

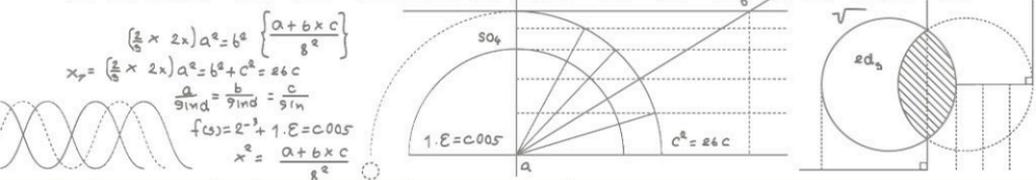


ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ИТОГОВАЯ
АТТЕСТАЦИЯ

ОГЭ

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

МАТЕМАТИКА



КОМПЛЕКСНАЯ ПОДГОТОВКА

К ОСНОВНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

- теоретический материал
- образцы заданий всех типов и уровней сложности
- справочные материалы
- тренировочные экзаменационные задания в формате ОГЭ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М52

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 ОГЭ : Математика : комплексная подготовка : к основному государственному экзамену : теория и практика / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2023. — 477, [3] с.: ил. — (Комплексная подготовка к ОГЭ).

ISBN 978-5-17-157377-5

Пособие содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на основном государственном экзамене. Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются экзаменационные задания — контрольные измерительные материалы ОГЭ.

Справочник состоит из двух глав: «Арифметика. Алгебра» и «Геометрия». Помимо теоретического материала в справочнике представлено значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. Ко всем заданиям даны ответы для самопроверки.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте fir1.ru. Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Работа с пособием позволит повторить все основные темы курса математики за 5–9 классы и успешно подготовиться к сдаче ОГЭ.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-157377-5

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., 2023
© ООО «Издательство АСТ», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	11
ГЛАВА I. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА	13
§ 1. Натуральные числа	15
1.1. Десятичная запись натуральных чисел	15
1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем	16
1.3. Делимость натуральных чисел	18
1.4. Признаки делимости	19
1.5. Простые и составные числа	20
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное	21
1.7. Деление с остатком	23
<i>Примеры заданий № 1</i>	24
§ 2. Дроби	28
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей	28
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	31
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей	32
2.4. Арифметические действия с десятичными дробями	33
2.5. Нахождение части от целого и целого по его части	35
2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби	36
2.7. Округление чисел	37
<i>Примеры заданий № 2</i>	38
2.8. Проценты	41
2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам	42
2.10. Отношение. Процентное отношение	43
2.11. Пропорции	45
2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости ..	46
<i>Примеры заданий № 3</i>	47
§ 3. Рациональные числа	51
3.1. Целые числа. Рациональные числа	51

Содержание

3.2. Координатная прямая	52
3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел	52
3.4. Арифметические действия с рациональными числами	54
<i>Примеры заданий № 4.</i>	56
§ 4. Целые выражения.	60
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения	60
4.2. Свойства степени с натуральным показателем	60
4.3. Одночлен	62
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной	63
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов	65
4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов	66
4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов.	67
4.8. Разложение многочленов на множители	68
<i>Примеры заданий № 5.</i>	70
§ 5. Дробные выражения	74
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби.	74
5.2. Тожество. Тожественные преобразования выражений	75
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей	75
5.4. Действия с алгебраическими дробями	76
<i>Примеры заданий № 6.</i>	79
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями.	84
5.6. Стандартный вид числа	85
<i>Примеры заданий № 7.</i>	86
§ 6. Корень из числа	89
6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень	89
6.2. Свойства арифметического квадратного корня.	90
6.3. Тожественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни.	91
6.4. Корень третьей степени	93

Содержание

6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем	94
6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел	94
6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел	95
<i>Примеры заданий № 8.</i>	98
§ 7. Уравнения с одной переменной	103
7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной	103
7.2. Линейное уравнение с одной переменной	105
7.3. Квадратное уравнение	106
7.4. Теорема Виета	108
7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители	109
<i>Примеры заданий № 9.</i>	111
7.6. Рациональные уравнения.	114
7.7. Метод замены переменной	115
<i>Примеры заданий № 10.</i>	117
§ 8. Функции	120
8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции	120
8.2. Способы задания функции	121
8.3. График функции	123
8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	125
8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы.	127
8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность	129
8.7. Обратная пропорциональная зависимость. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и её свойства	131
<i>Примеры заданий № 11.</i>	133
8.8. Квадратичная функция и её свойства	146
8.9. Функция $y = \sqrt{x}$ и её свойства	150
8.10. График функции $y = \sqrt[3]{x}$	151
8.11. Функция $y = x $ и её свойства	152

