеются также два предположения:

1. Предполагается, что пирог однородный. То есть участнику не важно, где именно отрезан кусок пирога. Для него имеет значение лишь размер его куска. Одинаковые по размеру куски имеют одинаковую ценность.

2. Предполагается, что пирог поделен справедливо. Но что считать справедливостью? Будем считать, что у каждого участника есть интерес получить кусок, не меньший чем у других участников.

Доказано, что если пирог делится только между двумя лицами, то существуют процедуры справедливого раздела пирога без зависти. В [Steinhaus, 1948] приведена процедура «Cut and Choose» («Разрежь и выбери». – *Пер. авт.*), которая сводится к тому, что первое лицо делает разрез, а второе лицо из двух образованных кусков выбирает кусок себе. В [Austin, 1982] приведена процедура «Moving Knife» («Двигающийся нож». – *Пер. авт.*), в которой первое лицо устанавливает нож на левом конце пирога, после чего начинает перемещать нож параллельным переносом направо, и продолжает это делать до тех пор, пока другое лицо не скажет: «Режь!» По мнению последнего, именно в этом месте разрез поделит пирог напополам. Но мнения этих двух лиц могут не совпадать. По этой причине второе лицо ставит уже свой нож на левый край пирога, и два ножа двигаются параллельным переносом направо так, чтобы между ними, по мнению второго игрока, была всегда ровно половина пирога. Все это продолжается до тех пор, пока первое лицо не посчитает такое положение

второго ножа справедливым. Тогда уже первое лицо говорит: «Режь!» При данных двух разрезах оба лица будут считать, что пирог будет поделен справедливо.

В случае раздела пирога между тремя лицами также предложены процедуры справедливого деления. В [Steinhaus, 1948] приведена следующая интересная процедура. Первое лицо режет пирог на три куска. Остальные два лица помечают оптимальные для себя части. И здесь возможны два случая. Если помечены два куска, то два последних лица забирают помеченные ими куски, оставшийся кусок достается первому лицу. Если же один кусок оказался помеченным, то он достается первому лицу, другие же две части пирога соединяются, затем последние два игрока делят между собой оставшийся пирог. Для этого они могут применить любую процедуру раздела пирога для двух лиц. В [Deng, Saberi, 2012] эта процедура обобщена на четыре и более участника.

Разработаны процедуры справедливого деления пирога без зависти и для нескольких (скажем, $n$) участников.

Например, процедура «Last Diminisher» («Последний уменьшающий») Банаха-Кнастера заключается в том, что первое лицо держит нож так, чтобы, на его взгляд, справа было $1/n$ пирога. Кому-то из оставшихся лиц может показаться, что первое лицо справа оставило часть большую, чем $1/n$. В таком случае этот участник просит первое лицо подвинуть нож вправо. Кусок достается последнему просившему подвинуть нож.

В [Dubins, Spanier, 1961] приведена процедура «Moving Knife» («Движущийся нож». – *Пер. авт.*), модифицированная для более чем двух участников. Первое лицо устанавливает нож над левым концом пирога и двигает его вправо. Как только какое-то из лиц (включая того, кто двигает нож) считает, что слева находится $1/n$ пирога, он говорит: «Режь!» и забирает левый кусок себе.

Рассмотрим еще одну достаточно необычную процедуру, приведенную в [Fink, 1964], которая не требует на начало ее выполнения знать количество лиц, между которыми делится пирог. Процедура состоит в следующем. Первое лицо делит пирог на две части. Второе лицо выбирает один кусок из двух себе. После этого первые два лица делят имеющиеся у них куски на три части. Третье лицо у каждого из них выбирает один кусок из трех. В итоге у первых трех участников на данный момент имеется по два

куска. Затем первые три лица делят имеющиеся у них два куска пирога уже на четыре части. Четвертое лицо соответственно выбирает и забирает себе по одному куску у каждого из первых трех лиц, и т. д.

На взгляд автора настоящего учебного пособия, предложенная в [Fink, 1964] процедура является самой справедливой из указанных выше. Кроме того, эта процедура без зависти. Но помимо очевидного преимущества, у нее имеется и недостаток. Дележ пирога между $n$ лицами требует сделать $n!$ разрезов, что при четырех участниках застолья составляет двадцать четыре разреза, а при восьми участниках застолья составляет 40 320 (!) разрезов. Нетрудно представить, что останется от пирога, если его подвергнуть 40 320 разрезам! Давайте теперь каждый из нас вспомнит последнее застолье, посвященное далеко не самому торжественному событию, в котором он участвовал. Сколько человек оно собрало? Восемь? Десять? Пятнадцать?