Содержание

8.12. Решение уравнений графическим методом	152
<i>Примеры заданий № 12.</i>	154
§ 9. Уравнения с двумя переменными	165
9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения	165
9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом	167
9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными	171
<i>Примеры заданий № 13.</i>	174
§ 10. Текстовые задачи	179
10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений	179
<i>Примеры заданий № 14.</i>	181
10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений.	185
<i>Примеры заданий № 15.</i>	187
10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом	189
<i>Примеры заданий № 16.</i>	190
10.4. Практико-ориентированные задачи	193
<i>Примеры заданий № 17 [Зонт]</i>	199
<i>Примеры заданий № 18 [Лист]</i>	205
<i>Примеры заданий № 19 [Печь]</i>	210
<i>Примеры заданий № 20 [Шины]</i>	216
<i>Примеры заданий № 21 [Квартира]</i>	222
§ 11. Неравенства	224
11.1. Числовые неравенства и их свойства.	224
11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств	226
11.3. Общие сведения о неравенствах с одной переменной	228
11.4. Числовые промежутки	229
11.5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств	230
11.6. Квадратные неравенства	233
<i>Примеры заданий № 22.</i>	235

§ 12. Числовые последовательности.	241
12.1. Понятие последовательности.	241
12.2. Способы задания последовательности.	242
12.3. Арифметическая прогрессия.	244
12.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии.	245
12.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов	246
12.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии.	249
12.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы.	250
<i>Примеры заданий № 23.</i>	250
§ 13. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики	254
13.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов.	254
13.2. Комбинаторные правила суммы и произведения.	256
13.3. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	257
13.4. Статистика. Статистические характеристики.	259
13.5. Частота и вероятность случайного события.	261
13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности.	263
13.7. Представление о геометрической вероятности.	266
<i>Примеры заданий № 24.</i>	267
ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЯ	275
§ 14. Простейшие геометрические фигуры и их свойства	277
14.1. Прямая, луч, отрезок. Измерение отрезков.	277
14.2. Угол. Измерение углов.	279
14.3. Смежные и вертикальные углы.	280
14.4. Перпендикулярные прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой.	281
<i>Примеры заданий № 25.</i>	282

§ 15. Параллельные прямые	286
15.1. Признаки параллельности прямых	286
15.2. Свойства параллельных прямых	287
<i>Примеры заданий № 26</i>	289
§ 16. Треугольник	291
16.1. Элементы треугольника. Равные треугольники	291
16.2. Виды треугольников	293
16.3. Признаки равенства треугольников	294
16.4. Свойства равнобедренного треугольника	296
16.5. Признаки равнобедренного треугольника	297
16.6. Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника	298
16.7. Неравенство треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника	300
16.8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника	301
16.9. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках . .	303
16.10. Средняя линия треугольника	305
16.11. Подобные треугольники	306
16.12. Признаки подобия треугольников	307
<i>Примеры заданий № 27</i>	309
16.13. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике	315
16.14. Теорема Пифагора	316
16.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника	317
16.16. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°	320
16.17. Теорема косинусов	322
16.18. Теорема синусов	323
<i>Примеры заданий № 28</i>	324
§ 17. Окружность и круг	329
17.1. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры ГМТ	329
17.2. Окружность и круг, их элементы	330
17.3. Свойства элементов окружности	332
17.4. Касательная и секущая к окружности	333
17.5. Взаимное расположение двух окружностей	335
17.6. Окружность, описанная около треугольника	336