Первым усложнением рассматриваемой задачи считается требование смежности (или связности) доставшейся участнику части пирога. Это требование заключается в том, что каждое лицо получает связную область делимого продукта, на что необходимо не более $(n - 1)$-го разреза.

В [Stromquest, 1980] приведена математическая модель связного справедливого раздела пирога между $n$ участниками. Пирог представляется в виде единичного отрезка [0;1]. Требуется найти такое разбиение отрезка [0;1] на $n$ частей $[0, A_1)$, $(A_1, A_2)$, $(A_2, A_3)$, …, $(A_{n-1}, 1]$, $A_i > A_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n - 1$, называемых кусками, чтобы $i$-й Агент считал, что его часть отрезка доставляет ему полезность не меньшую, чем доставляют другим Агентам ими полученные части. Вводятся обозначения $A_0 = 0$, $A_n = 1$. В случае однородности пирога полезность $i$-го лица зависит от длины его части отрезка $u_i = A_i - A_{i-1}$. То есть для справедливости деления пирога достаточно разрезать его так, чтобы все длины кусков были одинаковыми и равными $1/n$.

Доказано, что смежным образом можно поделить пирог эффективно и без зависти между тремя и более участниками только методами последовательных приближений [Simmons, 1980]. В [Aziz, Mackenzie, 2016] доказано, что предложенная процедура в [Simmons, 1980] имеет конечное количество шагов.

Итак, требование связности стало первым усложнением модели раздела пирога.

Вторым усложнением модели справедливого разделения пирога является учет реальных интересов участников. До этого момента под интересами участников понималось получить пирог размером, не меньшим чем у других участников раздела. Но у всех ли у нас такой интерес? Наверное, да. Но до определенного момента. Если бы счастье людей зависело лишь от размеров пирога, доставшегося им… 99 % населения нашей планеты были бы счастливыми. По этой причине большая часть детей являются счастливыми людьми. К сожалению, для взрослого человека этого недостаточно. А иногда и не является необходимым. Никого не удивляют случаи, когда мать отдает свой кусок пирога ребенку, когда жена отдает большую, а иногда и лучшую часть ужина мужу (кормильцу), когда человек просто отказывается от торта (не любит, диета), или не отказывается, но берет кусок из вежливости к предлагающим пирог хозяевам. И заметьте, никто из упомянутых участников не считает данную ситуацию несправедливой. Тогда что же в этом случае понимать под справедливостью?

Для ответа на этот вопрос предположим, что у каждого участника есть своя функция полезности, параметром которой служит длина полученного куска, т. е. $u_i = u_i(A_i - A_{i-1})$. И под справедливостью в данном случае будем понимать получение лицом полезности от полученного куска пирога не меньшей, чем полезности, полученные другими лицами от своих кусков.

Третьим усложнением модели послужил учет неоднородности пирога. На одной части пирога могут быть кондитерские узоры в виде изображений красных, розовых и желтых цветов, зеленых листьев, шоколадных и ореховых вставок, на другой части пирога этого может не быть. И тогда для некоторых участников ценность разных кусков пирога даже одинакового размера будет разной.

В случае неоднородного пирога полезность Агента от доставшегося ему куска пирога можно выразить в виде $u_i = \int_{A_{i-1}}^{A_i} f_i(x)dx$, где $f_i(x)$ – функция плотности полезности $i$-го Агента, удовлетворяющая свойствам неотрицательности, непрерывности и нормализованности на всем пироге (т. е. $\int_0^1 f_i(x)dx = 1$).

Из вышесказанного можно увидеть, что этой задачей занимается немало западных ученых. Но зачем взрослым (!) ученым людям понадоби-

лось столько времени уделять исследованию детской задачи справедливого раздела пирога?

Потому что делиться может не только пирог. Что еще в данной задаче может предполагаться или подразумеваться под пирогом? Каким свойствам должен удовлетворять ресурс, чтобы к нему можно было применять результаты решения задачи деления пирога?

Финансы подходят? Нет. Связности нет. Предполагаемый ресурс должен обладать свойствами связности и непрерывности. То есть делиться может не только пирог, но и земля, время и прочие аналогичные ресурсы, для деления которых используется процедура деления пирога.

Такие ученые, как Дж. Барбанел, С. Брамс, У. Стромквест, А. Прокацциа, впервые применили алгоритм деления пирога не к пирогу, а к гетерогенному ресурсу типа земли, времени, месторождений полезных ископаемых, включая минералы и топливо, чистую воду, между несколькими равноправными, но имеющими разные интересы участниками [Barbanel, 1996; Barbanel, Brams, 2004; Barbanel, Brams, Stromquest, 2009; Brams, Taylor, 1995, 1996; Brams, Taylor, Zwicker, 1997; Stromquist, 1980, 2008; Procaccia, 2009, 2013].