Содержание

17.7. Окружность, вписанная в треугольник	338
17.8. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности	340
17.9. Длина окружности	341
<i>Примеры заданий № 29</i>	342
§ 18. Многоугольник	350
18.1. Четырёхугольник и его элементы	350
18.2. Параллелограмм и его свойства	351
18.3. Признаки параллелограмма	353
18.4. Прямоугольник, ромб, квадрат	356
<i>Примеры заданий № 30</i>	357
18.5. Трапеция. Средняя линия трапеции	362
18.6. Четырёхугольник, вписанный в окружность	364
18.7. Четырёхугольник, описанный около окружности	365
18.8. Сумма углов выпуклого многоугольника	366
18.9. Правильные многоугольники	367
<i>Примеры заданий № 31</i>	369
§ 19. Площадь и объём	376
19.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника	376
19.2. Площадь параллелограмма и трапеции	377
19.3. Формулы для нахождения площади треугольника	378
19.4. Площадь круга. Площадь сектора	380
19.5. Формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, куба и шара	381
<i>Примеры заданий № 32</i>	381
§ 20. Декартовы координаты на плоскости	389
20.1. Координатная плоскость	389
20.2. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка	390
20.3. Уравнение фигуры. Уравнение окружности	392
20.4. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	394
20.5. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными	396
<i>Примеры заданий № 33</i>	396

Содержание

§ 21. Векторы на плоскости	400
21.1. Понятие вектора. Модуль вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы	400
21.2. Координаты вектора	402
21.3. Сложение и вычитание векторов	404
21.4. Умножение вектора на число	407
21.5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	408
21.6. Скалярное произведение векторов	409
<i>Примеры заданий № 34.</i>	411
§ 22. Геометрические преобразования	416
22.1. Движение фигуры. Параллельный перенос	416
22.2. Осевая симметрия	417
22.3. Центральная симметрия	419
22.4. Поворот	422
22.5. Гомотетия. Подобие фигур	424
<i>Примеры заданий № 35.</i>	426
Ответы к примерам заданий.	434
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ.	447
Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ	449
Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена 2023 года по МАТЕМАТИКЕ	450
Система оценивания экзаменационной работы по математике	467
Образец бланков ответов	475

ПРЕДИСЛОВИЕ

На основной государственной экзамен (ОГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры и геометрии 7–9 классов. Основной подготовки к ОГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–9 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ОГЭ по математике.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ОГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма n первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа, по какой формуле можно вычислить площадь трапеции и т. п.

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы, вторая глава «Геометрия» — содержанию курса геометрии 7–9 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ОГЭ по математике.

Предисловие

Понятно, что для успешного написания ОГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ОГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоит из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте fipi.ru. Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Желаем вам успешной сдачи основного государственного экзамена по математике.

Авторы

ГЛАВА I

**АРИФМЕТИКА.
АЛГЕБРА**

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или **натуральный ряд**). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этих цифр десять:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе — **разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной**. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего старшего разряда.

1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем

Если по двум данным числам по некоторому правилу определяют третье число, то этот процесс в математике называют **действием**.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

В равенстве $a + b = c$ числа a и b называют **слагаемыми**, число c и запись $a + b$ — **суммой**.

В равенстве $a - b = c$ число a называют **уменьшаемым**, число b — **вычитаемым**, число c и запись $a - b$ — **разностью**.

В равенстве $a \cdot b = c$ числа a и b называют **множителями**, а число c и запись $a \cdot b$ — **произведением**.

В равенстве $a : b = c$ число a называют **делимым**, число b — **делителем**, число c и запись $a : b$ — **частным**.

Арифметические действия обладают следующими свойствами.

1. Переместительное свойство сложения. От перестановки слагаемых сумма не меняется:

$$a + b = b + a.$$

2. Сочетательное свойство сложения. Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Переместительное свойство умножения. От перестановки множителей произведение не меняется:

$$ab = ba.$$

4. Сочетательное свойство умножения. Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$(ab)c = a(bc).$$

5. Распределительное свойство умножения относительно сложения. Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1.$$

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число:

$$a^1 = a.$$

Например, $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Вторую степень числа называют **квадратом числа**. Например, запись a^2 читают « a в квадрате». Третью степень числа называют **кубом числа** и запись a^3 читают « a в кубе».

Если в числовое выражение входит степень, то сначала выполняют возведение в степень, а потом — остальные действия.

Например, $5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$, $5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$.

Задача. Вычислите удобным способом:

1) $25 \cdot 867 \cdot 4$; 2) $329 \cdot 754 + 329 \cdot 246$; 3) $125 \cdot 24 \cdot 283$.