Рассмотрим некоторые оговоренные выше моменты по отношению к земле или времени. Вспомним процедуру деления Финка. Да-да, ту самую, при которой для раздела пирога между четырьмя лицами нужно провести двадцать четыре разреза. И представим, что делится земля между четырьмя участниками по этому правилу. То есть участок земли пришлось разделить на 24 надела и каждому лицу досталось по 3! = 6 наделов, расположенных в разных концах делимого участка. Делимая земля также бывает неоднородна: холмы, наличие водных источников, растительность и т. д.

А теперь представим, что при помощи процедуры Финка делится временной период в $28 \cdot 4 = 112$ дней для отпусков между четырьмя сотрудниками. Этот период разбили на 24 части (по 4–5 дней каждая). И каждому участнику досталось по шесть таких несмежных частей. При распределении времени трудовых отпусков тоже может возникнуть проблема неоднородности. Например, многие сотрудники предпочитают брать отпуск летом, и неделя отпуска летом может оказаться ценнее месячного отпуска зимой.

Среди современных ученых, занимающихся задачей справедливого раздела пирога, можно указать следующих: Н. Алон [Alon, 1987], С. Дж. Брамс,

А. Д. Тейлор [Brams, Taylor, 1995, 1996; Brams, Taylor, Zwicker, 1997], Дж. М. Робертсон, В. А. Вебб [Robertson, Webb, 1998] – решали эту задачу математически; Э. Мулен, И. Каражианнис, Х. Курокава, А. Прокацция, Н. Ша и Дж. Вонг [Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, Wang, 2016], Е. Моссель и О. Таммус [Mossel, Tamuz, 2010] – занимались задачей справедливого разделения пирога алгоритмически.

Как видим, несмотря на то, что имеется много трудов по справедливому разделу пирога, работы в этом направлении еще достаточно.

Среди всех прочих работ следует выделить работы Фрэнсиса Эдварда Су, который применяет для решения задачи справедливого раздела пирога методы геометрической и топологической комбинаторики, используя топологические пространства [Su, 1999]. Ученый представляет пирог в виде $n$-мерного симплекса, где $n$ – количество Агентов. Рассмотрим эту модель на примере трех игроков. Пирог, делящийся между тремя Агентами, представляется частью плоскости $x + y + z = 1$, расположенной в первом октанте (рис. 1.1).

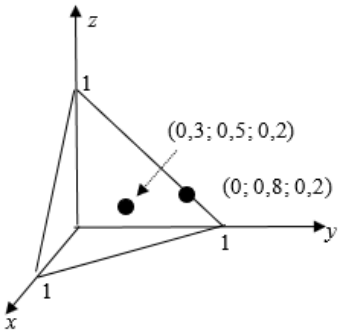



**Рис. 1.1.** Трехмерный симплекс для модели раздела пирога между тремя участниками

Каждая точка полученного симплекса представляет собой определенное деление пирога. Долю $x$ от пирога получает первый игрок, долю $y$ – второй игрок и долю $z$ – третий. Например, точки (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) означают, что весь пирог достается только соответственно первому, второму и третьему игрокам. Точка (0; 0,7; 0,3) означает, что первому игроку пирога не достается, второму игроку достается часть 0,7, а третьему – 0,3. Точка (0,3; 0,5; 0,2) означает, что первому игроку достается 30 % пирога, второму – половина, третьему – пятая часть.

Каждому Агенту сопоставляется область, в которую входят точки раздела, устраивающие его, т. е. та область, разделения внутри которой Агент считает справедливыми. Например, на рис. 1.2 штриховкой выделена область, устраивающая первого Агента, т. е. область его предпочтений.

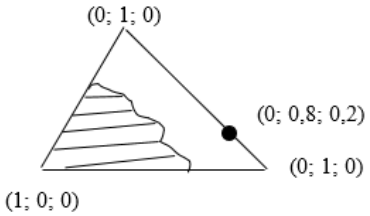



**Рис. 1.2.** Симплекс, в котором выделена область предпочтений первого Агента

На рис. 1.3 показаны области предпочтений всех игроков, штриховкой выделена их область пересечений, поиск которой и является целью решения задачи о справедливом разделе пирога. Фрэнсис Эдвард Су показывает в своих работах, что таких областей пересечения может быть только нечетное количество – это может означать, что справедливое разделение пирога существует и, возможно, не единственное.