Решение. 1) Используем переместительное, а затем сочетательное свойства умножения:

$$25 \cdot 867 \cdot 4 = 867 \cdot (25 \cdot 4) = 867 \cdot 100 = 86\,700.$$

2) Имеем: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. Тогда:

$$329 \cdot 754 + 329 \cdot 246 = 329 \cdot (754 + 246) = 329 \cdot 1000 = 329\,000.$$

$$3) 125 \cdot 24 \cdot 283 = 125 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 283 = (125 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 283) = 1000 \cdot 849 = 849\,000.$$

1.3. Делимость натуральных чисел

Если натуральное число a делится нацело на натуральное число b , то число a называют **кратным числа b** , а число b — **делителем числа a** .

Например, числа 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 являются делителями числа 30, а число 30 является кратным каждого из этих чисел.

❶ Если каждое из натуральных чисел a и b делится нацело на число k , то и сумма $a + b$ также делится нацело на число k .

Например, каждое из чисел 21 и 36 делится нацело на 3. Тогда сумма чисел 21 и 36 также делится нацело на 3.

❷ Если число a делится нацело на число k , а число b не делится нацело на число k , то сумма $a + b$ также не делится нацело на число k .

Например, число 35 делится нацело на число 7, а число 17 на число 7 не делится нацело. Тогда сумма $35 + 17$ также не делится нацело на число 7.

Задача. Целые числа x и y таковы, что $(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Докажите, что $(x + 7y)$ делится нацело на 31.

Решение. Запишем: $x + 7y = 31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$. Из условия следует, что $5(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Кроме того, $31(x + 2y)$ делится нацело на 31. Тогда рассматриваемая разность $31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$ делится нацело на 31.

1.4. Признаки делимости

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют **чётными**, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — **нечётными**.

Признак делимости на 2. Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой, то это число делится нацело на 2. Если запись натурального числа оканчивается нечётной цифрой, то это число не делится нацело на 2.

Признак делимости на 10. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится нацело на 10. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то это число не делится нацело на 10.

Признак делимости на 5. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится нацело на 5. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то это число не делится нацело на 5.

Признак делимости на 3. Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3. Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

Например, число 7854 делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 24, делится нацело на 3. Число 3749 не делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 23, не делится нацело на 3.

Признак делимости на 9. Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9. Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

Задача 1. Докажите, что значение выражения $10^{10} + 2$ делится нацело на 3.

Решение. Значение данного выражения имеет вид $100\dots02$. Сумма цифр этого числа равна 3. Поэтому оно делится нацело на 3.

Задача 2. Запись десятизначного натурального числа состоит из десяти различных цифр. Может ли это число быть степенью числа 2?

Решение. Сумма цифр данного числа равна 45. Следовательно, это число кратно 9. Однако ни одна степень числа 2 не делится нацело на 9. Значит, данное число не может быть степенью числа 2.

.....

1.5. Простые и составные числа

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.

Например, числа 2, 7, 11, 13 являются простыми.

Число 2 — наименьшее простое число. Это единственное чётное простое число.

Простых чисел бесконечно много.

Натуральное число, имеющее больше двух натуральных делителей, называют **составным**.

Например, числа 6, 15, 49, 1000 являются составными.

Поскольку число 1 имеет только один делитель, его не относят ни к простым, ни к составным.

❶ Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т. е. разложить на простые множители.

Например, $10 = 2 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

❶ Любые два разложения данного числа на простые множители могут отличаться только порядком следования множителей.

Обычно произведение одинаковых множителей в разложении числа на простые множители заменяют степенью. Например, пишут: $18 = 2 \cdot 3^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $81 = 3^4$; $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

Задача. Разложите на простые множители число 3150.

Решение. 1) 3150 кратно 2, $3150 : 2 = 1575$;

2) 1575 не кратно 2, но кратно 3, $1575 : 3 = 525$;

3) 525 кратно 3, $525 : 3 = 175$;

4) 175 не кратно 3, но кратно 5, $175 : 5 = 35$;

5) 35 кратно 5, $35 : 5 = 7$.

$$\begin{aligned} & \text{Следовательно, } 3150 = 2 \cdot 1575 = 2 \cdot 3 \cdot 525 = \\ & = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 175 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \\ & = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Результат вычислений можно представить в виде следующей таблицы:

3150	2
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b обозначают так: НОД (a ; b).

Например, НОД (28; 42) = 14.

Задача 1. Найдите НОД (180; 840).

Решение. Представим разложение данных чисел на простые множители в виде произведения степеней. Имеем: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $840 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

Будем искать НОД по такому правилу.