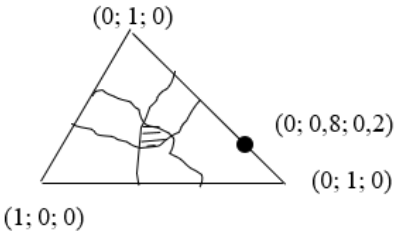



**Рис. 1.3.** Задача раздела пирога для трех игроков

Не менее интересен подход, предложенный в [Segal-Halevi, Hassidim, Aumann, 2015; Sziklai, Segal-Halevi, 2015]. Авторы этих работ, считая пирог неоднородным, полагают, что он может содержать как хорошие, так и плохие части. Например, пирог с подгоревшими частями или земля с каменистыми участками. Каждый участник имеет собственную функцию плотности полезности на ресурсе. Функции плотности могут принимать

любое вещественное значение – как положительное, так и отрицательное. Требуется справедливо распределить между участниками такое имущество. Авторы адаптируют к данной ситуации стандартные процедуры справедливого раздела пирога, разработанные для положительных оценок. В частности, ученых интересовали процедуры без зависти со смежными частями.

При разбиении пирога на $n$ интервалов каждый Агент имеет одну или несколько предпочтительных частей, ценность которых для Агента самая высокая. В отличие от обычной задачи раздела пирога, Агент может предпочесть пустой кусок, ценность которого равна 0. Это происходит, когда значение ценности всех непустых кусков отрицательно. Когда пирог содержит как хорошие, так и плохие куски, ситуация более сложная, так как в каждой точке Агент может предпочесть либо пустой кусок, либо непустой. Разделение, свободное от зависти, в данном случае – это разделение, в котором каждый Агент получает один из своих предпочтительных кусков.

Авторам вышеуказанных работ удалось доказать, что такая процедура существует для трех лиц. Правда, вместо деления без зависти возможно лишь ε-беззавистное деление – деление, в котором для каждого Агента границы куска могут быть перемещены в лучшем случае на ε, так что в результирующем делении Агент считает, что его интервал не меньше, чем любой другой интервал. Если ε достаточно маленькое (например, 0,01 миллиметра), то ε-беззавистное разделение беззавистно для всех практических целей, поскольку движение 0,01 мм незаметно для человека.

Среди прочих работ, посвященных справедливому разделению пирога, можно отметить [Bapat, 1989; Bei, Chen, Hua, Tao, Yang, 2012; Edmonds, 2011, Even, Paz, 1984; Musin, 2014; Woeginger, Sgall, 2007].

**Задания**

1. Решить задачу о справедливом разделе пирога между тремя участниками. Под справедливостью понимается равная полезность участников от полученной части пирога. Длину пирога можно варьировать. Подобрать два значения длины пирога: а) при которой справедливое деление существовало; б) при которой справедливое деление не существует.

1) $f(x) = 7x + 4$, $g(x) = 5x$, $h(x) = -7x + 6$.

2) $f(x) = -7x + 6$, $g(x) = 6x - 7$, $h(x) = -4x + 4$.

3) $f(x) = -4x + 4$, $g(x) = -5x + 8$, $h(x) = -7x + 100$.
4) $f(x) = -7x + 100$, $g(x) = 5x + 100$, $h(x) = 4x$.
5) $f(x) = 4x$, $g(x) = -7x + 6$, $h(x) = -\frac{x}{3} + 3$.
6) $f(x) = -\frac{x}{3} + 3$, $g(x) = 8x - 9$, $h(x) = 2x + 1$.
7) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = -7x + 5$.
8) $f(x) = -7x + 5$, $g(x) = 7x + 4$, $h(x) = -3x + 5$.
9) $f(x) = -3x + 7$, $g(x) = 3x + 5$, $h(x) = -5x + 8$.
10) $f(x) = -5x + 8$, $g(x) = -2x + 9$, $h(x) = x + 9$.
11) $f(x) = -x + 9$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = -3x + 4$.
12) $f(x) = -3x + 4$, $g(x) = -5x + 9$, $h(x) = x - 1$.

2. С подобранной в предыдущем задании (п. «а») длиной пирога решить задачу раздела последнего с теми же самыми функциями *f*, *g* и *h* при помощи симплекса. Под справедливостью понимаются выполнения условий предпочтения игроков:

$$f(x) > 0,$$
$$g(x) > 0,$$
$$h(x) > 0.$$

## Глава 2. Общая задача распределения ресурсов. Эффективное и справедливое распределение. Иерархическая система

Сформулируем общую задачу распределения ресурсов. Имеется иерархическая структура участников системы. Некоторые из участников системы располагают некоторым количеством ресурсов, которые необходимо распределить между другими участниками системы либо между группами своих интересов в соответствии с индивидуальными предпочтениями распределяющего ресурсы субъекта.