1) Определим степени, основания которых являются общими простыми делителями данных чисел (в рассматриваемом примере это основания 2, 3, 5).

2) Из каждой пары степеней с одинаковыми основаниями выберем степень с меньшим показателем (в рассматриваемом примере это 2^2 , 3^1 , 5^1).

3) Перемножим выбранные степени. Полученное произведение является искомым наибольшим общим делителем.

Получаем: $\text{НОД}(180; 840) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$.

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то их называют **взаимно простыми**.

Например, числа 585 и 616 взаимно простые, поскольку $\text{НОД}(585; 616) = 1$.

Если число a — делитель числа b , то $\text{НОД}(a; b) = a$.
Например, $\text{НОД}(250; 3000) = 250$.

Задача 2. Из 156 жёлтых, 234 белых и 390 красных роз составляли букеты. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить, если необходимо использовать все цветы?

Решение. Поскольку букеты одинаковые, то роз одного цвета во всех букетах одинаковое количество. Тогда количество букетов является общим делителем чисел 156, 234 и 390. Количество букетов должно быть наибольшим, поэтому искомая величина равна $\text{НОД}(156; 234; 390)$.

Имеем: $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$, $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Отсюда $\text{НОД}(156; 234; 390) = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$.

Ответ: 78 букетов.

Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наименьшим общим кратным** этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначают так: НОК (a ; b).

Например, НОК (4; 6) = 12.

Задача 3. Найдите НОК (84; 90).

Решение. Имеем: $84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$, $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Будем искать НОК по такому правилу.

1) Выберем степени, основания которых встречаются только в одном из разложений (в рассматриваемом примере это 7^1 и 5^1).

2) Из каждой пары степеней с одинаковыми основаниями выберем степень с бóльшим показателем (в рассматриваемом примере это 2^2 и 3^2).

3) Перемножим выбранные степени. Полученное произведение является искомым наименьшим общим кратным.

Получаем: НОК (84; 90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 1260$.

Если число a — делитель числа b , то НОК (a ; b) = b . Например, НОК (250; 3000) = 3000.

Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению.

Например, НОК (8; 15) = 120.

1.7. Деление с остатком

Если натуральное число a не делится нацело на натуральное число b , то можно выполнить **деление с остатком**. Например, при делении числа 47 на 5 в частном получаем 9, а в остатке 2. Пишут: $47 : 5 = 9$ (ост 2) или $47 = 5 \cdot 9 + 2$, и говорят, что число 47 при делении на 5 даёт в остатке число 2.

❶ Для любых натуральных чисел a и b существует единственная пара целых неотрицательных чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$.

Число r называют **остатком при делении числа a на число b** . Если $r \neq 0$, то число q называют **неполным частным при делении числа a на число b** .

Например:

• для чисел $a = 92$, $b = 17$ существует пара $q = 5$ и $r = 7$ такая, что $92 = 17 \cdot 5 + 7$;

• для чисел $a = 2$, $b = 7$ существует пара $q = 0$ и $r = 2$ такая, что $2 = 7 \cdot 0 + 2$.

Остаток всегда меньше делителя. Например, если делитель равен 3, то остаток может принимать только такие значения: 0, 1 и 2. Отсюда следует, что любое натуральное число x может быть представлено только одним из трёх равенств: $x = 3n$, $x = 3n + 1$, $x = 3n + 2$, где n — натуральное число или 0.

Задача. Известно, что при делении натурального числа m на 18 остаток равен 11. Найдите остаток при делении числа m : 1) на 2; 2) на 3; 3) на 6.

Решение. Данное натуральное число x можно представить в виде $x = 18m + 11$.

Имеем:

• $x = 18m + 11 = 18m + 10 + 1 = 2(9m + 5) + 1 = 2t + 1$, где t — натуральное число;

• $x = 18m + 11 = 18m + 9 + 2 = 3(6m + 3) + 2 = 3p + 2$, где p — натуральное число;

• $x = 18m + 11 = 18m + 6 + 5 = 6(3m + 1) + 5 = 6s + 5$, где s — натуральное число.

Следовательно, данное натуральное число при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2 и при делении на 6 даёт в остатке 5.