Подробнее остановимся на каждом из встречаемых понятий в определении. Начнем с понятия иерархической системы.

Иерархическая система, согласно определению, данному в [Месарович, Мако, Такахара, 1973], удовлетворяет трем свойствам:

1. Вертикальная соподчиненность, или декомпозиция [Месарович, Мако, Такахара, 1973]. Каждая иерархическая система состоит из нескольких

подсистем, которые вертикально соподчинены, и только из них; эти подсистемы взаимодействуют между собой (рис. 2.1, взят из [Месарович, Мако, Такахара, 1973]). Примечательно, что под трудноопределяемыми понятиями «системы» или «подсистемы» имеются в виду преобразования входных данных в выходные. Какое преобразование здесь имеется в виду? Возможно, это процедура, содержащая действия для решения проблемы. Эта процедура содержит список конкретных операций, которые должны быть выполнены в определенное время и могут быть связаны между собой определенной последовательностью. Но это также может быть и реальное динамическое преобразование, соответствующее определенному процессу с заранее заданным детерминированным алгоритмом и последовательно выполняемыми операциями. Считается, что взаимодействие со средой происходит на самом низком уровне, хотя не исключено, что входные и выходные потоки могут соответствовать всем возможным уровням. То же самое можно сказать о взаимодействии между уровнями. Обычно считается, что взаимодействие происходит между соседними уровнями. Но не исключено взаимодействие между другими уровнями. Также это свойство называют «последовательное вертикальное расположение подсистем».

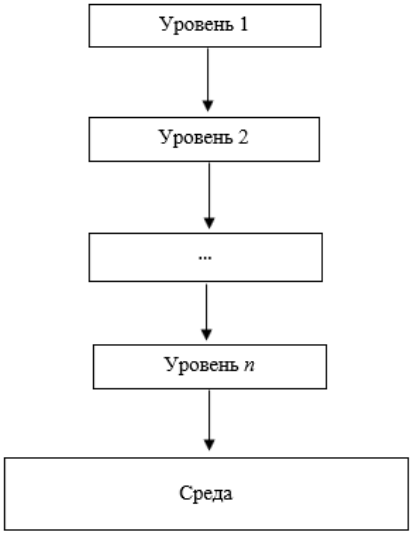



**Рис. 2.1.** Иерархическая система

Примером такой системы может служить система образования в университете. В качестве вертикально соподчиненных уровней можно рассматривать «Декан» – «Заведующий кафедрой» – «Преподаватель» – «Студент». Под входом имеются в виду результаты ЕГЭ, с которыми абитуриент поступает учиться в университет, правила приема в университет, уровень подготовки студентов, их работоспособность, уровень подготовки и работоспособность преподавателей, материальная база университета, материальная база семьи студента, его жилищные условия и т. д. Под выходом имеется в виду уровень подготовки выпускников вузов, их оценки. Под преобразованием имеются в виду процесс подготовки вузом студентов, в частности, список дисциплин и практик, которые нужно пройти студентом, организация работы преподавателей, приказы деканов и ректора, нормативная база вуза.

Обычно студенты взаимодействуют только с преподавателями, но в некоторых ситуациях возможно обращение студентов напрямую к заведующему кафедрой или к декану. Так же как и преподаватели, которые в процессе своей рабочей деятельности взаимодействуют с заведующим кафедрой, к которой относятся. Но в исключительных случаях они могут обращаться и к декану.

2. Право вмешательства верхнего уровня [Месарович, Мако, Такахара, 1973]. На деятельность подсистемы любого уровня непосредственное и явное влияние оказывают вышестоящие уровни, чаще всего ближайший старший уровень. «Это воздействие носит для нижележащих уровней обязывающий характер и в нем находит свое выражение приоритет действий и целей более высоких уровней. Это воздействие называется вмешательством». В системах, в которых процесс протекает в виде выполнения детерминированного алгоритма, вмешательством считается изменение входных параметров для подсистем нижестоящего уровня. Если же процесс протекает в виде выполнения недетерминированного алгоритма, приоритет действий определяет порядок получения решений на разных уровнях. В случае возникновения проблем в системе в первую очередь разрешить ее нужно на вышестоящих уровнях. До этого момента решать ее на нижестоящих уровнях бессмысленно. Это свойство также называют «приоритет действий верхнего уровня».