Примеры заданий № 1

Часть 1

1. На уроке физкультуры все 26 учеников класса построились в одну шеренгу. Известно, что Пётр стоял четырнадцатым, считая слева направо, а Елена — двадца-

§ 1. Натуральные числа

- той, считая справа налево. Сколько учеников стояло между Петром и Еленой?
2. На перемене ученики школы выстроились в очередь в буфет. Ольга стояла впереди Виктора, а между ними было 3 человека. Позади Ольги стояло 6 человек, а перед Виктором — 7 человек. Сколько всего учеников стояло в очереди?
 3. Воспитанники детского сада шли парами на прогулку в парк. Полина насчитала перед собой 8 пар детей, а позади себя — 6 пар. Сколько всего детей шло на прогулку?
 4. Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 25. Сколько раз цифра 2 встречается в нумерации?
 5. Какую одну и ту же цифру надо приписать слева и справа к числу 25, чтобы полученное число было кратно 6?
 6. Купили несколько ручек по 15 р. за каждую из них и 6 одинаковых тетрадей. Какое из данных чисел может выражать в рублях общую стоимость покупки?
1) 190 2) 192 3) 193 4) 197
 7. Какую цифру надо поставить вместо звёздочки в записи $5*2$, чтобы полученное число делилось нацело на 3 и на 4?
 8. Какое из данных чисел кратно числу 9?
1) 998 799 3) 666 666
2) 199 999 4) 100 009
 9. Какую цифру надо поставить вместо звёздочки в записи $111*6$, чтобы полученное число делилось нацело на 9 и на 4?
 10. Какую цифру надо поставить вместо звёздочки в записи $2344*$, чтобы полученное число было кратно 45?
 11. Сколько простых чисел содержится среди чисел 1, 2, 5, 8, 9, 14, 19, 23, 31, 35, 37, 39, 42, 67, 78, 83, 91, 99?
 12. Найдите наибольший общий делитель чисел 840 и 784.

13. Из 64 белых и 80 красных роз составляют букеты. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить, если необходимо использовать все цветы?
14. Из 280 мандаринов, 252 пачек печенья и 588 конфет приготовили одинаковые подарки для учеников класса. Сколько в классе учеников, если известно, что их больше 20?
15. В саду растут только яблони и вишни. Количество вишен относится к количеству яблонь как 5 : 6. Сколько деревьев растёт в саду, если их общее количество больше 90, но меньше 100?
16. В ящике лежат яблоки. Известно, что их можно разложить в 5 рядов, или в 8 рядов, или в 12 рядов так, что в каждом ряду будет поровну яблок. Какое наименьшее количество яблок может быть в этом ящике?
17. Какая из данных пар чисел является парой взаимно простых чисел?
- 1) 7 и 14
 - 2) 14 и 16
 - 3) 14 и 35
 - 4) 14 и 27
18. Найдите наименьшее общее кратное чисел 30 и 100.
19. Найдите наименьшее общее кратное чисел 10, 16 и 28.
20. Какое наименьшее количество метров ткани должно быть в рулоне, чтобы его можно было продать без остатка отрезами по 8 м, или по 10 м, или по 12 м?
21. Два теплохода заходят в порт после каждого рейса. Первый теплоход выполняет рейс за 4 дня, а второй — за 6 дней. Однажды они встретились в порту в среду. Через сколько дней они опять встретятся в порту в среду?
22. Зелёный, жёлтый и красный цвета светофора горят последовательно соответственно 50 с, 5 с и 20 с.

§ 1. Натуральные числа

В некоторый момент времени загорелся зелёный свет. Какой свет будет гореть через 3 мин?

- 1) зелёный
- 2) жёлтый
- 3) красный
- 4) невозможно определить

23. На длинной ленте через каждые 8 см делают отметку красным карандашом, а через каждые 6 см — синим карандашом. На каком расстоянии (в сантиметрах) от начала ленты впервые совпадут красная и синяя отметки?
24. Чему равен остаток при делении числа 47 на 3?
25. Чему равен остаток при делении числа 1484 на 10?
26. Чему равен остаток при делении числа 972 на 9?
27. Известно, что при делении натурального числа m на 20 остаток равен 7. Найдите остаток при делении числа $3m$ на 5.
28. Известно, что при делении натурального числа m на 20 остаток равен 7. Найдите остаток при делении числа $3m$ на 12.
29. В каждом купе вагона поезда 4 места. В купе с каким номером едет пассажир, номер места которого 17?
30. В каждом подъезде на каждом этаже 9-этажного дома расположено по 8 квартир. Найдите номер этажа, на котором находится квартира № 173.